مجله علمی- پژوهشی "پدافند الکترونیکی و سایبری"
ویژه‌نامه کنفرانس بین‌المللی ترکیبیات، رمزنگاری و محاسبات، ص ۱۵۶ -۱۵۱

بعضی از ماتریس‌های پارامتر ۲–رانگ‌آمیزی تام گراف J(10,4)

مهدی علائیان[۱*]، عفت علائیان[۲]

۱- استاد، دانشگاه علم و صنعت ایران، ۲- دانشجو دکتری، دانشگاه علم و صنعت ایران

(دریافت: ۹۵/۰۷/۰۵، پذیرش: ۹۶/۰۳/۰۷)

چکیده

مفهوم کدهای کاملا منتظم، توسط دلسارته ارائه شده است. رنگ آمیزی تام گراف G با m رنگ، یک افراز از مجموعه رئوس G به m بخش $A_1, \ldots, A_m$ است که برای همه $i; j \in \{1,\ldots,m\}$ هر راس از A_i دارای تعداد یکسانی مجاور از A_j است که آن را a_{ij} و ماتریس $A = (a_{ij})$ $i;j\in\{1,2,\ldots,m\}$ را ماتریس پارامتر نامگذاری می‌کنیم. ما در این مقاله ۲-رنگ آمیزی تام (افراز منصفانه به ۲ بخش) گراف J(10,4) را بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: گراف جانسون، ماتریس پارامتر، ۲-رنگ آمیزی تام

۱- مقدمه

در سال ۱۹۷۳ دلسارته اقدام به معرفی خانواده ای از کـدها کـرد که از خواص ترکیبیاتی جالبی برخـوردار بودنـد. او ایـن کـدها را کدهای کاملا منتظم نامید و در همان زمان حدسی را مطرح کرد که هنوز یکی از سوال های اساسی در زمینه کدگذاریی و نظریـه گراف می باشد؛ هیچ کد تام غیر بدیهی در گراف جانسون وجـود ندارد. برای دانستن ارتباط بین حدس یاد شده و کـدهای کـاملا منتظم، ذکر این نکته کافیست که هـر کـد تـام یـک کـد کـاملا منتظم است. در واقع دلسارته برای اثبات حدس خود ترجیح داد که کدهای کاملا منـتظم در گرافهـای جانسـون یافتـه و سـپس نشان دهد که هیچ کدام از این کدها، کد تام غیر بـدیهی نیسـت. اصطلاح افراز منصـفانه ابتـدا توسـط هاینـاس وورس در مطالعـه ماتریسهای منصفانه مطرح شد . همچنـین سـاکس و دیگـران از افرازهای منصفانه به عنوان ابزاری برای محاسـبه چنـد جملـه‌ای مشخصه یک گراف استفاده کردند. نویمار نشان داد کـه هـر زیـر مجموعه از رئوس گراف یک کد کاملا منتظم است اگر و تنها اگر افراز فاصله آن، منصفانه باشد. تا کنون نتـایج بسـیاری در زمینـه رده بندی ماتریس های پارامتر برای گرافهای مختلف بدست آمده اسـت در ایـن مقالـه بـه ۲- رنـگ آمیـزی تـام گـراف J(10,4) می‌پردازیم.

۲- مفاهیم مقدماتی

در این بخش تعاریف، قضایا و مفاهیم اولیه را بیان می‌کنیم. E^n مجموعه تمام n تایی های ۰ و ۱ تعریف می‌شود:

$$E^{\mathrm{n}} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \{0,1\}\}$$

وزن n تایی x در E^{n}، تعداد مولفه های غیر صفر x است.

تعریف ۲-۱: گراف جانسون J(n,w) گرافی است گه رئوس آن همه n تایی‌های با وزن w در E^{n} است و رئوسی مجاورند که دقیقا در دو مولفه با هم اختلاف داشته باشند که گرافی منتظم با درجه w(n-w) است که تعداد رئوس آن برابر است با $\binom{n}{w}$.

تعریف ۲-۲: فرض کنیم $x\in E^{\mathrm{n}}$. در این صورت مجموعه اندیس مولفه‌های غیر صفر x را ساپورت x گوییم و آن را با supp(x) نشان می‌دهیم.

$$\mathrm{Supp}(x) = \{i \in \{1,2,\ldots,n\} \mid x_i \neq 0\}$$

تعریف ۲-۳: t-(n,k,λ)- طرح، فرض کنیم که v یک مجموعه n عضوی باشد. یک t-طرح روی v شامل گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های مجزای k تایی v به نام بلوک است، با این ویژگی که هر زیر مجموعه t عضوی v دقیقا در λ بلوک قرار داشته باشند و آن را t-(n,k,λ)-طرح می‌نامیم.

تعریف ۲-۴: یک t طرح با $\lambda = 1$ را یک دستگاه اشنایدر می‌نامیم و آن را با S(n,k,t) نشان می‌دهیم.

تعریف ۲-۵: گراف همبندG، فاصله منتظم نامیده می‌شود هرگاه منتظم از درجه k باشد و برای هر دو راس $x,y\in V(G)$ که در فاصله d(x,y)=i هستند، x دقیقا G_i همسایه در فاصله i+1 از y داشته باشند.

* رایانامه نویسنده مسئول: alaeiyan@iust.ac.ir

دنباله $E^n = \{b_1, b_2, \dots, b_{d-1}, c_1, c_2, \dots, c_d\}$ به‌طوری‌که d قطر G است را آرایه اشتراک G می‌نامیم. اگر

$a_i = k - b_i - c_i.$

تعداد همسایه‌های x که در فاصله i از y هستند، باشد، آنگاه اعداد a_i, b_i, c_i اعداد اشتراک نامیده می‌شوند.

تعریف ۲-۶: هر رنگ آمیزی گراف G با m رنگ را یک m–رنگ آمیزی تام با ماتریس $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ گوییم هرگاه هر راس به رنگ i، تعداد a_{ij} راس مجاور به رنگ j داشته باشد. به ماتریس A ماتریس پارامتر گوییم. در حالت m=2 رنگ اول را سفید و رنگ دوم را سیاه در نظر می‌گیریم.

نتیجه: هر m–رنگ‌آمیزی تام در گراف G را می‌توان به صورت یک نگاشت $T: V(G) \to \{1,2,\dots,m\}$ در نظر گرفت که خاصیت ذکر شده در تعریف را داشته باشد.

قضیه ۲-۷: [۲] اگر T یک رنگ‌آمیزی تام گراف G با m رنگ باشد، آنگاه هر مقدار ویژه T، یک مقدار ویژه ماتریس مجاورت G است.

قضیه ۲-۸: [۴] فرض کنیم G یک گراف k-منتظم و T یک m–رنگ‌آمیزی تام با ماتریس $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ در گراف G باشد. در این صورت مجموع مقادیر هر سطر در ماتریس A برابر k است.

برهان. فرض کنیم v یک راس دلخواه به رنگ i باشد. تعداد رئوس مجاور v به رنگ j برابر a_{ij} است. از طرفی تعداد رئوس مجاور v برابر k می‌باشد. بنابراین $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = k$. در نهایت از آنجا که راس v دلخواه انتخاب شده بود، قضیه به اثبات می‌رسد.

قضیه ۲-۹: [۴] فرض کنیم T یک ۲-رنگ‌آمیزی تام با ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در گراف همبند G باشد. در این صورت b,c≠0.

برهان. فرض کنیم b=0 باشد. در این صورت هر راس به رنگ سیاه هیچ راس مجاوری به رنگ سفید ندارد. درنتیجه هر راس به رنگ سفید نیز هیچ راس مجاوری به رنگ سیاه ندارد. بنابراین رئوس به رنگ سیاه و سفید تشکیل دو مولفه همبندی می‌دهند که با همبندی گراف در تناقض است.

قضیه ۲-۱۰: چنانچه گراف G دارای یک ۲-رنگ‌آمیزی تام با ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه دارای ۲-رنگ‌آمیزی تام با ماتریس $\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$ نیز می‌باشد.

برهان. با تعویض رنگ‌های سفید و سیاه، حکم برقرار است.

قضیه ۲-۱۱: [۴] فرض کنیم R نشان‌دهنده مجموعه تمام رئوس سفید در یک ۲-رنگ‌آمیزی تام با ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در گراف همبند G باشد. در این صورت:

$|W| = |V(G)|\frac{c}{b+c}.$

برهان. با حذف یال‌های بین رئوس سفید و نیز حذف یال‌های بین رئوس سیاه، گراف دو بخشی به‌دست آمده با بخش‌های مجموعه رئوس سفید و مجموعه رئوس سیاه را در نظر بگیرید. در این گراف هر راس به رنگ سفید تعداد b راس مجاور به رنگ سیاه دارد. بنابراین تعداد یال‌ها در این گراف برابر |R|b است. از طرف دیگر هر راس به رنگ سیاه، تعداد c راس مجاور به رنگ سفید دارد. درنتیجه تعداد یال‌ها در این گراف برابر |B|c می‌باشد. از آنجا که |W|+|B|=|V(G)|، لذا

$$|V(G)|=|W|+|B|$$
$$= |W|+\frac{b}{c}|W|$$
$$= \left(\frac{b+c}{c}\right)|W|$$

درنتیجه حکم خواسته‌شده به سادگی به‌دست می‌آید.

نتیجه ۲-۱۲: فرض کنیم |B| نشان‌دهنده مجموعه تمام رئوس سیاه در یک ۲-رنگ‌آمیزی تام با ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در گراف همبند G باشد. در این صورت

$$|B| = |V(G)|\frac{b}{b+c}$$

قضیه ۲-۱۳: [۴] فرض کنیم T یک ۲- رنگ‌آمیزی تام با ماتریس پارامتر $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در گراف k- منتظم G باشد. در این صورت مقادیر ویژه ماتریس پارامتر برابر k و a-c هستند.

برهان. از آنجا که می‌دانیم مجموع تمامی سطرها برابر k است به سادگی می‌توان دید که $\lambda_1 = 1$ یک مقدار ویژه با بردار متناظر $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ است. برای بدست آوردن مقدار ویژه دیگر λ_2 ابتدا توجه کنیم که $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}\, A = a + d$ لذا $\lambda_1 = a + d - k$ اما c+ d=k. در نتیجه

$$\lambda_2 = a + d - k = a + d - c = a - c.$$

قضیه ۲-۱۴: [۴] مقادیر ویژه J(n,w) دقیقا عبارتند از:

$$\theta_i = (n-w-i)(w-i)-I \qquad 0 \le i \le w.$$

نکته۲-۱۵: [۴]چند جمله‌ای زیر را در نظر بگیرید:

$$f(l,n,w,a_{11},a_{21}) = w(n-w-l)+a_{21}-a_{11}-l(n-w-l+1)$$

اگر k_1کوچکترین ریشه $f(l,n,w,a_{11},a_{21})$ به عنوان تابعی از l باشد آنگاه:

$$k_1=\frac{n+1-\sqrt{(n-2w+1)^2+4(w+a11-a21)}}{2}.$$

گزاره۲-۱۶: [۴] فرض کنیم T یک ۲-رنگ آمیزی تام برای J(n,w) با ماتریس $A=[a_{ij}]_{i,j=1,2}$ باشد. در این صورت عدد

$\frac{a_{21}}{a_{12}+a_{21}}\binom{n-i}{n-i+j}$ برای هر i,j که $0\leq i\leq j\leq k_1-1$ عددی صحیح است که در آن k_1 اندیس θ_{k_1} مقدار ویژه J(n,w) و همچنین کوچکترین ریشه چندجمله‌ای $f(l,n,w,a_{11},a_{21})$ است.

تعریف۲-۱۷: گراف G فاصله انتقالی است هرگاه برای هر دو زوج x,y و همچنین u,v که d(x,y)=d(u,v) یک اتومورفیسم روی G باشید که یک زوج را به یک زوج دیگر می‌برد.

گزاره۲-۱۸: [۵] یک گراف فاصله انتقالی، فاصله منتظم است.

قضیه۲-۱۹: [۴] گراف جانسون J(n,w) با قطر d، فاصله انتقالی با آرایه اشتراک

$b_j=(w-j)(n-w-j)$

$c_j=j^2$

$a_j=k-b_j-c_j$

می‌باشد که در آن k درجه رئوس و $0\leq j\leq d$ است.

ساختار ۱۰: [۴] مؤلفه $i\in\{1,\ldots,n\}$ را ثابت می‌گیریم. همه رئوس در J(n,w) که مؤلفه i ام آن صفر است را در W و بقیه را در B قرار می‌دهیم. در این صورت یک ۲-رنگ تام با ماتریس $\begin{bmatrix} w(n-w-1) & w \\ n-w & (w-1)(n-w)\end{bmatrix}$ برای J(n,w) به‌دست می‌آید.

قضیه۲-۲۰: [۴] دستگاه S(n,4,3) وجود دارد اگر و تنها اگر $n\equiv 1$ or 3 mod 6.

ساختار ۱۲: [۴] دستگاه S(n,w,w-1) در گراف J(n,w) را در نظر بگیرید. رأس‌های دستگاه را در W و بقیه رئوس را در B قرار دهید. در این صورت یک ۲-رنگ آمیزی تام با ماتریس پارامتر $\begin{bmatrix} 0 & w(n-w) \\ w & w(n-w-1)\end{bmatrix}$ به‌دست می‌آید.

نکته۲-۲۱: [۴] هرگاه $q\geq 5$ عددی فرد باشد، آنگاه یک ۳-(q+1,4,3) طرح وجود دارد.

ساختار ۱۴: [۴] اگر یک (n,w,λ)-۱ طرح در J(n,w) وجود داشته باشد. آنگاه رأس‌های موجود در طرح را در W و دیگر راس‌ها را در B قرار می‌دهیم. ۲-رنگ‌آمیزی تام برای گراف با ماتریس پارامتر $\begin{bmatrix} w(\lambda-1) & w(n-w)-w(\lambda-1) \\ \lambda w & w(n-w)-\lambda w\end{bmatrix}$ به‌دست می‌آید.

۳- بعضی از ماتریس پارامترهای ممکن برای ۲-رنگ آمیزی تام گراف J(10,4)

در این بخش ماتریس‌های پارامتر و ساختارهای مرتبط به آن را برای گراف J(10,4) به‌دست می‌آوریم. گراف J(10,4) ۲۴- منتظم و با قطر ۴ می‌باشد و تعداد رئوس آن ۲۱۰ رأس است که مقادیر ویژه آن عبارتند از:

$\theta_0=24,\ \theta_1=14,\ \theta_2=6,\ \theta_3=0,\ \theta_4=-4.$

برای پیدا کردن ۲-رنگ آمیزی‌های تام در J(10,4) ابتدا ماتریس‌هایی را پیدا می‌کنیم که شرط لازم قضیه ۲-۷ را داشته باشند. از آنجایی‌که J(10,4)، ۲۴منتظم است، لذا اگر $A=[a_{ij}]_{i,j=2}$ ماتریس پارامتریک ۲-رنگ‌آمیزی تام برای J(10,4) باشد آنگاه $a_{11}+a_{12}=a_{21}+a_{22}=24$ و ازآنجایی که درایه‌های اعداد صحیح نامنفی هستند، بنابراین $0\leq a_{11}\leq 24$. اکنون کار محاسبات را انجام می‌دهیم.

۱.حالت $a_{11}=24$. پس $A=\begin{bmatrix} 24 & 0 \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$. لذا داریم:

$\theta_0=24-a_{21}=24 \Rightarrow a_{21}=0$

$\theta_1=24-a_{21}=14 \Rightarrow a_{21}=10$

$\theta_2=24-a_{21}=6 \Rightarrow a_{21}=18$

$\theta_3=24-a_{21}=0 \Rightarrow a_{21}=24$

$\theta_4=24-a_{21}=-4 \Rightarrow a_{21}=28$

چون J(10,4) ۲۴- منتظم است، درایه‌های A بیش از ۲۴ نمی‌توانند باشند. پس $a_{21}=28$ قابل قبول نیست. برای حالت‌های $a_{21}=10,18,24$ چون داریم $a_{21}\neq 0$ و $a_{12}=0$ پس این حالت‌ها امکان‌پذیر نیست و فقط حالت $a_{21}=0$ باقی می‌ماند که $A_{1-1}=\begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 24\end{bmatrix}$.

۲.حالت $a_{11}=23$. پس $A=\begin{bmatrix} 23 & 1 \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$. لذا داریم:

$\theta_0=23-a_{21}=24 \Rightarrow a_{21}=-1$

$\theta_1=23-a_{21}=14 \Rightarrow a_{21}=9$

$\theta_2=23-a_{21}=6 \Rightarrow a_{21}=17$

$\theta_3=23-a_{21}=0 \Rightarrow a_{21}=23$

$\theta_4=23-a_{21}=-4 \Rightarrow a_{21}=27$

درایه‌های A باید نامنفی و همچنین بیشتر از ۲۴ نباشند پس مقادیری از A که باقی می‌مانند عبارتند از:

۳.حالت $a_{11}=22$. پس $A=\begin{bmatrix} 22 & 2 \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$. لذا داریم:

$\theta_0=22-a_{21}=24 \Rightarrow a_{21}=-2$

$\theta_1=22-a_{21}=14 \Rightarrow a_{21}=8$

$\theta_2=22-a_{21}=6 \Rightarrow a_{21}=16$

$\theta_3=22-a_{21}=0 \Rightarrow a_{21}=22$

θ_4=22-$a_{21} = -4 \Rightarrow a_{21} = 26$

درایه‌های A باید نامنفی و همچنین بیشتر از ۲۴ نباشند پس مقادیری از A که باقی می‌مانند عبارتند از:

$A_{3-1}=\begin{bmatrix}22 & 2\\ 8 & 16\end{bmatrix}, A_{3-2}=\begin{bmatrix}22 & 2\\ 16 & 8\end{bmatrix},$

$A_{3-3}=\begin{bmatrix}22 & 2\\ 22 & 2\end{bmatrix}.$

۴.حالت a_{11}=21. پس $A=\begin{bmatrix}21 & 3\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ و در نتیجه داریم:

θ_0=21-$a_{21} = 24 \Rightarrow a_{21} = -3$

θ_1=21-$a_{21} = 14 \Rightarrow a_{21} = 7$

θ_2=21-$a_{21} = 6 \Rightarrow a_{21} = 15$

θ_3=21-$a_{21} = 0 \Rightarrow a_{21} = 21$

θ_4=21-$a_{21} = -4 \Rightarrow a_{21} = 25$

درایه های A باید نامنفی و همچنین بیشتر از ۲۴ نباشند پس مقادیری از A که باقی می‌مانند عبارتند از:

$A_{4-1}=\begin{bmatrix}21 & 3\\ 7 & 17\end{bmatrix}, A_{4-2}=\begin{bmatrix}21 & 3\\ 15 & 9\end{bmatrix},$

$A_{4-3}=\begin{bmatrix}21 & 3\\ 21 & 3\end{bmatrix}.$

تا شماره ۲۵ روند به صورت فوق می‌باشد. لذا فقط ماتریس‌های بدست آمده را می‌نویسیم.

$A_{5-1}=\begin{bmatrix}20 & 4\\ 16 & 8\end{bmatrix}, \quad A_{5-2}=\begin{bmatrix}20 & 4\\ 14 & 10\end{bmatrix},$

$A_{5-3}=\begin{bmatrix}20 & 4\\ 20 & 4\end{bmatrix}, \quad A_{5-4}=\begin{bmatrix}20 & 4\\ 24 & 0\end{bmatrix},$

$A_{6-1}=\begin{bmatrix}19 & 5\\ 5 & 19\end{bmatrix}, \quad A_{6-2}=\begin{bmatrix}19 & 5\\ 13 & 11\end{bmatrix},$

$A_{6-3}=\begin{bmatrix}19 & 5\\ 19 & 5\end{bmatrix}, \quad A_{6-4}=\begin{bmatrix}19 & 5\\ 23 & 1\end{bmatrix}.$

$A_{7-1}=\begin{bmatrix}18 & 6\\ 4 & 20\end{bmatrix}, \quad A_{7-2}=\begin{bmatrix}18 & 6\\ 12 & 12\end{bmatrix}$

$A_{7-3}=\begin{bmatrix}18 & 6\\ 18 & 6\end{bmatrix}, \quad A_{7-4}=\begin{bmatrix}18 & 6\\ 22 & 2\end{bmatrix}$

$A_{8-1}=\begin{bmatrix}17 & 7\\ 3 & 21\end{bmatrix}, \quad A_{8-2}=\begin{bmatrix}17 & 7\\ 11 & 13\end{bmatrix}$

$A_{8-3}=\begin{bmatrix}17 & 7\\ 17 & 7\end{bmatrix}, \quad A_{8-4}=\begin{bmatrix}17 & 7\\ 21 & 3\end{bmatrix}$

$A_{9-1}=\begin{bmatrix}16 & 8\\ 2 & 22\end{bmatrix}, \quad A_{9-2}=\begin{bmatrix}16 & 8\\ 10 & 14\end{bmatrix}$

$A_{9-3}=\begin{bmatrix}16 & 8\\ 16 & 8\end{bmatrix}, \quad A_{9-4}=\begin{bmatrix}16 & 8\\ 20 & 4\end{bmatrix}$

$A_{10-1}=\begin{bmatrix}15 & 9\\ 1 & 23\end{bmatrix}, \quad A_{10-2}=\begin{bmatrix}15 & 9\\ 9 & 15\end{bmatrix}$

$A_{10-3}=\begin{bmatrix}15 & 9\\ 15 & 9\end{bmatrix}, \quad A_{10-4}=\begin{bmatrix}15 & 9\\ 19 & 5\end{bmatrix}$

$A_{11-1}=\begin{bmatrix}14 & 10\\ 8 & 16\end{bmatrix}, \quad A_{11-2}=\begin{bmatrix}14 & 10\\ 14 & 10\end{bmatrix}$

$A_{11-3}=\begin{bmatrix}14 & 10\\ 18 & 6\end{bmatrix},$

$A_{12-1}=\begin{bmatrix}13 & 11\\ 7 & 17\end{bmatrix}, \quad A_{12-2}=\begin{bmatrix}13 & 11\\ 13 & 11\end{bmatrix}$

$A_{12-3}=\begin{bmatrix}13 & 11\\ 17 & 7\end{bmatrix}$

$A_{13-1}=\begin{bmatrix}12 & 12\\ 6 & 18\end{bmatrix} \quad A_{13-2}=\begin{bmatrix}12 & 12\\ 12 & 12\end{bmatrix}$

$A_{13-3}=\begin{bmatrix}12 & 12\\ 16 & 8\end{bmatrix}$

$A_{14-1}=\begin{bmatrix}11 & 13\\ 5 & 19\end{bmatrix} \quad A_{14-2}=\begin{bmatrix}11 & 13\\ 11 & 13\end{bmatrix}$

$A_{14-3}=\begin{bmatrix}11 & 13\\ 15 & 9\end{bmatrix}$

$A_{15-1}=\begin{bmatrix}10 & 14\\ 4 & 20\end{bmatrix} \quad A_{15-2}=\begin{bmatrix}10 & 14\\ 10 & 14\end{bmatrix}$

$A_{15-3}=\begin{bmatrix}10 & 14\\ 14 & 10\end{bmatrix}$

$A_{16-1}=\begin{bmatrix}9 & 15\\ 3 & 21\end{bmatrix} \quad A_{16-2}=\begin{bmatrix}9 & 15\\ 9 & 15\end{bmatrix}$

$A_{16-3}=\begin{bmatrix}9 & 15\\ 13 & 11\end{bmatrix}$

$A_{17-1}=\begin{bmatrix}8 & 16\\ 2 & 22\end{bmatrix} \quad A_{17-2}=\begin{bmatrix}8 & 16\\ 8 & 16\end{bmatrix}$

$A_{17-3}=\begin{bmatrix}8 & 16\\ 12 & 12\end{bmatrix}$

$A_{18-1}=\begin{bmatrix}7 & 17\\ 1 & 23\end{bmatrix}, A_{18-2}=\begin{bmatrix}7 & 17\\ 7 & 17\end{bmatrix},$

$A_{18-3}=\begin{bmatrix}7 & 1\\ 11 & 13\end{bmatrix}.$

$A_{19-1}=\begin{bmatrix}6 & 18\\ 6 & 18\end{bmatrix}, \quad A_{19-2}=\begin{bmatrix}6 & 18\\ 6 & 18\end{bmatrix}$

$A_{20-1}=\begin{bmatrix}5 & 19\\ 5 & 19\end{bmatrix}, \quad A_{20-2}=\begin{bmatrix}5 & 19\\ 9 & 15\end{bmatrix}$

$A_{21-1}=\begin{bmatrix}4 & 20\\ 4 & 20\end{bmatrix}, \quad A_{21-2}=\begin{bmatrix}4 & 20\\ 8 & 16\end{bmatrix}$

$A_{22-1}=\begin{bmatrix}3 & 21\\ 3 & 21\end{bmatrix}, \quad A_{22-2}=\begin{bmatrix}3 & 21\\ 7 & 17\end{bmatrix}$

$A_{23-1}=\begin{bmatrix}2 & 22\\ 2 & 22\end{bmatrix}, \quad A_{23-2}=\begin{bmatrix}2 & 22\\ 6 & 18\end{bmatrix}$

$A_{24-1}=\begin{bmatrix}1 & 23\\ 1 & 23\end{bmatrix}, \quad A_{24-2}=\begin{bmatrix}1 & 23\\ 5 & 19\end{bmatrix}$

$A_{25-1}=\begin{bmatrix}0 & 24\\ 4 & 20\end{bmatrix}.$

حال با استففاده از قضیه ۲-۱۰، نکته ۲-۱۵ و گزاره ۲-۱۶ ماتریس هایی که شرط لازم را ندارند حذف می‌کنیم. پس از انجام محاسبات ۲۰ ماتریس زیر باقی می‌مانند.

$A_{1-1}=\begin{bmatrix}24 & 0\\ 0 & 24\end{bmatrix}, \quad A_{2-1}=\begin{bmatrix}23 & 1\\ 9 & 15\end{bmatrix}$

$$A_{3-1}=\begin{bmatrix}22 & 2\\ 8 & 16\end{bmatrix},\qquad A_{4-1}=\begin{bmatrix}21 & 3\\ 7 & 17\end{bmatrix}$$

$$A_{5-1}=\begin{bmatrix}20 & 4\\ 16 & 8\end{bmatrix},\qquad A_{5-4}=\begin{bmatrix}20 & 4\\ 24 & 0\end{bmatrix}$$

$$A_{6-1}=\begin{bmatrix}19 & 5\\ 5 & 19\end{bmatrix},\qquad A_{7-1}=\begin{bmatrix}18 & 6\\ 4 & 20\end{bmatrix}$$

$$A_{7-2}=\begin{bmatrix}18 & 6\\ 12 & 12\end{bmatrix},\qquad A_{8-1}=\begin{bmatrix}17 & 7\\ 3 & 21\end{bmatrix}$$

$$A_{9-1}=\begin{bmatrix}16 & 8\\ 2 & 22\end{bmatrix},\qquad A_{9-4}=\begin{bmatrix}16 & 8\\ 20 & 4\end{bmatrix}$$

$$A_{10-1}=\begin{bmatrix}15 & 9\\ 1 & 23\end{bmatrix},\qquad A_{10-2}=\begin{bmatrix}15 & 9\\ 9 & 15\end{bmatrix}$$

$$A_{13-1}=\begin{bmatrix}12 & 12\\ 6 & 18\end{bmatrix},\qquad A_{13-2}=\begin{bmatrix}12 & 12\\ 12 & 12\end{bmatrix}$$

$$A_{13-3}=\begin{bmatrix}12 & 12\\ 16 & 8\end{bmatrix},\qquad A_{17-3}=\begin{bmatrix}8 & 16\\ 12 & 12\end{bmatrix}$$

$$A_{21-2}=\begin{bmatrix}4 & 20\\ 8 & 16\end{bmatrix},\qquad A_{25-1}=\begin{bmatrix}0 & 24\\ 4 & 20\end{bmatrix}.$$

در ادامه ماتریس‌های فوق را بررسی می‌کنیم. از ساختار ۱۰ نتیجه می‌شود که ماتریس A_{5-1} یک ۲-رنگ‌آمیزی تام برای J(10,4) است. با جابجایی رنگ‌های سیاه و سفید که ماتریس A_{7-1} نیز یک ۲-رنگ‌آمیزی تام برای گراف J(10,4) است.

A_{25-1} نیز ماتریس پارامتر ۲-رنگ‌آمیزی تام برای J(10,4) است. زیرا $10 \equiv 4 \bmod 6$ و بنا به قضیه ۲-۲۰ داریم: S(10,4,3) وجود دارد و حال از ساختار ۱۲ حکم نتیجه می‌شود. با جابجایی رنگ‌های سفید و سیاه گره‌ها نتیجه می‌شود A_{5-4} نیز ماتریس پارامتر ۲- رنگ‌آمیزی تام برای گراف J(10,4) است.

A_{17-3} ماتریس پارامتر ۲- رنگ آمیزی تام برای گراف J(10,4) است. زیرا طبق نکته ۲-۲۱ یک (10,4,3)-3 طرح وجود دارد و از ساختار ۱۴ رنگ‌آمیزی تام به‌دست می‌آید. با جابجایی رنگ‌های سیاه و سفید که ماتریس A_{13-3} نیز یک ۲-رنگ‌آمیزی تام برای گراف J(10,4) است.

تا اینجا ۶ ماتریس از ۲۰ ماتریس فوق دارای ساختار هستند حال از ماتریس‌های باقی‌مانده آنهایی که ساختار ندارند را حذف می‌کنیم.

ماتریس A_{1-1} نمیتواند ماتریس پارامتر یک ۲- رنگ‌آمیزی تام برای گراف J(10,4) باشد زیرا بنا به قضیه ۲-۱۱، |w|=0 در حالی که $a_{11} \neq 0$.

با برهان خلف نشان می‌دهیم که ماتریس A_{2-1} نمی‌تواند ماتریس پارامتر یک ۲- رنگ‌آمیزی تام بترای گراف J(10,4) باشد. فرض کنیم که A_{2-1} ماتریس پارامتر یک ۲- رنگ‌آمیزی تام T={W,B} برای گراف J(10,4) باشد. با توجه به قضیه ۲-۱۱داریم که |W|=189,|B|=21. اگر x و y دو راس مجاور در B باشند، آنگاه با توجه به ماتریس مفروض، هرکدام دقیقا ۱۵ رأس همسایه در B دارند. حال از قضیه ۲-۱۹ داریم:

$$b_1 = 15, c_1 = 1, a_1 = 24 - 15 - 1 = 8.$$

بنابراین x و y، ۸ همسایه مشترک دارند. در بدترین حالت فرض کنیم این ۸ همسایه همگی در B قرار داشته باشند. در این صورت بنا بر این داریم: |B| ≥ 15+15-8=22 که یک تناقض است. بنا براین ماتریس A_{2-1} و با توجه به جابجایی رنگ‌های سفید و سیاه ماتریس A_{10-1} نمی‌توانند ماتریس پارامتر یک ۲- رنگ آمیزی تام بترای گراف J(10,4) باشند.

حال با استدلال مشابه ماتریس‌های A_{4-1}، A_{8-1}، A_{3-1} و A_{9-1} نمی‌توانند ماتریس پارامتر یک ۲- رنگ‌آمیزی تام بترای گراف J(10,4) باشند. و تکلیف ۷ ماتریس A_{6-1}، A_{7-2}، A_{21-2}،A_{9-4}، A_{10-2}، A_{13-1} و A_{13-2} بعنوان مسئله باز هنوز تعیین تکلیف نشده است.

۴- مراجع

[1] Alaeiyan M, and Abedi AA, "Perfect 2-colorings of Johnson graphs J(4, 3), J(4, 3), J(6,3) and Petersen graph," Ars Combinatorial, (to apear).

[2] Alaeiyan M, Karami H, "Perfect 2-colorings of the generalized Petersen graph, " Proceedings Mathematical Sciences. vol 126. pp. 1-6, 2016.

[3] Alaeiyan M and Mehrabani A. "Perfect 3-colorings of cubic graphs of order 10, " Electronic Journal of Graph Theory and Applications (EJGTA), vol.5, no.2, pp. 194-206, 2017.

[4] Avgustinovich S. V., Mogilnykh I. Yu. "Perfect 2-colorings of Johnson graphs J(6, 3) and J(7, 3)," Lecture Notes in Computer Science. vol. 5228, pp.11-19, 2008.

[5] Avgustinovich S. V., Mogilnykh I. Yu. " Perfect colorings of the Johnson graphs J(8, 3) and J(8, 4) with two colors. Journal of Applied and Industrial Mathematics, vol. 5, pp.19-30, 2011.

[6] Fon-Der-Flaass D. G. "A bound on correlation immunity," Siberian Electronic Mathematical Reports Journal, vol. 4, pp. 133-135, 2007.

[7] Fon-Der-Flaass D. G. "Perfect 2-colorings of a hypercube, " Siberian Mathematical Journal, vol. 4, pp.923-930, 2007.

[8] Fon-Der-Flaass D. G, "Perfect 2-colorings of a 12-dimensional Cube that achieve a bound of correlation immunity". Siberian Mathematical Journal, vol. 4, pp. 292-295, 2007.

[9] Gavrilyuk A. L. and Goryainov S.V. On perfect 2-colorings of Johnson graphs J(v,3). Journal of Combinatorial Designs, vol. 21, pp. 232-252, 2013.

[10] Godsil C and Gordon R. Algebraic graph theory. Springer Science+Business Media, LLC, 2004.

[11] Godsil C., "Compact graphs and equitable partitions," Linear Algebra and Its Application, 1997.