

کاربرد چندجمله‌ای‌های برنولی در حل معادلات انتگرال - دیفرانسیل کسری

کبری ربیعی^۱، یداله اردوخانی^{۲*}

۱- دانشجوی دکتری دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه الزهرا (س) ۲- استاد دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه الزهرا (س)

(دریافت: ۹۵/۰۷/۰۵، پذیرش: ۹۶/۰۳/۰۶)

چکیده

در این مقاله، ماتریس عملیاتی انتگرال کسری ریمان-لیوویل برای چندجمله‌ای‌های برنولی معرفی می‌شود. سپس به کمک این ماتریس عملیاتی انتگرال، خواص دیگر چندجمله‌ای‌های برنولی و روش کم‌ترین مربعات، معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم-ولترای کسری به یک دستگاه جبری غیرخطی تبدیل می‌شود. روش استفاده‌شده برای حل این دستگاه، روش تکراری نیوتن می‌باشد. در ادامه، هم‌گرایی روش در حل معادلات مذکور بررسی شده و با ارائه نتایج عددی، دقت و کارایی روش مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: چندجمله‌ای‌های برنولی، ماتریس عملیاتی، تجزیه و تحلیل هم‌گرایی، معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری، تقریب کم-ترین مربعات.

۱- مقدمه

کار رفته است. روش تجزیه آدومیان^۳ توسط نویسندگان [۶-۷] استفاده شده است، در [۸] روش هموتوبی بر روی معادله انتگرال-دیفرانسیلی مرتبه چهار پیاده شده است، در مرجع [۹] کارایی روش موجک سینوس کسینوسی در حل معادله کسری انتگرال-دیفرانسیل فردهلم^۴ نشان داده شده است. نویسندگان در مرجع [۱۰] روش بسط تیلور را برای حل این نوع معادلات به کار گرفته‌اند و هم‌چنین کارایی روش‌های هم‌محلی و تبدیل دیفرانسیلی کسری در مراجع [۱۱-۱۳] به ترتیب بحث شده است.

قابل ذکر است که تعاریف متعددی برای انتگرال و مشتق کسری وجود دارد که توجه این مقاله بر روی مشتق کسری کاپوچو^۵ و انتگرال کسری ریمان-لیوویل^۶ معطوف می‌باشد. در بخش دوم، تعاریف این عملگرها و دیگر پیش‌نیازهای این مقاله ارائه می‌شود. در بخش سوم، چندجمله‌ای‌های برنولی^۷ و ماتریس عملیاتی انتگرال ریمان-لیوویل این چندجمله‌ای‌ها بیان خواهد شد. تجزیه و تحلیل هم‌گرایی در بخش چهارم بحث خواهد شد. بخش پنجم به بیان روش به کار گرفته‌شده برای حل این معادلات در این مقاله می‌پردازد و در بخش ششم نتایج عددی گزارش می‌شود. بحث و نتیجه‌گیری اجمالی از کل مباحث پیش-رو در بخش هفتم آورده شده است.

ایده اولیه حسابان از مرتبه کسری در سال ۱۶۹۵ طی نامه‌ای از هوپیتال^۱ به لایپ‌نیتز^۲ شکل گرفت و در آن، هوپیتال این‌گونه مطرح کرد که اگر در مشتق n تابعی نسبت به متغیرش $n = \frac{1}{2}$ فرض شود، $\frac{d^n}{dx^n}$ چه مفهومی خواهد داشت؟ پس از این نقطه آغاز، مطالعاتی در این زمینه توسط دانشمندان انجام شد و کتاب‌های جامعی توسط نویسندگان مختلف در این زمینه به چاپ رسید که یکی از مهم‌ترین منابع در این زمینه که به کاربردهای حسابان از مرتبه کسری می‌پردازد، در مرجع [۱] معرفی می‌شود. از آنجایی که مدل‌بندی بسیاری از پدیده‌های فیزیکی در حوزه وسیعی از علوم، نظیر پزشکی [۲]، اقتصاد [۳]، لرزه‌نگاری [۴] و ... منجر به تشکیل معادلات دیفرانسیل کسری می‌شود، اخیراً بررسی این معادلات توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده است. علاوه بر این، پیدا کردن حل تحلیلی و جواب دقیق برای این معادلات دیفرانسیل کسری به طور معمول پیچیده است، بنابراین، یافتن روش‌های عددی برای حل این معادلات از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشد.

برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری روش‌های عددی گوناگونی به کار گرفته شده است. در مرجع [۵] روش تغییر پارامترها برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری به

3- Adomian

4- Fredholm

5- Caputo

6- Riemann-Liouville

7- Bernoulli

* رایانامه نویسنده مسئول: ordokhani@alzahra..ac.ir

1- Hopital

2- Leibniz

و در صورتی که $\gamma = n \in N$ باشد، به ترتیب برابر با $x^n(t)$ و $(-1)^n x^n(t)$ خواهند شد.

۲-۲- مشتقات از مرتبه کسری کاپوچو

در این قسمت مشتق کسری کاپوچو چپ و راست را به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۱۴]:

$$({}_a^C D_t^\gamma x)(t) = ({}_a D_t^\gamma [x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k]), \quad (\gamma) \quad (7)$$

$$({}_t^C D_b^\gamma x)(t) = ({}_t D_b^\gamma [x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k]), \quad (\gamma) \quad (8)$$

که در آن، $n = [\gamma]$ برابر با کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر از γ است. با توجه به تعاریف فوق واضح است که این مشتق برای توابعی که دارای مشتق کسری ریمان-لیوویل باشند، قابل تعریف می‌باشد و می‌توان عبارات معادل این تعریف را به شکل زیر در نظر گرفت.

$${}_a^C D_t^\gamma x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\gamma-1} x^{(n)}(\tau) d\tau \quad (9)$$

$$= {}_a I_t^{n-\gamma} D^n x(t), \quad n = [\gamma] + 1, \quad t > a,$$

$${}_t^C D_b^\gamma x(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\gamma)} \int_t^b (t-\tau)^{n-\gamma-1} x^{(n)}(\tau) d\tau \quad (10)$$

$$= (-1)^n {}_t I_b^{n-\gamma} D^n x(t), \quad n = [\gamma] + 1, \quad t < b.$$

در مورد مشتقات کسری کاپوچو نیز در حالت $\gamma = n \in N$ داریم:

$$({}_a^C D_t^n x)(t) = x^{(n)}(t), \quad (11)$$

$$({}_t^C D_b^n x)(t) = (-1)^n x^{(n)}(t). \quad (12)$$

بررسی خواص بیش‌تر انواع مشتقات و انتگرال‌های کسری و نیز ارتباط و تاثیر مشتق کاپوچو و انتگرال کسری ریمان-لیوویل بر یکدیگر را می‌توان در مرجع [۱] مطالعه کرد.

۳- چندجمله‌ای‌های برنولی

چندجمله‌ای‌های برنولی از درجه m بر روی بازه $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۶]:

$$\beta_m(t) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \alpha_{m-i} t^i. \quad (13)$$

که در آن، α_i به ازای $i = 0, 1, \dots, m$ اعداد برنولی بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{i=0}^m \alpha_i \frac{t^i}{i!}. \quad (14)$$

چندجمله اول اعداد برنولی و چندجمله‌ای‌های برنولی به شکل

۲- تعاریف اولیه

در این بخش تعاریف مورد نیاز در قسمت‌های بعدی مقاله به طور خلاصه بیان می‌شود.

۱-۲- مشتق و انتگرال ریمان-لیوویل

فرض کنید $\Omega = [a, b]$ یک بازه منتهای بر محور اعداد حقیقی R باشد، انتگرال چپ و راست ریمان-لیوویل از مرتبه کسری $\gamma > 0$ برای $x: [a, b] \rightarrow R$ به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۴]:

$${}_a I_t^\gamma x(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_a^t (t-\tau)^{\gamma-1} x(\tau) d\tau, \quad (1)$$

$${}_t I_b^\gamma x(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_t^b (t-\tau)^{\gamma-1} x(\tau) d\tau, \quad (2)$$

که در آن، $\Gamma(\gamma)$ تابع گاما است.

در حالت خاص $\gamma = n \in N$ انتگرال‌های n گانه زیر به دست می‌آیند:

$${}_a I_t^n x(t) = \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_a^{\tau_{n-1}} x(\tau) d\tau \quad (3)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} x(\tau) d\tau,$$

$${}_t I_b^n x(t) = \int_t^b d\tau_1 \int_{\tau_1}^b d\tau_2 \dots \int_{\tau_{n-1}}^b x(\tau) d\tau \quad (4)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_t^b (t-\tau)^{n-1} x(\tau) d\tau.$$

مشتق چپ و راست ریمان-لیوویل از مرتبه کسری $\gamma > 0$ به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$${}_a D_t^\gamma x(t) = \frac{d^n}{dt^n} {}_a I_t^{n-\gamma} x(t) =$$

$$\frac{1}{(n-\gamma)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\gamma-1} x(\tau) d\tau, \quad (5)$$

$$n = [\gamma] + 1, \quad t > a,$$

$${}_t D_b^\gamma x(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} {}_t I_b^{n-\gamma} x(t)$$

$$= \frac{(-1)^n}{(n-\gamma)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (t-\tau)^{n-\gamma-1} x(\tau) d\tau, \quad (6)$$

$$n = [\gamma] + 1, \quad t < b.$$

زیر می‌باشند:

عبارت زیر به دست می‌آید:

$$F^T = C^T D \quad (20)$$

حال با توجه به این که D ماتریس متقارن معرفی شده به

صورت زیر است:

$$D = \int_0^1 \Psi(t) \Psi(t)^T dt \quad (21)$$

بردار ضرایب مجهول C از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$C = D^{-1}(f(t), \Psi(t)), \quad (22)$$

۲-۳- ماتریس عملیاتی انتگرال کسری ریمان- لیوویل

چندجمله‌ای‌های برنولی

در این بخش ماتریس عملیاتی $(m+1) \times (m+1)$ انتگرال

کسری ریمان- لیوویل را برای چندجمله‌ای‌های برنولی معرفی

کرده و آن را با $F^{(\gamma)}$ نمایش می‌دهیم [۱۶].

$${}_0 I_t^\gamma \Psi(t) \simeq F^{(\gamma)} \Psi(t). \quad (23)$$

با استفاده از رابطه (۱۳) و خاصیت خطی انتگرال ریمان-

لیوویل و همچنین با توجه به رابطه [۱۷]:

$${}_0 I_t^\gamma t^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\gamma)} t^{n+\gamma}, \quad n > -1, \quad (24)$$

داریم:

$$\begin{aligned} {}_0 I_t^\gamma \beta_i(t) &= {}_0 I_t^\gamma \left(\sum_{r=0}^i \binom{i}{r} \alpha_{i-r} t^r \right) = \\ \sum_{r=0}^i \binom{i}{r} \alpha_{i-r} {}_0 I_t^\gamma t^r &= \sum_{r=0}^i \binom{i}{r} \alpha_{i-r} \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1+\gamma)} t^{r+\gamma} = \\ \sum_{r=0}^i b_{i,r} t^{r+\gamma}. \end{aligned} \quad (25)$$

که در آن:

$$b_{i,r} = \binom{i}{r} \alpha_{i-r} \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1+\gamma)}. \quad (26)$$

حال با بسط عبارت $t^{r+\gamma}$ بر حسب چندجمله‌ای‌های برنولی

به دست می‌آوریم:

$$t^{r+\gamma} = \sum_{j=0}^m c_{r,j} \beta_j(t), \quad (27)$$

به طوری که ضرایب از فرمول زیر حاصل می‌شوند:

$$c_{r,j} = \frac{\langle t^{r+\gamma}, \beta_j(t) \rangle}{\langle \beta_j(t), \beta_j(t) \rangle} \quad (28)$$

و با قراردادن تقریب به دست آمده در معادله (۲۵)، عبارت

زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} {}_0 I_t^\gamma \beta_i(t) &= \sum_{r=0}^i b_{i,r} \sum_{j=0}^m c_{r,j} \beta_j(t) = \\ \sum_{j=0}^m \left(\sum_{r=0}^i b_{i,r} c_{r,j} \right) \beta_j(t), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = \frac{-1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{6}, \quad \alpha_4 = \frac{-1}{30}, \dots, \\ \alpha_{2i+1} = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3 \dots$$

9

$$\beta_0(t) = 1, \quad \beta_1(t) = t - \frac{1}{2}, \quad \beta_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}, \dots$$

این چندجمله‌ای‌ها در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$\int_0^1 \beta_n(t) \beta_m(t) dt = (-1)^{n-1} \frac{m!n!}{(m+n)!} \alpha_{n+m}, \quad (15)$$

$n, m \geq 1$.

هم‌چنین یک پایه کامل روی فضای $L^2[0,1]$ تشکیل می‌دهند [۱۵].

۳-۱- تقریب توابع

چون $Y = \text{span}\{\beta_0(t), \beta_1(t), \dots, \beta_m(t)\}$ یک زیرمجموعه بسته و متناهی از فضای هیلبرت $H = L^2[0,1]$ می‌باشد، بنابراین، یک زیرفضای کامل است و در نتیجه برای هر $f \in H$ بهترین تقریب منحصر به فرد مانند $f_0 \in Y$ وجود دارد که در این صورت [۱۵]:

$$\forall y \in Y, \quad \|f - f_0\| \leq \|f - y\|.$$

از آن جایی که $f_0 \in Y$ پس می‌توان ضرایب یکنای c_0, c_1, \dots, c_m را به نحوی پیدا کرد که رابطه زیر برقرار باشد:

$$f(t) \approx f_0(t) = \sum_{j=0}^m c_j \beta_j(t) = C^T \Psi(t), \quad (16)$$

که در آن، T نشان دهنده ترانهاده است و بردارهای $\Psi(t)$ و C به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} C &= [c_0, c_1, \dots, c_m]^T, \\ \Psi(t) &= [\beta_0(t), \beta_1(t), \dots, \beta_m(t)]^T. \end{aligned} \quad (17)$$

حال با در نظر گرفتن رابطه زیر:

$$f_j = \langle f, \beta_j \rangle = \int_0^1 f(t) \beta_j(t) dt, \quad (18)$$

که \langle, \rangle ضرب داخلی را نشان می‌دهد، به ازای $j = 0, \dots, m$ خواهیم داشت:

$$f_j = \sum_{i=0}^m c_i \int_0^1 \beta_i(t) \beta_j(t) dt = \sum_{i=0}^m c_i d_{ij} \quad (19)$$

که در آن، $d_{ij} = \int_0^1 \beta_i(t) \beta_j(t) dt$ ، $i, j = 0, \dots, m$ می‌باشد. با در نظر گرفتن:

$$F = \langle f, \Psi \rangle = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}, \quad D = [d_{ij}],$$

یکتای تابع در مجموعه Y و هم چنین $Y_1 \in Y$ و با در نظر گرفتن تساوی فوق می توان نتیجه گرفت:

$$\|f - y_0\|_{L^2[0,1]}^2 \leq \|f - y_1\|_{L^2[0,1]}^2 = \int_0^1 |f(t) - y_1(t)|^2 dt = \frac{K^2}{(m+1)^2(2m+3)}. \quad (36)$$

با اعمال عملگر جذر در طرفین تساوی فوق، اثبات لم ۱ کامل می شود. □

قضیه ۱:

فرض کنیم که H یک فضای هیلبرت و Y یک زیرفضای بسته و متناهی آن باشد، $\{y_1, \dots, y_n\}$ را پایه ای برای زیرفضای Y در نظر گرفته و برای هر عضو دلخواه از فضای H مانند x بهترین تقریب منحصر به فرد متعلق به زیرفضای Y را با y_0 نمایش می دهیم، بنابراین خواهیم داشت [۱۵]:

$$\|x - y_0\|_2^2 = \frac{G(x, y_1, \dots, y_n)}{G(y_1, \dots, y_n)}, \quad (37)$$

که G ماتریس گرام می باشد.

$$G(x, y_1, \dots, y_n) = \begin{bmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y_1 \rangle & \dots & \langle x, y_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle y_n, x \rangle & \langle y_n, y_1 \rangle & \dots & \langle y_n, y_n \rangle \end{bmatrix} \quad (38)$$

قضیه ۲:

فرض کنید $f \in L^2[0, 1]$ و $f(t)$ توسط $\sum_{i=0}^m c_i \beta_i(t)$ تقریب زده شود، آن گاه [۱۶]:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f(t) - \sum_{i=0}^m c_i \beta_i(t)\|_{L^2[0,1]} = 0.$$

□

حال با توجه به قضایای بیان شده، نشان می دهیم که ${}_0 I_t^\gamma \beta_i(t) - F^{(\gamma)} \beta_i(t)$ به سمت صفر میل کند.

چون $t^{r+\gamma} = \sum_{j=0}^m c_{r,j} \beta_j(t)$ و با به کارگیری قضیه ۱ داریم:

$$\|t^{r+\gamma} - \sum_{j=0}^m c_{r,j} \beta_j(t)\| = \left(\frac{G(t^{r+\gamma}, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)}{G(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (39)$$

و در نتیجه، به ازای $i = 0, 1, \dots, m$ عبارت زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} & \left\| {}_0 I_t^\gamma \beta_i(t) - \sum_{j=0}^m \left(\sum_{r=0}^i b_{i,r} c_{r,j} \right) \beta_j(t) \right\| \\ & \leq \sum_{r=0}^i \frac{i! \alpha_{i-r}}{(i-r)! \Gamma(r+1+\gamma)} \left\| t^{r+\gamma} - \sum_{j=0}^m c_{r,j} \beta_j(t) \right\| \\ & \leq \sum_{r=0}^i b_{i,r} \left(\frac{G(t^{r+\gamma}, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)}{G(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (40)$$

با عنایت به قضیه ۲ و هم چنین آخرین نامساوی به دست آمده در (۴۰)، می توان نتیجه گرفت که تفاضل $F^{(\gamma)} \Psi(t)$ و

بدون از دست دادن کلیت و برای نمایش ساده تر درایه های ماتریس عملیاتی مذکور $\theta_{i,j,r} = b_{i,r} c_{r,j}$ را در نظر گرفته و معادله (۲۹) را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$I_t^\gamma \beta_i(t) \approx \left[\sum_{r=0}^i \theta_{i,0,r}, \sum_{r=0}^i \theta_{i,1,r}, \dots, \sum_{r=0}^i \theta_{i,m,r} \right] \Psi(t), \quad (30)$$

$i = 0, \dots, m.$

که در نهایت، ماتریس عملیاتی انتگرال به صورت زیر به دست می آید:

$$F^{(\gamma)} = \begin{bmatrix} \theta_{0,0,0} & \dots & \theta_{0,m,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{r=0}^m \theta_{m,0,r} & \dots & \sum_{r=0}^m \theta_{m,m,r} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

۴- تجزیه و تحلیل هم گرای

در این بخش، کران بالای خطا برای ماتریس عملیاتی انتگرال کسری ریمان-لیوویل معرفی شده در رابطه (۳۱)، به دست می آید. برای این منظور ابتدا قرار می دهیم:

$$E(t) = {}_0 I_t^\gamma \Psi(t) - F^{(\gamma)} \Psi(t), \quad (32)$$

و نشان می دهیم که اگر تعداد چند جمله ای های برنولی پایه ای به سمت بی نهایت میل کند، درایه های بردار خطای $E(t)$ به سمت صفر میل می کنند. برای اثبات این ادعا، ابتدا به بیان لم و قضایای زیر می پردازیم.

لم ۱:

فرض کنیم $f \in C^{m+1}[0, 1]$ و Y زیرفضای تولید شده توسط چند جمله ای های برنولی به صورت زیر باشد:

$$Y = \text{span}\{\beta_0(t), \beta_1(t), \dots, \beta_m(t)\}$$

آن گاه خواهیم داشت:

$$\|f - y_0\|_{L^2[0,1]} \leq \frac{K}{(m+1)! \sqrt{2m+3}}, \quad (33)$$

که در آن، y_0 بهترین تقریب یکتای تابع f در مجموعه Y است و $K = \text{Max}_{t \in [0,1]} |f^{(m+1)}(t)|$.

اثبات:

مجموعه $\{1, t, \dots, t^m\}$ را به عنوان یک پایه برای فضای چند جمله ای های تا درجه m در نظر گرفته و فرض می کنیم:

$$y_1(t) = f(0) + t f'(0) + \dots + \frac{t^m}{m!} f^{(m)}(0). \quad (34)$$

لذا به کمک بسط تیلور داریم:

$$|f(t) - y_1(t)| = \frac{|f^{(m+1)}(\tau) t^{m+1}|}{(m+1)!}, \quad (35)$$

که در آن، $\tau \in (0, 1)$ با توجه به این که y_0 بهترین تقریب

با توجه به فرض جدایی پذیری هسته‌ها می‌توان توابع $K_1(t, s)$ و $K_2(t, s)$ را نیز به شکل زیر نوشت:

$$K_1(t, s) = A_1(t)B_1(s), \quad (48)$$

$$K_2(t, s) = A_2(t)B_2(s), \quad (49)$$

و در نهایت انتگرال‌های معادله (۴۱) را به شکل زیر تقریب زد:

$$\int_0^t K_1(t, s) (x(s))^{n_1} ({}^C_0D_t^{\gamma_1} x(s))^{n_2} ds \approx A_1(t) \int_0^t B_1(s) (C^T F^{(\gamma)} \Psi(s) + d^T \Psi(s))^{n_1} (C^T F^{(\gamma-\gamma_1)} \Psi(t) + d_1^T \Psi(t))^{n_2} ds = H_1(t), \quad (50)$$

به طور مشابه داریم:

$$\int_0^1 K_2(t, s) (x(s))^{n_3} ({}^C_0D_t^{\gamma_2} x(s))^{n_4} ds \approx A_2(t) \int_0^1 B_2(s) (C^T F^{(\gamma)} \Psi(s) + d^T \Psi(s))^{n_3} (C^T F^{(\gamma-\gamma_2)} \Psi(t) + d_1^T \Psi(t))^{n_4} ds = H_2(t). \quad (51)$$

حال با قراردادن تقریب‌های بیان شده در معادله (۴۱)، دستگاه معادله جبری زیر بر اساس درایه‌های مجهول بردار C به دست می‌آید:

$$C^T \Psi(t) - C^T F^{(\gamma)} \Psi(t) - d^T \Psi(t) - g(t) - H_1(t) - H_2(t) = 0. \quad (52)$$

اکنون با به‌کارگیری روش کم‌ترین مربعات، تابعی زیر را برای پیدا کردن ضرایب مجهول در نظر گرفته و بردار C به نحوی انتخاب می‌شود که مقدار تابعی کمینه شود:

$$J[c_0, c_1, \dots, c_m] = \int_0^1 (C^T \Psi(t) - C^T F^{(\gamma)} \Psi(t) - d^T \Psi(t) - g(t) - H_1(t) - H_2(t))^2 dt, \quad (53)$$

شرایط لازم برای این منظور، تشکیل معادلات $\frac{\partial J}{\partial c_k} = 0$ و $k = 0, 1, \dots, m$ می‌باشد. این معادلات، تشکیل یک دستگاه غیرخطی از $m+1$ معادله و $m+1$ مجهول می‌دهند و در نهایت به کمک روش تکراری نیوتن حل شده است.

۶- نتایج عددی

در این قسمت برای نشان دادن درستی و دقت روش به کار برده شده برای حل معادله انتگرال - دیفرانسیل کسری مورد نظر نتایج مربوط به چند مثال را بررسی می‌کنیم:

$I_t^\gamma \Psi(t)$ وقتی که m به سمت بی‌نهایت میل کند، به صفر هم‌گرا می‌شود.

۵- بیان مساله

معادله انتگرال - دیفرانسیل کسری زیر را در نظر می‌گیریم:

$${}^C_0D_t^\gamma x(t) = x(t) + g(t) + \int_0^t K_1(t, s) (x(s))^{n_1} ({}^C_0D_t^{\gamma_1} x(s))^{n_2} ds + \int_0^1 K_2(t, s) (x(s))^{n_3} ({}^C_0D_t^{\gamma_2} x(s))^{n_4} ds. \quad (41)$$

که در آن:

$$0 \leq t, s \leq 1, \quad n-1 \leq \gamma \leq n,$$

$$0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma.$$

هم‌چنین، شرایط اولیه داده شده همراه با معادله به صورت زیر می‌باشد:

$$x^{(i)}(0) = \vartheta_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (42)$$

در معادله (۴۱)، K_1 و K_2 را هسته‌های جدایی‌پذیر در نظر گرفته و فرض می‌کنیم که n_1, n_2, n_3, n_4 اعداد صحیح مثبت بوده و تمامی مشتقات کسری ظاهرشده در این معادله از نوع کاپوچو می‌باشند. برای حل این مساله، ${}^C_0D_t^\gamma x(t)$ توسط توابع برنولی به شکل:

$${}^C_0D_t^\gamma x(t) = \sum_{i=0}^m c_i \beta_i(t) = C^T \Psi(t), \quad (43)$$

تقریب زده می‌شود که در آن $C = [c_0, c_1, \dots, c_m]^T$ بردار ضرایب و مجهول می‌باشد. با توجه به ارتباط زیر بین مشتق کسری کاپوچو و انتگرال کسری ریمان - لیوویل [۱۷] داریم:

$${}^C_0I_t^\gamma {}^C_0D_t^\gamma x(t) = x(t) - \sum_{i=0}^{n-1} x^{(i)}(0) \frac{t^i}{i!}, \quad (44)$$

فرمول زیر را برای تابع مجهول $x(t)$ به دست می‌آوریم:

$$x(t) = \sum_{i=0}^m c_i {}^C_0I_t^\gamma \beta_i(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \vartheta_i \frac{t^i}{i!} = C^T F^{(\gamma)} \Psi(t) + d^T \Psi(t), \quad (45)$$

هم‌چنین برای مشتقات کسری کاپوچو کم‌تر از مرتبه γ روابط زیر طبق خواص و رابطه مشتق و انتگرال کسری حاصل می‌گردد:

$${}^C_0D_t^{\gamma_1} x(t) = C^T F^{(\gamma-\gamma_1)} \Psi(t) + d_1^T \Psi(t), \quad (46)$$

$${}^C_0D_t^{\gamma_2} x(t) = C^T F^{(\gamma-\gamma_2)} \Psi(t) + d_2^T \Psi(t). \quad (47)$$

مثال ۱:

حالت کسری نیز می باشد.

معادله انتگرال-دیفرانسیل ولترای کسری زیر را در نظر می گیریم [۱۸]:

$${}^C_0D_t^{\frac{1}{2}}x(t) = x(t) + \frac{8}{3\Gamma(\frac{1}{2})}t^{\frac{3}{2}} - t^2 - \frac{1}{3}t^3 + \int_0^t x(s) ds,$$

$$0 \leq t \leq 1,$$

$$x(0) = 0, \tag{۵۴}$$

جواب دقیق این معادله برابر با t^2 می باشد. با به کارگیری روش ارائه شده در بخش ۵، خطای مطلق جواب تقریبی در نقاط مختلف، در جدول (۱) مشاهده می شود.

همان طور که از نتایج برمی آید، با افزایش تعداد چندجمله ای های پایه مقدار تقریبی جواب، به جواب واقعی در نقاط مختلف بازه مورد بررسی میل می کند.

جدول (۱): خطای مطلق مثال ۱

t	m=۵	m=۷
۰/۱	$۴/۴ \times ۱۰^{-۵}$	$۶/۹ \times ۱۰^{-۶}$
۰/۳	$۳/۰ \times ۱۰^{-۵}$	$۹/۹ \times ۱۰^{-۷}$
۰/۵	$۲/۷ \times ۱۰^{-۶}$	$۹/۷ \times ۱۰^{-۷}$
۰/۷	$۲/۶ \times ۱۰^{-۵}$	$۹/۲ \times ۱۰^{-۷}$
۰/۹	$۴/۶ \times ۱۰^{-۵}$	$۱/۰ \times ۱۰^{-۵}$

مثال ۲:

معادله کسری انتگرال-دیفرانسیل کسری فردهلم زیر را در نظر می گیریم [۱۹]:

$${}^C_0D_t^{\gamma}x(t) = 1 - \frac{t}{4} + \int_0^1 ts [x(s)]^2 ds,$$

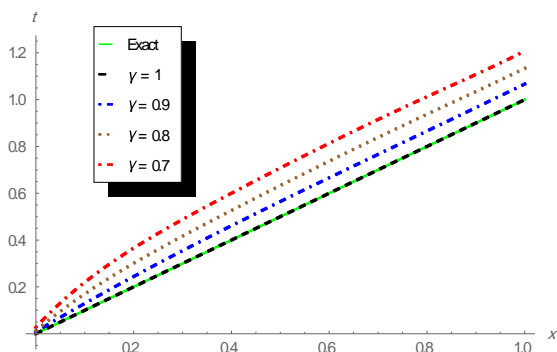
$$x(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq \gamma \leq 1, \tag{۵۵}$$

مقدار دقیق این معادله برای $\gamma = 1$ ، برابر با $x(t) = t$ بوده و در جدول (۲) مقدار خطای مطلق برای این مساله به ازای m های مختلف نشان داده شده است. در این مثال هم، نظیر مثال قبل با افزایش تعداد چندجمله ای های پایه ای تفاضل میان مقدار دقیق معادله و جواب تقریبی به دست آمده از روش پیشنهادی به سمت صفر میل می کند.

قابل توجه است که در شکل (۱) نیز نمودارهای به دست آمده برای تابع مجهول $x(t)$ به ازای مقادیر مختلف γ و $m = 3$ آورده شده است. همان طور که از نمودارها مشخص است، زمانی که γ به سمت یک میل می کند، جواب به دست آمده برای تابع مجهول به مقدار دقیق نزدیک می شود. هم چنین شکل (۱) نشان دهنده هم گرایی بین جواب مساله به ازای مقادیر مختلف γ است که این نوع هم گرایی نشان دهنده کارایی روش بیان شده در

جدول (۲): خطای مطلق مثال ۲.

t	m=۲	m=۴
۰/۱	$۳/۱ \times ۱۰^{-۱۳}$	$۲/۳ \times ۱۰^{-۱۷}$
۰/۳	$۹/۳ \times ۱۰^{-۱۳}$	$۶/۶ \times ۱۰^{-۱۷}$
۰/۵	$۱/۵ \times ۱۰^{-۱۲}$	$۱/۱ \times ۱۰^{-۱۶}$
۰/۷	$۲/۱ \times ۱۰^{-۱۴}$	$۱/۵ \times ۱۰^{-۱۶}$
۰/۹	$۲/۷ \times ۱۰^{-۱۲}$	$۱/۹ \times ۱۰^{-۱۶}$



شکل (۱): نمودار $x(t)$ به ازای γ مختلف

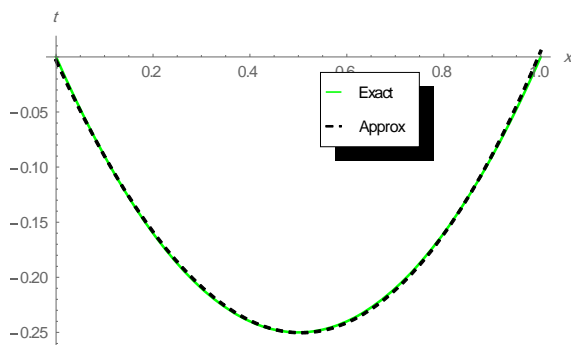
مثال ۳:

معادله دیفرانسیل کسری زیر را در نظر می گیریم [۲۰]:

$${}^C_0D_t^{\frac{1}{2}}x(t) = \frac{(\frac{8}{3})t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} + \frac{t}{12} + \int_0^1 ts [x(s)] ds,$$

$$0 \leq t \leq 1, \quad x(0) = 0, \tag{۵۶}$$

جواب دقیق این معادله برابر با $t^2 - t$ می باشد و نمودار مقدار دقیق و تقریبی این معادله در شکل (۲) برای $m = 3$ نشان داده شده است. خطای مطلق بین جواب دقیق و جواب عددی به دست آمده توسط روش پیشنهادی در نقاط مختلف در جدول (۳) مشاهده می شود. همان طور که از نتایج برمی آید، افزایش تعداد چندجمله ای های پایه ای سبب کاهش خطای مطلق می شود.



شکل (۲): نمودار مقدار تقریبی و دقیق $x(t)$ مثال ۳.

۷- نتیجه گیری

در این مقاله، از چندجمله‌ای‌های برنولی و خواص آن و ماتریس عملیاتی انتگرال، معادله انتگرال دیفرانسیل کسری را تبدیل به یک دستگاه از معادلات جبری غیرخطی نموده و با به کارگیری روش تکراری نیوتن، به جواب تقریبی مورد نظر دست یافته‌ایم. هم‌چنین تجزیه و تحلیل خطا مورد بحث قرار گرفته شده است و با ارائه مثال‌هایی کارایی روش را مورد بررسی قرار داده‌ایم.

۸- مراجع

- [1] K. Oldham and J. Spanier, "The Fractional Calculus, Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order," Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, ۱۹۷۴.
- [2] G. Gonzalez-Parra, A. J. Arenas, and B. M. Chen-Charpentier, "A fractional order epidemic model for the simulation of outbreaks of influenza A (H1N1)," Mathematical Methods in the Applied Sciences, vol. 37, no. 15, pp. 2218-2226, 2014.
- [3] R. T. Baillie, "Long memory processes and fractional integration in econometrics," J. Econom., vol. 73, pp. 5-59, 1996.
- [4] J. H. He, "Nonlinear oscillation with fractional derivative and its applications," International conference on vibrating engineering98, China: Dalian, pp. 288-291, 1998.
- [5] L. Boyadjiev, H. J. Dobner, and S. L. Kalla, "A fractional integro-differential equation of Volterra type," Math. Comput. Model, vol. 28, no. 10, pp. 103-130, 1998.
- [6] S. Momani and M. Noor, "Numerical methods for fourth order fractional integro-differential equations," Appl. Math. Comput. vol. 182, pp. 54-60, 2006.
- [7] S. S. Ray, "Analytical solution for the space fractional diffusion equation by two-step Adomian decomposition method," Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. vol. 14, pp.129-306, 2009.
- [8] Y. Nawaz, "Variational iteration method and homotopy perturbation method for fourth-order fractional integro-differential equations," Comput. Math. Appl., vol. 61, no. 8, pp. 2330-2340, 2011.
- [9] H. Saedi, M. Mohseni Moghadam, N. Mollahasani, and G. N Chuev, "A CAS wavelet method for solving nonlinear Fredholm integro-differential equations of fractional order," Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. vol. 16, no. 3, pp. 1154-1163, 2011.
- [10] L. Huang, X. F. Li, Y. L. Zhao, and X. Y. Duan, "Approximate solution of fractional integro-differential equations by Taylor expansion method," Comput. Math. Appl., vol. 62, no. 3, pp. 1127-1134, 2011.
- [11] E. A. Rawashdeh, "Numerical solution of fractional integro-differential equations by collocation method," Appl. Math. Comput. vol. 176, pp. 1-6, 2006.
- [12] S. Sedaghat, Y. Ordokhani, and M. Dehghan, "On Spectral Method for Volterra Functional Integro-Differential Equations of Neutral Type," Numerical Functional Analysis and Optimization, vol. 35, no. 2, 2014.

جدول (۳): خطای مطلق مثال ۳

t	m=۲	m=۵
۰/۱	$۲/۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۴/۶ \times ۱۰^{-۴}$
۰/۳	$۲/۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۳/۵ \times ۱۰^{-۴}$
۰/۵	$۳/۶ \times ۱۰^{-۳}$	$۹/۲ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۷	$۸/۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۸ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۹	$۶/۰ \times ۱۰^{-۳}$	$۵/۱ \times ۱۰^{-۵}$

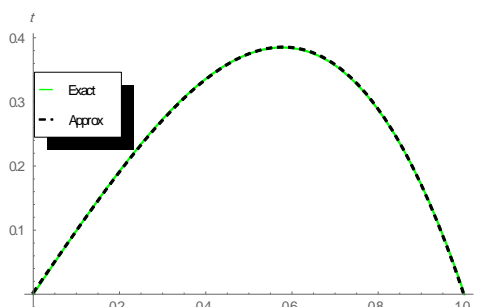
مثال ۴:

معادله انتگرال-دیفرانسیل کسری زیر را در نظر می‌گیریم [۲۰]:

$${}_0^5 D_t^5 x(t) = -\frac{3}{91} \frac{t^{\frac{1}{6}} \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) (-91 + 216t^2)}{\pi} + (5 - 2e)t + \int_0^1 t e^s [x(s)] ds,$$

$$0 \leq t \leq 1, \quad x(0) = 0, \quad (57)$$

جواب دقیق این معادله برابر با $t - t^3$ می‌باشد. نمودار مقدار دقیق و تقریبی این معادله در شکل (۳) برای $m = 3$ مشاهده می‌شود.

شکل (۳): نمودار مقدار تقریبی و دقیق $x(t)$ مثال ۴.

هم‌چنین خطای مطلق بین جواب دقیق و جواب عددی به دست آمده توسط روش پیشنهادی در نقاط مختلف بازه مورد بررسی، در جدول (۴) بیان شده است.

جدول (۴): خطای مطلق مثال ۴

t	m=۲	m=۵
۰/۱	۲×۱۰^{-۳}	$۵/۵ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۳	$۲/۱ \times ۱۰^{-۳}$	$۳/۵ \times ۱۰^{-۴}$
۰/۵	$۱/۶ \times ۱۰^{-۳}$	$۳/۶ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۷	$۲/۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۳/۳ \times ۱۰^{-۴}$
۰/۹	$۶/۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۵/۲ \times ۱۰^{-۴}$

- [13] D. Nazari and S. Shahmorad, "Application of the fractional differential transform method to fractional-order integro-differential equations with nonlocal boundary conditions," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 234, no. 3, pp. 883-891, 2010.
- [14] I. Podlubny, "Fractional Differential Equations," Academic Press, New York, 1999.
- [15] E. Kreyszig, "Introductory Functional Analysis with Applications," John Wiley and Sons Press, New York, 1987.
- [16] E. Keshavarz, Y. Ordokhani, and M. Razzaghi, "A numerical solution for fractional optimal control problems via Bernoulli polynomials," *Journal of Vibration and Control*, vol. 22, no. 18, pp. 3889-3903, 2016.
- [17] K. Rabiei, Y. Ordokhani, and E. Babolian, "The Boubaker polynomials and their application to solve fractional optimal control problems," *Nonlinear Dynamics*, vol. 88, no. 2, pp. 1013-1026, 2016.
- [18] F. Awawdeh, E. A. Rawashdeh, and H. M. Jaradat, "Analytic solution of fractional integro-differential equations," *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, vol. 38, pp. 1-10, 2011.
- [19] L. Zhu and Q. Fan, "Solving fractional nonlinear Fredholm integro-differential equations by the second kind Chebyshev wavelet," *Commun. Nonl. Sci. Numer. Simulat.* vol. 17, pp. 2333-2341, 2012.
- [20] D. Sh. Mohammed, "Numerical Solution of Fractional Integro-Differential Equations by Least Squares Method and Shifted Chebyshev Polynomial," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2014, 2014.