مجله علمی- پژوهشی "پدافند الکترونیکی و سایبری"

ویژه‌نامه کنفرانس بین‌المللی ترکیبیات، رمزنگاری و محاسبات، ص ۸۹ -۸۵

رابطه امکان کنترل یک اختلال در سامانه و جواب ویسکوزیته یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی

سمیه سعیدی نژاد *

۱- استادیار، دانشگاه علم و صنعت ایران

(دریافت: ۹۵/۰۷/۰۵، پذیرش: ۹۶/۰۳/۰۶)

چکیده

در این مقاله ابتدا مقدمه‌ای از ارتباط مسائلی که امکان کنترل اختلال در آن‌ها و حفظ سامانه در یک فضای امن، می‌تواند به عنوان یک مدل ریاضی ارائه شده و ارتباط آنالیز امنیت سامانه با نوع خاصی از معادلات دیفرانسیل بیان می‌شود. سپس با جزئیات دقیق‌تر از یک مدل یک بعدی به ارتباط مجموعه انتخاب‌هایی که منجر به امنیت سامانه با آنالیز جواب‌های ویسکوزیته معادله‌ای خاص از نوع همیلتون- ژاکوبی دارد؛ می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: نظریه دیفرانسیلی بازی‌ها، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادله دیفرانسیل همیلتون- ژاکوبی، جواب ویسکوزیته.

۱- مقدمه

نظریه بازی‌ها[1] حوزه‌ای از ریاضیات است که به مطالعه بهترین رفتار در قالب محدودیت‌های موجود در یک سامانه می‌پردازد. این رفتار زمانی اهمیت می‌یابد که انتخاب‌ها و رفتارهای خارج از پیش‌بینی سایرین، بتواند خروجی سامانه را تغییر دهد. این گویش از مسئله را می‌توان در بسیاری از مسائل کاربردی در اقتصاد، مسائل کنترل در مهندسی مکانیک و برق و هم‌چنین در برنامه‌ریزی غیرخطی مسائل مختلفی از شاخه‌های مختلف مهندسی صنایع و الگوریتم‌های برخط[2] که از جمله در بازی‌ها، سامانه های امنیتی و ... کاربرد دارند مطرح نمود. به عنوان مثال مقالات [۷-۱] را می‌توان به عنوان مسائلی مختلفی که در این قالب مطرح می‌شوند، معرفی نمود. هم‌چنین جهت اطلاع دقیق‌تر از نظریه بازی‌ها در سیستم‌های دینامیکی که به دنبال تعیین مسیری برای دریافت نتیجه مطلوب با لحاظ‌کردن تصمیمات، اختلالات و یا اقدامات سایرین در سامانه که مثلاً در حوزه‌های امنیتی این دخالت‌ها می‌تواند شامل حمله‌های هکر نیز باشد؛ به مرجع [۸] ارجاع می‌دهیم.

در ابتدا برای ورود دقیق‌تر به بحث، کلیت مسئله امنیتی الکترونیک مطرح‌شده در مرجع [۲] را به صورت عمومی زیر مطرح می کنیم. فرض کنید تراکنش پویای بین سیگنال رفت و برگشت در یک دستگاه کنترل هوشمند منتج به مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل شده باشد که در آن سیگنال‌های ورودی از یک هکر یا خطاهای سیستمی و بنابراین تمهیدات کنترلی برنامه‌ریز را هم با پارامترهایی لحاظ کرده باشیم. مجموعه معادلات مورد بحث را به صورت دستگاه معادله‌ای به فرم $\frac{dX}{dt}=f(X,u)$ است که در آن t معرف زمان، $X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ که $X(t)=(X_1(t),\dots,X_n(t))$، $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ که $u(t)=(u_1(t),\dots,u_m(t))$ و $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ نگاشتی معلوم می‌باشد. در این مدل مولفه‌های X_i ناظر به کمیت‌هایی است که در یک عملکرد مطلوب از سامانه در دامنه قابل قبولی که به آن فضای امن[3] سامانه می‌گوییم، تغییر می‌کند و u_i ها مربوط به انواع سیگنال‌های خارج از پیش‌بینی از سوی محیط یا هکرها و یا موارد کنترلی برنامه‌ریز است. اگر برای دستگاه معادلاتی $\frac{dX}{dt}=f(X,u)$ به ازای $x_0\in\mathbb{R}^n$ شرط اولیه $X(0)=x_0$ در نظر گرفته شده باشد که نشان‌دهنده وضعیت سیگنال‌ها در زمان راه‌اندازی سامانه است، مسئله امکان کنترل این‌گونه مطرح می‌شود که انتخاب این شرط اولیه در این که جواب دستگاه معادله در لحظات بعدی علی‌رغم مولفه‌های تابع u همواره در فضای امن قرار گیرد، چقدر است؟ آیا می‌توان شرط اولیه را در لحظه راه‌اندازی و یا حتی در لحظات بعدی به گونه‌ای انتخاب نمود در لحظات پس از آن جواب سامانه در فضای امن جواب ها قرار

* رایانامه نویسنده مسئول: : Ssaiedinezhad@iust.ac.ir

1- Game theory
2- Online algorithm
3- Safe set

گیرد؟

تعبیر شهودی امکان کنترل و قرارگرفتن جواب دستگاه معادلاتی در فضای امن مورد نظر، در مسائل مختلف، متفاوت است. به طور مثال، اگر مسئله مطرح‌شده در مقاله [۴] را در نظر بگیریم که نیروهای واردشده بر چگالی جرم نقطه‌ای یک هواپیما است که مولفه‌های X_i مطرح شده در آن معرف ارتفاع و سرعت هواپیما است و مولفه‌های u_i شامل سرعت باد، زوایای هواپیما نسبت به زمین و جهت باد و تکانه موتور و ... است و مسئله امکان کنترل یعنی سرعت اولیه و ارتفاع مطلوب اولیه به گونه‌ای باشند که با کنترل مولفه‌هایی از u که امکان کنترل دارد، در تمام لحظات، پس از تثبیت نسبی ارتفاع هواپیما، علی‌رغم تاثیر نیروهای غیرقابل کنترل نظیر باد و جاذبه بر هواپیما، هواپیما با سرعت و ارتفاع متغیر در یک دامنه امن حرکت کند.

۲- مدل ریاضی

جهت امکان ادامه بحث از منظر ریاضی، تعاریف، مفروضات و محدودیت های دستگاه معادله با مشتقات جزئی از مرتبه اول $\frac{dX}{dt} = f(X, u)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

۱) به ازای یک $T > 0$ ، $t \in [0, T]$

۲) $X = X(t): [0, T] \to \mathbb{R}^n \,; (n \geq 1)$

۳) $f = f(X, u): \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ تابعی با خاصیت لیپشیتس[۱] نسبت به مولفه اول و پیوسته نسبت به مولفه دوم خود است که در آن U زیر مجموعه فشرده‌ای از $\mathbb{R}^m$ است که $m \geq 1$.

۴) K زیرمجموعه فشرده‌ای از $\mathbb{R}^n$ است که از آن با عنوان فضای امن جواب‌ها یاد می‌کنیم.

۵) $\mathfrak{U}_{[t,T]}$ خانواده تمام توابع لبگ انتگرال‌پذیر[۲] از بازه $[t, T]$ به U می باشد.

حال دستگاه معادله مرتبه اول زیر که وابسته به زمان اولیه t، تابع جواب اولیه x_t و تابع u است به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$P(t, x_t, u): \begin{Bmatrix} \frac{dX(s)}{ds} = f\big(X(s), u(s)\big); \\ X(t) = x_t \end{Bmatrix} \qquad (۱)$$

با توجه به فرض (۳) از مبانی نظریه معادلات دیفرانسیل می‌دانیم به ازای هر $(t, x, u) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathfrak{U}_{[t,T]}$ مسئله $P(t, x, u)$ دارای جواب منحصر به فردی چون، $X_{t,x,u} = X_{t,x,u}(s)$ است. لذا مجموعه شرایط اولیه‌ای را که مسئله $P(t, x, u)$ را غیرقابل آسیب‌پذیر می‌کنند (یعنی از لحظه t به بعد جواب‌ها در هر لحظه در فضای امن K قرار می‌گیرند)؛ با عنوان مجموعه $Inv(t, K)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$Inv(t, K) := \begin{Bmatrix} x \in \mathbb{R}^n;\ \forall u \in \mathfrak{U}_{[t,T]}, \forall s \geq t \\ : X_{t,x,u}(s) \in K \end{Bmatrix} \qquad (۲)$$

واضح است که اگر $t_1 < t_2$ آن‌گاه $Inv(t_1, K) \subseteq Inv(t_2, K)$ پس به ازای هر $t > 0$، $Inv(0, K) \subseteq Inv(t, K)$. به همین دلیل، در آنالیز کنترل صرفاً به محاسبه $Inv(0, K)$ اکتفا نمی‌کنند؛ چرا که با گذشت زمان انتظار می‌رود دامنه شرایط اولیه غیرقابل آسیب‌پذیر افزایش یابد و البته در بسیاری از موارد این توسعه از لحظاتی به بعد متوقف یا کند می‌شود.

لم ۲-۱: گزاره منطقی $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K$ که در آن $K := [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ را می‌توان با تعریف تابع $l_K(x) = \min_{1 \leq i \leq n} \min\{x_i - a_i, b_i - x_i\}$ به صورت زیر بیان کرد:

$$x \in K \Leftrightarrow l_K(x) \geq 0 \qquad (۳)$$

تبصره ۲-۲: اگر بخواهیم تابع l_K تعریف‌شده در لم قبل کراندار باشد، می‌توان از یک جایی به بعد، در اطراف K تابع را به شکل پیوسته ثابت گرفت.

صورت کلی‌تر لم ۲-۱ را که در آن K لزوماً یک حجره n بعدی نباشد، صورت زیر بیان می‌شود.

لم ۲-۳: گزاره منطقی $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K$ که در آن $K \subset \mathbb{R}^n$ را می‌توان با تعریف تابع:

$$l_K(x) = -dist(x, K) = -\inf(|x - y|; y \in K\}$$

به صورت زیر بیان کرد:

$$x \in K \Leftrightarrow l_K(x) \geq 0 \qquad (۴)$$

نتیجه ۲-۴: نتیجه به صورت زیر خواهد بود:

$$Inv(t, K) := \begin{Bmatrix} x \in \mathbb{R}^n;\ \forall u \in \mathfrak{U}_{[t,T]}, \forall s \geq t: \\ l(X_{t,x,u}(s)) \geq 0 \end{Bmatrix} \qquad (۵)$$

با توجه به نتیجه ۲-۴ و تعریف $V_K(x, t)$ قضیه زیر روشن است.

قضیه ۲-۵: اگر

$V_K(x, t) := \inf_{u(.) \in \mathfrak{U}_{[t,T]}} \inf_{s \in [t,T]} l_K(X_{t,x,u}(s))$ آن‌گاه $Inv(t, K) := \{x \in \mathbb{R}^n;\ V_K(x, t) \geq 0\}$

۳- ارتباط با نوع خاصی از معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی

در ادامه به‌شکل غافل‌گیرکننده‌ای تابع V_K را به صورت جواب‌های خاصی از یک معادله دیفرانسیل که به آن جواب ویسکوزیته می‌گویند؛ معرفی می‌کنیم. به منظور ورود به این بحث تعاریف و قضایای مقدماتی آن‌را بیان می‌کنیم.

1- Lipschitz
2- Lebesgue integrable

تعریف ۳-۱: تابع کراندار و پیوسته یک‌نواخت u را یک جواب ویسکوزیته از معادله با شرط اولیه:

$$\mathfrak{p}_0:\begin{Bmatrix} u_t(x,t)+H(\nabla u,x)=0; & (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,+\infty) \\ u(x,0)=g(x); & x\in\mathbb{R}^n \end{Bmatrix} \quad (۶)$$

که در آن، $H:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ و $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ توابعی معلوم هستند، می‌نامیم هرگاه موارد (الف– ج) در زیر درست باشد:

(الف) تابع u شرط اولیه معادله را برقرار سازد، یعنی به ازای هر $x\in\mathbb{R}^n$ ؛ $u(x,0)=g(x)$.

(ب) به ازای هر تابع هموار $v\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$، اگر $u-v$ دارای بیشینه موضعی در نقطه $(x_0,t_0)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ است، آن‌گاه:

$$v_t(x_0,t_0)+H(\nabla v(x_0,t_0),x_0)\le 0 \quad (۷)$$

ج) به ازای هر تابع هموار $v\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$ اگر $u-v$ دارای کمینه موضعی در نقطه $(x_0,t_0)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ است، آن‌گاه:

$$v_t(x_0,t_0)+H(\nabla v(x_0,t_0),x_0)\ge 0 \quad (۸)$$

تبصره ۳-۲: بدیهی است که هر تابع جواب از معادله $\mathfrak{p}_0$ به این معنی که معادله را برقرار ساخته و کراندار و پیوسته یک‌نواخت باشد، یک جواب وسکوزیته از معادله است و بنابراین تعریف جواب ویسکوزیته تعریفی ضعیف‌تر از جواب کلاسیک و حتی جواب ضعیف معادله $\mathfrak{p}_0$ است. در این خصوص برای کسب جزئیات بیش‌تر، به [۹-۱۱] ارجاع می‌دهیم.

تبصره ۳-۳: اگر مسئله با شرط انتهایی بیان شده باشد یعنی مسئله $\mathfrak{p}_T$ به جای مسئله $\mathfrak{p}_0$ به صورت زیر مطرح باشد:

$$\mathfrak{p}_T:\begin{Bmatrix} u_t(x,t)+H(\nabla u,x)=0; & (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,T) \\ u(x,T)=g(x); & x\in\mathbb{R}^n \end{Bmatrix}. \quad (۹)$$

آن‌گاه از آن‌جایی که u جواب ویسکوزیته معادله $\mathfrak{p}_T$ است اگر و فقط اگر $w(x,t):=u(x,T-t)$ جواب ویسکوزیته معادله با شرط اولیه،

(۱۰)

$$\begin{Bmatrix} w_t(x,t)-H(\nabla w,x)=0; & (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,T) \\ w(x,0)=g(x); & x\in\mathbb{R}^n \end{Bmatrix}$$

باشد؛ پس در قسمت‌های (ب) و (ج) در تعاریف جواب ویسکوزیته نظیر معادله با شرط انتهایی $\mathfrak{p}_T$ جهت‌های نامساوی‌های موجود در بندهای (ب) و (ج) معکوس می‌گردد.

قضیه۳-۴: فرض کنید مفروضات ۵-۱ برقرار باشند؛ اگر $V=V_K(x,t)$ مطابق با تعریف ارائه‌شده در قضیه ۱-۱ باشد، آن‌گاه V جواب ویسکوزیته منحصر به فرد مسئله با شرط انتهایی زیر است:

(۱۱)

$$\begin{Bmatrix} v_t(x,t)+\min\{0,\inf_{u\in U}v_x(x,t).f(x,u)\}=0; \\ \qquad\qquad\qquad (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,T) \\ V(x,T)=l_K(x); \qquad x\in\mathbb{R}^n \end{Bmatrix}.$$

قضیه فوق را در مورد یک حالت خاص و ساده از مسئله کنترل امنیت دستگاه خطی که در بخش بعدی بیان می‌شود، ادامه می‌دهیم.

۴- آنالیز یک مسئله یک بعدی

مسئله یک بعدی زیر در نظر بگیرید:

$$p_{t,x,u}:\begin{Bmatrix} \frac{dX}{ds}=u(s); \quad s\in[t,T] \\ X(t)=x \end{Bmatrix} \quad (۱۲)$$

در این مسئله فرض کنید $U=[a,b]$ و $K=[c,d]$ که $a,b>0$. واضح است که مسئله $p_{t,x,u}$ دارای جواب منحصر به فرد $X_{t,x,u}(s)$ است که در واقع $X_{t,x,u}(s)=x+\int_t^s u(s)ds$. بنابراین داریم:

(۱۳)

$$l_K(X_{t,x,u}(s)=\min\{x+\int_t^s u(r)ds-c,d-x-\int_t^s u(r)dr\}$$

$$=\frac{d-c-\left|d+c-2\left(x+\int_t^s u(r)dr\right)\right|}{2}:=\frac{d-c}{2}-|A_x-B_t(s,u)|.$$

که در آن، $A_x=\frac{d+c-2x}{2}$ و $B_t(s,u)=\int_t^s u(r)dr$. واضح است که به ازای هر $u\in\mathfrak{U}_{[t,T]}$، $0\le B_t(s,u)\le\int_t^T u(r)dr.$

بنابراین داریم:

(۱۴)

$$\mathrm{Sup}_{s\in[t,T]}|A_x-B_t(s,u)|= \begin{Bmatrix} \int_t^T u(r)dr-A_x; & \int_t^T u(r)dr\ge 2A_x \\ A_x; & \int_t^T u(r)dr<2A_x \end{Bmatrix},$$

و لذا داریم:

$$\inf_{s\in[t,T]} l_K(X_{t,x,u}(s)) = \begin{cases} \dfrac{d-c}{2} + A_x - \displaystyle\int_t^T u(r)dr\,; & \displaystyle\int_t^T u(r)dr \geq 2A_x \\ \dfrac{d-c}{2} - A_x; & \displaystyle\int_t^T u(r)dr < 2A_x \end{cases}; \quad (۱۵)$$

به ازای x و t معلوم، قرار می دهیم:

$$\Gamma := \{u \in \mathfrak{U}_{[t,T]}; \int_t^T u(r)dr \ \geq 2A_x\} \text{ و } \Sigma := \mathfrak{U}_{[t,T]} \setminus \Gamma \quad (۱۶)$$

از آن‌جا که به ازای هر $r \in [t,T]$، $u(r) \in [a,b]$؛ واضح است اگر $a(T-t) \geq 2A_x$ آن‌گاه $= \mathfrak{U}_{[t,T]}$ و اگر $b(T-t) \leq 2A_x$ آن‌گاه $\Sigma = \mathfrak{U}_{[t,T]}$ و در غیر این دو صورت $\Sigma, \Gamma \neq \emptyset$؛ لذا $u(r) \equiv a \in \Sigma$ و $u(r) \equiv b \in \Gamma$. بنابراین داریم:

(۱۷)

$$V_K(x,t) := \inf_{u(.)\in\mathfrak{U}_{[t,T]}} \inf_{s\in[t,T]} l_K(X_{t,x,u}(s)) =$$

$$\min\left\{\inf_{u(.)\in\Gamma} \inf_{s\in[t,T]} l_K(X_{t,x,u}(s)), \inf_{u(.)\in\Gamma} \inf_{s\in[t,T]} l_K(X_{t,x,u}(s))\right)$$
$$= \min\left\{\frac{d-c}{2} + A_x - b(T-t), \frac{d-c}{2} - A_x\right\}$$
$$= \min\{d - x - b(T-t), x - c\}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود:

$$V_K(x,T) = l_K(x) = \min\{d-x, x-c\} \quad (۱۸)$$

حال تحقق شرایط (ب) و (ج) در تعریف ۳-۱ را برای تابع $V = V_K(x,t)$ بررسی می‌کنیم.

اگر $v - w$ در نقطه (x_0, t_0) دارای بیشینه موضعی باشد، پس به ازای (x,t)های به اندازه کافی نزدیک به (x_0,t_0) (مثلاً به ازای یک $\delta_1 > 0$ و (x,t)هایی که $(x-x_0)^2 + (t-t_0)^2 < \delta_1$) داریم:

$$v(x_0,t_0) - w(x_0,t_0) \geq v(x,t) - w(x,t) \quad (۱۹)$$

بنابراین داریم:

$$v(x,t) - v(x_0,t_0) \leq w(x,t) - w(x_0,t_0). \quad (۲۰)$$

فرض کنید به ازای یک $\theta > 0$ داشته باشیم:

$$w_t(x_0,t_0) + \min\left\{0, \inf_{u\in[a,b]} w_x(x_0,t_0)\, u\right\} \leq -\theta; \quad (۲۱)$$

در این صورت اگر $\inf_{u\in[a,b]} w_x(x_0,t_0)\, u < 0$ داریم:

$$w_t(x_0,t_0) + \inf_{u\in[a,b]} w_x(x_0,t_0)\, u \leq -\theta, \quad (۲۲)$$

که اگر $w_x(x_0,t_0) < 0$ آن‌گاه:

$$w_t(x_0,t_0) + bw_x(x_0,t_0) \ \leq -\theta, \quad (۲۳)$$

و اگر $w_x(x_0,t_0) \geq 0$ آن‌گاه:

$$w_t(x_0,t_0) + aw_x(x_0,t_0) \ \leq -\theta \quad (۲۴)$$

بدون این‌که به کلیت استدلال خللی وارد آید، نامساوی (۲۳) را درنظر می‌گیریم.

از آن‌جایی که تابع w هموار است، نامساوی (۲۳) در یک همسایگی به قدر کافی کوچک از (x_0,t_0) نیز برقرار است و لذا $\delta_1 > \delta_2$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که اگر $(x-x_0)^2 + (t-t_0)^2 < \delta_2$ داشته باشیم:

$$w_t(x,t) + bw_x(x,t) \leq -\theta \quad (۲۵)$$

حال تابع پیوسته یک‌نواخت $X_{t_0,x_0,b}(s)$ را درنظر بگیرید که داریم: $\lim_{t\to t_0} X_{t_0,x_0,b}(t) = x_0$ پس به ازای tهای به قدر کافی نزدیک به t_0 داریم:

$$(X_{t_0,x_0,b}(t) - x_0)^2 + (t-t_0)^2 < \delta_2 \quad (۲۶)$$

و لذا:

$$w_t\big(X_{t_0,x_0,b}(t), t\big) + bw_x\big(X_{t_0,x_0,b}(t), t\big) \leq -\theta \quad (۲۷)$$

با توجه به رابطه (20) داریم:

$$\begin{aligned} &v\big(X_{t_0,x_0,b}(t_0+h), t_0+h\big) - v(x_0,t_0) \\ &\qquad \leq w\big(X_{t_0,x_0,b}(t_0+h), t_0+h\big) - w(x_0,t_0) \\ &\qquad = \int_{t_0}^{t_0+h} \frac{dw(X_{t_0,x_0,b}(t),t)}{dt} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+h} w_t\big(X_{t_0,x_0,b}(t), t\big) + bw_x\big(X_{t_0,x_0,b}(t), t\big)\, dt \\ &\leq -\theta\, h. \end{aligned}$$

(۲۸)

از طرفی داریم:

(۲۹)

$$\begin{aligned} &v(x_0,t_0) = \min\{d - x_0 - b(T-t_0), x_0 - c\} = \\ &\min\{d - x_0 - b(T-(t_0+h)) - b((t_0+h)-t_0), x_0 - \\ &c\} \\ &\leq \min\{d - x_0 - bh - b(T-(t_0+h)), x_0 + bh - c\} \\ &= v\big(X_{t_0,x_0,b}(t_0+h), t_0+h\big) \end{aligned}$$

که با رابطه (۲۸) در تناقض است بنابراین در این مرحله ثابت می‌شود:

$$w_t(x_0,t_0) + \min\left\{0, \inf_{u\in[a,b]} w_x(x_0,t_0)\, u\right\} \geq 0 \quad (۳۰)$$

تا این‌جا تحقق شرط (ب) را با فرض:

$$\inf_{u\in[a,b]} w_x(x_0,t_0)\, u < 0 \quad (۳۱)$$

ثابت کرده‌ایم. اما اگر $\inf_{u\in[a,b]} w_x(x_0,t_0)\, u > 0$ و (23) برقرار باشد خواهیم داشت: $w_t(x_0,t_0) \le -\theta$. لذا به ازای مقادیر به قدر کافی کوچک $h > 0$،

$$w_t(x_0, t_0 + h) \le -\theta \qquad (۳۲)$$

بنابراین با توجه به (20) داریم:

(۳۳)

$$v(x_0, t_0 + h) - v(x_0, t_0) \le w(x_0, t_0 + h) - w(x_0, t_0) = \int_{t_0}^{t_0+h} \frac{dw(x_0,t)}{dt}\, dt \le -\theta\, h.$$

از طرفی با توجه به تعریف $v(x,t)$، واضح است که تابع v نسبت به t صعودی است که با (33) در تناقض است. بنابراین اثبات تحقق شرط (ب) از تعریف 3-1 در این مرحله به اتمام می‌رسد.

به طریق مشابه می‌توان تحقق شرط (ج) را بررسی کـرد کـه به جهت اختصار از ارائه اثبات آن چشم‌پوشی می‌کنیم.

۵- نتیجه‌گیری

بسیاری از مسائلی که در قالب یک مسئله کنترل مطرح می‌شوند، اگر توابع درگیر در رفتار دینامیک آن‌ها توابعی خوش‌رفتار باشند، مسئله امکان کنترل اختلال در سامانه آن‌ها را می‌توان با آنالیز نوع خاصی از جواب‌های معادله‌ای از نوع همیلتون- ژاکوبی[1] با شرط اولیه یا شرط انتهایی که به معادله و فضای امن آن نظیر می‌شود؛ بررسی نمود. یافتن مجموعه شرایط اولیه امن برای سامانه در مدل‌هایی با ابعاد بالا و دستگاه‌های غیرخطی بسیار سخت و دشوار است که در این صورت کارکرد معادلات دیفرانسیل که در قالب قضیه 3-4 در این مقاله مطرح شد، مشهود خواهد بود.

۶- مراجع

[1] P. Cardaliaguet, “A differential game with two players and one target,” SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 34, no. 4, pp. 1441-1460, 1996.

[2] Esfahani, P. Mohajerin, et al., “Cyber attack in a two-area power system: Impact identification using reachability,” American Control Conference (ACC), 2010. IEEE, 2010.

[3] E. C. Lawrence, “Graduate studies in mathematics,” Partial differential equations, vol. 19, 1998.

[4] T. L. Friesz, “Dynamic optimization and differential games,” vol. 135, Springer Science & Business Media, 2010.

[5] J. Lygeros, “On reachability and minimum cost optimal control,” Automatica, vol. 40, no. 6, pp. 917-927, 2004.

[6] S.-Y. Mu and Q. Zhu, “Power distribution algorithm based on game theory in the femtocell system,” The Journal of China Universities of Posts and Telecommunications, vol. 20, no. 2, pp. 42-47, 2013.

[7] R. S. Sharma and S. Bhattacharya, “Knowledge dilemmas within organizations: Resolutions from game theory,” Knowledge-Based Systems, vol. 45, pp. 100-113, 2013.

[8] E. C. Lawrence, and P. E. Souganidis, “Differential Games and Representation Formulas for Solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs Equations,” no. Mrc-Tsr-2492. Wisconsin Univ-Madison Mathematics Research Center, 1983.

[9] M. G. Crandall, C. E. Lawrence, and P.-L. Lions, “Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations,” Transactions of the American Mathematical Society, vol. 282, no. 2, pp. 487-502, 1984.

[10] M. G. Crandall and P.-L. Lions, “Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations,” Transactions of the American Mathematical Society, vol. 277, no. 1, pp. 1-42, 1983.

[11] 11- E. C. Lawrence, “Graduate studies in mathematics,” Partial differential equations, vol. 19, 1998.

1- Hamilton-Jacobi