مجله علمی- پژوهشی "پدافند الکترونیکی و سایبری"

ویژه‌نامه کنفرانس بین‌المللی ترکیبیات، رمزنگاری و محاسبات، ص ۸۴ -۷۹

چندجمله‌ای غالب تام گراف‌ها

سعید علیخانی[۱*]، نسرین جعفری[۲]

۱- دانشیار، ۲- دانشجوی دکتری، دانشگاه یزد

(دریافت: ۹۵/۰۷/۰۵، پذیرش: ۹۶/۰۳/۰۶)

چکیده

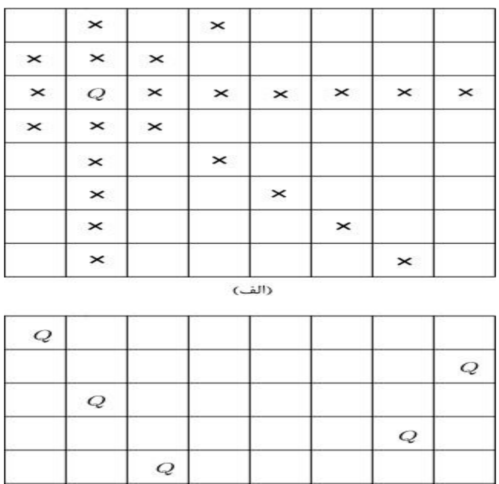
نظریه غالب، یکی از مهم‌ترین موضوعات موجود در علم گراف است که در بسیاری از زمینه‌ها هم‌چون شبکه‌های ارتباطی، نقشه‌برداری زمینی و مسیریابی کاربرد دارد. فرض کنید G=(V,E) گراف ساده با مرتبه n است. یک زیرمجموعه S از مجموعه V را مجموعه غالب تام گوییم، هرگاه هر راس u در V همسایه یک راس در S باشد. کوچک‌ترین اندازه مجموعه‌های غالب تام گراف G را عدد غالب تام می‌گوییم و آن را با $\gamma_t(G)$ نشان می‌دهیم. تعداد مجموعه‌های غالب و مجموعه‌های غالب تام با هر اندازه دلخواهی در گراف دلخواه G اخیراً مورد توجه قرار گرفته است. تابع مولد تعداد مجموعه‌های غالب تام گراف G با نماد $D_t(G,x)$، نشان داده شده و برابر با $D_t(G,x)=\sum_{i=\gamma_t(G)}^{n} d_t(G,i)x^i$ بوده که چندجمله‌ای غالب تام نامیده می‌شود که در آن $d_t(G,i)$، تعداد مجموعه‌های غالب تام با اندازه i از گراف G است. در این مقاله به مطالعه این چندجمله‌ای پرداخته و هم‌چنین ریشه این چندجمله‌ای را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

واژه‌های کلیدی: عدد غالب، عدد غالب تام، چندجمله‌ای غالب تام

۱- مقدمه

نخستین دلیل تعریف و مطالعه مجموعه‌های غالب، یافتن راه‌حل برای مسأله n وزیر در یک صفحه شطرنج است. علاقه‌مندان شطرنج در اروپا در دهه 50 قرن نوزدهم، برای اولین بار این مسأله را مطرح کردند که چه تعداد وزیر در یک صفحه شطرنج می‌توان قرار داد به طوری که همه مربع‌های صفحه شطرنج یا با یک وزیر اشغال شوند یا حداقل با یک وزیر احاطه شوند و در عین حال وزیرها یک‌دیگر را نیز مغلوب نکنند. صفحه شطرنج در شکل (۱- الف)، یک صفحه شطرنج 8×8 استاندارد را نشان می‌دهد که در آن همه مربع‌های احاطه‌شده توسط وزیر داده‌شده با × علامت‌گذاری شده‌اند. مطابق قوانین بازی شطرنج، یک وزیر به هر تعداد مربع دلخواه در صفحه به صورت افقی، عمودی و قطری احاطه دارد. در شکل (۱- ب) صفحه شطرنج یک مجموعه از 6 وزیر را نشان می‌دهد که وزیرها به همه مربع‌های صفحه شطرنج احاطه دارند و هیچ‌کدام با دیگری مغلوب نمی‌شود.

به بیان دیگر مسأله مربع‌های غالب در صفحه شطرنج، معادل با مسأله رئوس غالب در یک گراف است. در گراف ساده G، به بیان دیگر مسأله مربع‌های غالب در صفحه شطرنج، معادل با مسأله رئوس غالب در یک گراف است. در گراف ساده G، $S\subseteq V(G)$ یک مجموعه غالب گراف G است، هرگاه هر رأس $v\in V(G)$ یا خودش متعلق به S باشد و یا همسایه حداقل یک رأس S باشد. کوچک‌ترین اندازه مجموعه‌های غالب گراف G را عدد غالب G می‌گوییم و آن را با نماد $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم.



شکل (۱): الف) مربع‌های احاطه‌شده ب) پاسخی به مسأله ۸ وزیر

*رایانامه نویسنده مسئول: : alikhani@yazd.ac.ir

خانواده همه γ مجموعه‌های G را با $\Gamma(G)$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین خانواده مجموعه‌های غالب گراف G با اندازه i را با $D(G,i)$ نشان می‌دهیم و $d(G,i)$ را $|D(G,i)|$ تعریف می‌کنیم. برای کسب اطلاعات بیش‌تر در مورد مجموعه‌های غالب و عدد غالب، مرجع [۱] پیشنهاد می‌شود. مفهوم مجموعه‌های غالب در بسیاری از زمینه‌های پژوهشی کاربرد دارد. یکی از این زمینه‌ها مسأله شبکه ارتباطی است. شبکه ارتباطی مجموعه‌ای از گره‌هاست که در آن یک گره با گره دیگر می‌تواند ارتباط برقرار کند، هرگاه این دو گره به طور مستقیم به هم متصل باشند. برای فرستادن یک پیام مستقیم از یک مجموعه گره به گره‌های دیگر، لازم است که این مجموعه به گونه‌ای انتخاب شود که گره‌های دیگر حداقل به یک گره از آن مجموعه متصل باشند. چنین مجموعه‌ای در گراف متناظر با شبکه، مجموعه غالب است. از کاربردهای دیگر مجموعه‌های غالب می‌توان به نقشه‌برداری زمینی، مسیریابی و... اشاره نمود [۲، ۳، ۴، ۵، ۶]. از دیگر انواع اعداد غالب که کاربرد نظامی هم دارد، عدد غالب رومی گراف است. تاریخچه عدد غالب رومی به قرن چهارم میلاد، زمان فرمانروایی کنستانتین، امپراتور روم باستان باز می‌گردد. در آن زمان، کنستانتین برای دفاع از شهرهای قلمرو خود دستوور داد تا هر شهر که فاقد ارتش است، در همسایگی آن شهری با دو ارتش وجود داشته باشد که اگر شهر اول مورد هجوم قرار گرفت، شهر دوم بتواند ارتشی برای دفاع از آن شهر گسیل دارد بدون آن که شهر خود آسیبی ببیند. حال موضوع کمینه کردن تعداد کل ارتش‌ها بود و این چنین عدد غالب رومی گراف‌ها مطرح شد [۱].

پیچیدگی طراحی الگوریتم برای پیداکردن کوچک‌ترین مجموعه‌های غالب در یک گراف منجر به بحث در مورد پیچیدگی محاسباتی و NP- کامل‌بودن این مسأله می‌شود. جانسون(Johnson) اولین کسی بود که نشان داد پیداکردن مجموعه غالب NP- کامل است [۱،۷].

مساله تعداد مجموعه‌های غالب یک گراف برای اولین بار توسط سعید علیخانی در پایان نامه دکتری ایشان مورد توجه قرار گرفت [۸]. وی چندجمله‌ای را معرفی کرد که ضرایبش تعداد مجموعه‌های غالب گراف است و آن‌را چندجمله‌ای غالب نامید. چندجمله‌ای غالب گراف G، $D(G,x)$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D(G,x)=\sum_{i=\gamma(G)}^{|V(G)|} d(G,i)x^{i} \qquad (۱)$$

که در آن، منظور از $d(G,i)$ تعداد مجموعه‌های غالب گراف با اندازه i است [۱۱-۸]. چندجمله‌ای غالب گراف G، $D(G,x)$، تابع مولد تعداد مجموعه‌های غالب آن گراف است. این چندجمله‌ای مشابه چندجمله‌ای‌های دیگر وابسته به گراف مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. به طور کلی، محاسبه چندجمله‌ای غالب یک گراف G به دلیل NP- کامل‌بودن $\gamma(G)$ دشوار است. اما برای خانواده‌های خاص از گراف‌ها می‌توان فرمول صریحی برای چندجمله‌ای غالب به دست آورد. در گراف G ریشه‌های $D(G,x)$ را ریشه‌های غالب G می‌نامند [۹]. مجموعه ریشه‌های مجزای $D(G,x)$ را با $Z(D(G,x))$ نشان می‌دهیم. از آن‌جا که انواع مختلفی از اعداد غالب معرفی شده است، مشابه مساله تعداد مجموعه‌های غالب معمولی، می‌توان مساله تعداد مجموعه‌های غالب از انواع دیگر را مطرح نمود. در این مقاله تعداد مجموعه‌های غالب تام گراف را در نظر می گیریم و تابع مولد این اعداد که چندجمله‌ای غالب تام گراف نامیده شده و به صورت $D_t(G,x)=\sum_{i=\gamma_t(G)}^{n} d_t(G,i)x^{i}$ تعریف می‌شود را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. هم‌چنین نتایجی در مورد ریشه‌های این چندجمله‌ای بیان خواهد شد.

۲- چندجمله‌ای غالب تام برخی گراف‌ها

در این بخش به مطالعه برخی از ویژگی‌های چندجمله‌ای غالب تام برخی از گراف‌ها خواهیم پرداخت. برای مطالعه بیش‌تر در ادامه مقاله از عمل‌های رأسی و یالی زیر برای گراف $G=(V,E)$ استفاده می‌کنیم که به طور مشترک در متن‌های مربوط به نظریه گراف یافت می‌شوند [۱۰، ۱۲ و ۱۳]. فرض کنید $v\in V$ یک رأس و $e=uv$ یک یال گراف G است.

حذف رأس $G-v$**:** نشان‌دهنده گراف به دست آمده از G با حذف رأس v و همه یال‌های واقع بر v است.

انقباض رأس G/v**:** نشان‌دهنده گراف به دست آمده از G با حذف رأس v و افزودن یال بین هر جفت از همسایه‌های غیرمجاور v است. به عبارت دیگر، گراف به دست آمده از G که همه رئوس در $N(v)$ به یک‌دیگر وصل شده‌اند و سپس رأس v حذف شده است.

برداشتن همسایگی بسته رأس $G-N[v]$**:** نشان‌دهنده گراف به دست آمده از G با حذف همه رئوس در همسایگی بسته v و همه یال‌های واقع بر آن‌هاست.

حذف یال $G-e$: نشان‌دهنده گراف به دست آمده از G با حذف یال e است.

انقباض یال G/e: نشان‌دهنده گراف به دست آمده از G با حذف یال e و یکی‌کردن پایانه‌های e برهم است.

تعریف: فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف ساده است. در این صورت زیرمجموعه S از مجموعه v را غالب تام گوییم، هرگاه هر راس u در v همسایه یک راس در S باشد.

کوچک‌ترین اندازه مجموعه‌های غالب تام گراف G را عدد غالب تام می‌گوییم و با $\gamma_t(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف: تعداد مجموعه‌های غالب تام با اندازه i از گراف G را با نماد $d_t(G,i)$، نشان داده و تابع مولد تعداد مجموعه‌های غالب تام گراف G، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_t(G,x)=\sum_{i=\gamma_t(G)}^{n} d_t(G,i)x^i \qquad (۲)$$

که آن‌را چندجمله‌ای غالب تام گراف G می‌نامیم.

قضیه ۱، اساسی‌ترین رابطه‌ای است که برای محاسبه چندجمله‌ای غالب تام گراف بیان شده است.

قضیه ۱: [۱۴]، فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف و $u\in V$ راسی از این گراف است. در این صورت خواهیم داشت:

$$D_t(G,x)=D_t(G-u,x)+xD_t(G/u,x)+x^2\sum_{v\in N(u)} D_t(G-N[\{u,v\}],x)-(1+x)p_u(G,x)$$

که در آن، $p_u(G,x)$ یک چندجمله‌ای است که تعداد مجموعه‌های غالب تام گراف G-u که شامل هیچ همسایه‌ای از u نیستند را می‌شمارد.

قضیه ۲: [۱۴]، الف) فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف و $u,v\in V$رئوسی از گراف G هستند به طوری که $N[v]\subseteq N[u]$ در این صورت رابطه بازگشتی زیر برای چندجمله‌ای غالب تام گراف برقرار است:

$$D_t(G,x)=D_t(G-u,x)+xD_t(G/u,x)+x^2\sum_{w\in N(u)} D_t(G-N[\{u,w\}],x). \qquad (۳)$$

ب) اگر $u,v\in V$ دو رأس نامجاور با شرط $N(v)\subseteq N(u)$ از گراف G باشند. آن‌گاه داریم:

$$D_t(G,x)=D_t(G-u,x)+xD_t(G/u,x)+x^2\sum_{w\in N(u)\cap N(v)} D_t(G-N[\{u,w\}],x). \qquad (۴)$$

با استفاده از روابط بازگشتی موجود در قضیه ۲، می‌توان چندجمله‌ای غالب تام گراف مسیر n رأسی P_n را محاسبه کرد.

قضیه ۳: برای گراف‌های مسیر از مرتبه n≥5 داریم:

$$D_t(P_n,x)=D_t(P_{n-1},x)+x^2D_t(P_{n-3},x)+x^2D_t(P_{n-4},x). \qquad (۵)$$

اثبات: فرض کنید v برگی از گراف مسیر P_n و u همسایه v است. در این صورت بنابه قضیه ۲ داریم:

$$D_t(P_n,x)=D_t(P_n\cup K_1,x)+xD_t(P_{n-1},x)+x^2\sum_{w\in N(u)} D_t(G-N[\{u,w\}],x). \qquad (۶)$$

بنابراین:

$$D_t(P_n,x)=D_t(P_{n-1},x)+x^2D_t(P_{n-3},x)+x^2D_t(P_{n-4},x). \qquad (۷)$$

قضیه ۴: فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف از مرتبه n است. در این صورت خواهیم داشت:

$$D_t(G,x)=\sum_{S\subseteq V}(-1)^{|S|}(x+1)^{n-|N(S)|}. \qquad (۸)$$

اثبات: می‌دانیم که $(x+1)^n$ تابع مولد تعداد زیرمجموعه‌های رئوس G است. از طرف دیگر، برای هر زیرمجموعه $S\subseteq V$، $(x+1)^{n-|N(S)|}$ تابع مولد تعداد زیرمجموعه‌هایی از رئوس G است که هیچ همسایه‌ای در s ندارند. حال با استفاده از اصل شمول- طرد، اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۵ رابطه بین چندجمله‌ای غالب تام یک گراف را با چندجمله‌ای غالب تام مکمل آن گراف، نشان می‌دهد.

قضیه ۵: برای هر گراف G از مرتبه n داریم:

$$D_t(G,x)+x^{n+1}D_t(\overline{G},\frac{1}{x})\geq x(x+1)^{n-1}. \qquad (۹)$$

که در آن، $\overline{G}$ نشان‌دهنده مکمل گراف G است.

اثبات: برای این منظور ضرایب x^k را در دو طرف نامساوی در نظر می‌گیریم. کافی است نشان دهیم:

$$d_t(G,k)+d_t(\overline{G},n-k+1)\geq\binom{n-1}{k-1}. \qquad (۱۰)$$

به ازای انتخاب هر $k-1$ رأس از $n-1$ رأس گراف G سه حالت ممکن است رخ دهد:

۱) این $k-1$ رأس با رأس دیگر گراف یک مجموعه غالب تام از گراف G است، در حقیقت در این حالت به یک مجموعه غالب تام k عضوی رسیده‌ایم که تعداد آن‌ها $d_t(G,k)$ خواهد بود.

۲) $n-k+1$ رأس دیگر، یک مجموعه غالب تام از گراف $\overline{G}$ است که در این صورت تعداد این‌گونه مجموعه‌ها، $d_t(\overline{G},n-k+1)$ خواهد بود.

۳) هر دو حالت رخ دهد.

بنابر اصل جمع حکم برقرار است.

هم‌چنین نتیجه مشابه‌ای را می‌توان برای چندجمله‌ای غالب گراف‌ها بیان نمود.

قضیه ۶: برای هر گراف G از مرتبه n داریم:

$$D(G,x)+x^{n}D(\overline{G},\frac{1}{x})\geq(x+1)^{n}. \qquad (۱۱)$$

که در آن، $\overline{G}$ مکمل گراف G است.

اثبات: مشابه با اثبات قضیه ۵ نشان می‌دهیم:

$$d(G,k)+d(\overline{G},n-k)\geq\binom{n}{k}.$$

برای این منظور به این نکته توجه کنید که به ازای انتخاب هر k رأس از گراف G سه حالت ممکن وجود دارد:

۱) این k رأس یک مجموعه غالب از گراف G است.

۲) $n-k$ رأس دیگر یک مجموعه غالب از گراف $\overline{G}$ است.

۳) حالت ۱ و ۲ با هم رخ دهند.

در نتیجه، حکم حاصل می‌شود.

توجه کنید که نامساوی قضیه ۶ دقیق است. به عنوان مثال، تساوی برای گراف‌های کامل رخ می‌دهد.

اگر در چندجمله‌ای غالب و یا غالب تام گراف به جای x مقدار ۱ را قرار دهیم تعداد کل مجموعه‌های غالب و یا غالب تام گراف به دست می‌آیند. از قضیه ۵ و ۶ نیز با قراردادن x=1 نتیجه زیر به دست می آید:

نتیجه ۷: الف) برای هر گراف G از مرتبه n داریم:

$$D_t(G,1)+D_t(\overline{G},1)\geq 2^{n-1}. \qquad (۱۲)$$

ب) برای هر گراف G از مرتبه n داریم:

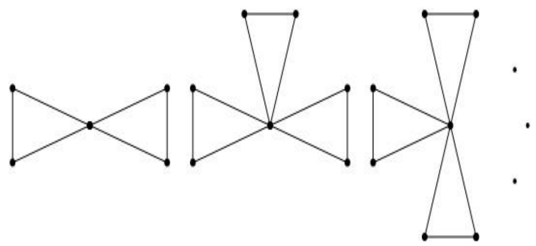
$$D(G,1)+D(\overline{G},1)\geq 2^{n}. \qquad (۱۳)$$

۲-۱- ریشه‌های چندجمله‌ای غالب تام برخی از گراف‌ها

ریشه‌های چندجمله‌ای‌های یک گراف منعکس‌کننده برخی اطلاعات مهم در مورد گراف هستند. در این بخش، ابتدا به محاسبه چندجمله‌ای غالب تام برخی از گراف‌ها و سپس به بررسی ریشه‌های آن‌ها می‌پردازیم. برای این منظور به تعاریف و قضایای زیر توجه کنید:

تعریف: در گراف G ریشه‌های چندجمله‌ای غالب تام گراف G، $D_t(G,x)$ را ریشه‌های غالب تام G می‌نامیم و مجموعه ریشه‌های مجزای $D_t(G,x)$ را با $Z(D_t(G,x))$ نشان می‌دهیم.

گرافی که از به هم پیوستن n نسخه از گراف دور C_3 با یک رأس مشترک ساخته می‌شود را گراف دوستانه (friendship) یا آسیاب بادی هلندی نامیده و آن را با نماد F_n نشان می دهیم. در شکل (۲) گراف‌های دوستانه F_2، F_3، F_4 و F_n را مشاهده می‌کنید.

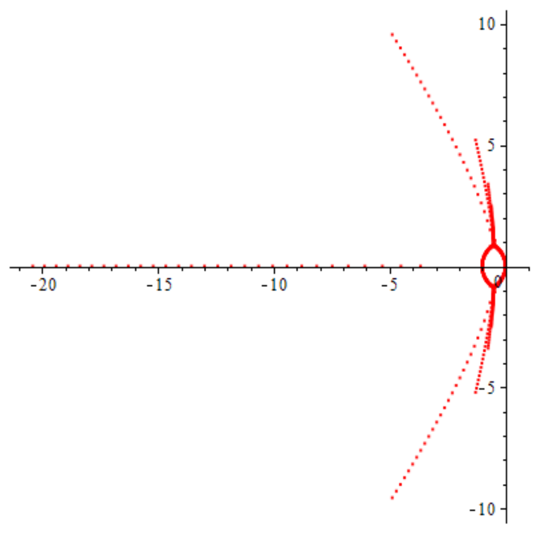


شکل (۲): گراف‌های دوستانه از چپ F_2، F_3 و F_n.

قضیه ۸: [۱۵] برای هر عدد طبیعی n، داریم:

$$D_t(F_n,x)=x(x+1)^{2n}+x^{2n}-x. \qquad (۱۴)$$

قضیه ۹: [۱۵] برای اعداد طبیعی به قدر کافی بزرگ n، گراف دوستانه F_n یک ریشه غالب تام حقیقی در بازه $(-n,-\ln(n))$ دارد.



شکل (۳): ریشه های غالب تام گراف دوستانه F_n برای $2\leq n\leq 30$

قضیه ۹ نشان می‌دهد که از لحاظ قدرمطلقی ریشه‌های غالب تام به اندازه کافی می‌توانند بزرگ شود. برای مطالعه بیش‌تر چندجمله‌ای‌های غالب تام و ریشه‌های آن مطالعه برخی از یال‌ها مفید خواهند بود. در این‌جا برخی از این گونه یال‌ها را مطالعه خواهیم کرد.

تعریف: یال $e\in E$ از گراف $G=(V,E)$ را یک یال بی‌اثر یا بی‌ربط برای چندجمله‌ای غالب تام می‌نامیم، هرگاه:

.$D_t(G,x)=D_t(G-e,x)$

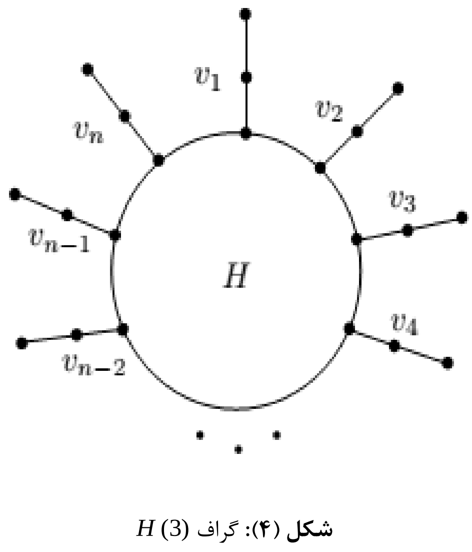
یال‌های بی اثر کار ما را در به دست آوردن چندجمله‌ای غالب تام برخی گراف‌ها ساده می‌کنند. قضیه ۱۰ شرطی کافی برای بی‌اثربودن یک یال از گراف G در چندجمله‌ای‌های غالب تام گراف است.

قضیه ۱۰: فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف و $e=\{u,v\}\in E$ یالی از گراف G است. در این صورت اگر u و v با رئوس تکیه‌گاهی مجاور باشند، آن‌گاه یال e یک یال بی‌اثر از گراف G است. (هر راس مجاور با رئوس درجه یک را رأس تکیه‌گاه می‌نامیم).

اثبات: فرض کنید $e=\{u,v\}\in E$ یالی از گراف G، u و v به ترتیب با رئوس تکیه‌گاه w_1 و w_2 مجاورند. در این صورت هر زیرمجموعه غالب تام از گراف G شامل رئوس w_1و w_2 است و در نتیجه رئوس واقع بر یال e، تحت هر مجموعه غالب دلخواه توسط رئوس w_1و w_2 پوشش داده می‌شوند و در نتیجه مجاورت بین u و v بی‌اثر است. بنابراین $D_t(G,x)=D_t(G-e,x)$ و یال e یالی بی‌اثر است.

در این قسمت، با استفاده از قضیه ۱۰، چندجمله‌ای غالب تام برخی از خانواده‌های گراف‌ها را محاسبه می‌کنیم.

تعریف: برای هر گراف دلخواه H از مرتبه n، گراف $H(3)$، گراف حاصل از چسباندن راس پایانی یک گراف مسیر P_3 به هر رأس گراف H است.



شکل (۴): گراف $H(3)$

قضیه ۱۱: برای هر گراف دلخواه H از مرتبه n، داریم:

$$D_t(H(3),x)=x^{2n}(x+2)^n. \qquad (۱۵)$$

اثبات: با توجه به قضیه ۱۰ و ساختار گراف $H(3)$، هر یال گراف H یک یال بی‌اثر است، زیرا رئوس گراف H با رئوس تکیه‌گاه v_i مجاورند (شکل ۴)، بنابراین داریم:

$$D_t(H(3),x)=(D_t(P_3,x))^n. \qquad (۱۶)$$

با توجه به این‌که $D_t(P_3,x)=x^3+2x^2$ حکم برقرار است

حال به معرفی خانواده دیگری از گراف‌ها و محاسبه چندجمله‌ای غالب تام آن‌ها می‌پردازیم.

تعریف: یک (n,k)- ترقه، $f(n,k)$، گراف حاصل از لینک یک برگ از n عدد ستاره S_k با هم است (شکل ۵).

قضیه ۱۲: برای اعداد طبیعی n و $k\geq 3$ داریم:

$$D_t(f(n,k),x)=(x(x+1)^{k-1}-x)^n. \qquad (۱۷)$$

اثبات: تمام رئوس گراف $f(n,k)$، ($k\geq 3$) که با هم لینک شده‌اند با رأس مرکزی گراف‌های ستاره مجاورند که رئوس تکیه‌گاه هستند و در نتیجه بنابه قضیه ۱۰ یال‌های بین آن‌ها بی‌اثر است و داریم:

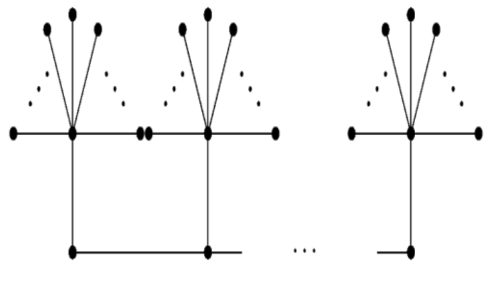
$$D_t(f(n,k),x)=(D_t(S_k,x))^n. \qquad (۱۸)$$

از طرفی داریم:

$$D_t(S_k,x)=x(x+1)^{k-1}-x$$

و لذا نتیجه حاصل می‌شود.

نتیجه: ریشه‌های غالب تام این خانواده از گراف‌ها ($f(n,k)$ ها برای $k\geq 3$) بر دایره‌ای به شعاع 1 و مرکز $(-1,0)$ واقع شده است.



شکل (۵): گراف (n,k)- ترقه، $f(n,k)$

۵- مراجع

[1] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, "Fundamentals of domination in graphs," Marcel Dekker, Inc., NewYork, 1998.

[2] S. Parsa, H. Saifi, M. H. Alaeian, "Providing a New Approach to Discovering Malware Behavioral Patterns Based on the Dependency Graph Between System Calls," J. Elect. & Cyber Defence, vol. 4, no. 3, pp. 47-60, 2016.

[3] J. N. Hooker, R. S. Garfinkel, and C. K. Chen, "Finite dominating sets for network location problems," Oper. Res., vol. 39, no. 1, pp. 100–118, 1991.

[4] L. L. Kelleher, "Domination in graphs and its application," to Social Network Theory, Ph.D. thesis, Northeastern University, 1985.

[5] L. L. Kelleher and M. B. Cozzens, "Dominating sets in social network graphs," Math. Social Sci., vol. 16, no. 3, pp. 267–279, 1988.

[6] P. J. Slater, "Maximin facility location," J. Res. Nat. Bur., Standards B 79, pp. 107–115, 1975.

[7] M. R. Garey and D. S. Johnson, "Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness," Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 3, vol. 2, pp. 898–904, 1980.

[8] S. Alikhani, "Dominating sets and domination polynomials of graphs," Ph.D. Thesis, University Putra Malaysia, March 2009.

[9] S. Akbari, S. Alikhani, and Y. H. Peng, "Characterization of graphs using domination polynomial," European J. Combin., vol. 31, no. 7, pp. 1714–1724, 2010.

[10] S. Alikhani, "Dominating sets and domination polynomials of graphs: Domination polynomial: A new graph polynomial," LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012.

[11] S. Alikhani, and Y. H. Peng, "Introduction to domination polynomial of a graph", Ars Comb., vol. 114, pp. 257-266, 2014.

[12] T. Kotek, J. Preen, F. Simon, P. Tittmann, and M. Trinks, "Recurrence relations and splitting formulas for the domination polynomial," Electronic J. Combin., vol. 19, no. 3, p. 27, 2012.

[13] M. Walsh, "The hub number of a graph," Int. J. Math. Comput. Sci., vol. 1, no. 1, pp. 117–124, 2006.

[14] M. Dod, "The total domination polynomial and its generalization," Congr. Numer. 219, pp. 207-226, 2014.

[15] S. Alikhani and N. Jafari, "On the roots of total domination polynomial of graphs," submitted, Available at http://arxiv.org/abs/1605.02222.

[16] S. Alikhani and N. Jafari, "Total domination polynomial of graphs from primary subgraphs," submitted, Available at https://arxiv.org/abs/1609.07789.