مجله علمی- پژوهشی "پدافند الکترونیکی و سایبری"

ویژه نامه کنفرانس ترکیبیات، رمزنگاری و محاسبات، ص ۱۵۶-۱۵۸

۲–رنگ آمیزی تام گراف هی‌وود

مهدی علائیان

۱- استاد تمام دانشگاه علم و صنعت ایران

(دریافت: ۹۵/۰۷/۰۵، پذیرش: ۹۶/۰۳/۰۱)

چکیده

یک کلیت از مفهوم کدهای کاملا منتظم، توسط دلسارته ارائه شده است. رنگ آمیزی تام گراف G با m رنگ، یک افراز از مجموعه رئوس G به m بخش A1, . . . , Am است که برای همه {1,...,m} i; j، هر راس از Ai دارای تعداد یکسانی مجاور از Aj است که آن را aij می‌نامیم و ماتریس A = (aij) i;j {1,2,...,m} را ماتریس پارامتر نامگذاری می کنیم. ما در این مقاله ۲-رنگ آمیزی تام (افراز منصفانه به ۲ بخش) گراف هی‌وود را بررسی کرده و به طور خاص همه ماتریس های پارامتر ۲-رنگ آمیزی تام گراف هی‌وود را طبقه بندی می کنیم.

واژه‌های کلیدی: گراف هی‌وود، ماتریس پارامتر، ۲-رنگ آمیزی تام

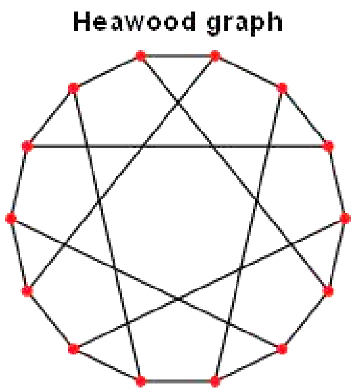
۱- مقدمه

در سال ۱۹۷۳ دلسارته اقدام به معرفی خانواده ای از کدها کرد که از خواص ترکیبیاتی جالبی برخوردار بودند. او این کدها را کدهای کاملا منتظم نامید و در همان زمان حدسی را مطرح کرد که هنوز یکی از سوال های اساسی در زمینه کدگذاریی و نظریه گراف می باشد؛ هیچ کد تام غیر بدیهی در گراف جانسون وجود ندارد. برای دانستن ارتباط بین حدس یاد شده و کدهای کاملا منتظم، ذکر این نکته کافیست که هر کد تام یک کد کاملا منتظم است. در واقع دلسارته برای اثبات حدس خود ترجیح داد که کدهای کاملا منتظم در گرافهای جانسون یافته و سپس نشان دهد که هیچ کدام از این کدها، کد تام غیر بدیهی نیست. اصطلاح افراز منصفانه ابتدا توسط هایناس وورس در مطالعه ماتریسهای منصفانه مطرح شد . همچنین ساکس و دیگران از افرازهای منصفانه به عنوان ابزاری برای محاسبه چند جمله¬ای مشخصه یک گراف استفاده کردند. نویمار نشان داد که هر زیر مجموعه از رئوس گراف یک کد کاملا منتظم است اگر و تنها اگر افراز فاصله آن، منصفانه باشد. تا کنون نتایج بسیاری در زمینه رده بندی ماتریس های پارامتر برای گرافهای مختلف بدست آمده است در این مقاله به ۲- رنگ آمیزی تام گراف هی‌وود می پردازیم.

۲- مفاهیم مقدماتی

در این بخش تعاریف، قضایا و مفاهیم اولیه را بیان می‌کنیم.

تعریف ۲-۱: گراف هی‌وود که در شکل زیر دیده می‌شود، یک گراف بدون جهت با ۱۴ رأس و ۲۱ یال است، که ۳- منتظم است و هم دوبخشی و هم همیلتونی است و در هر دور حداقل ۶ یال وجود دارد. این گراف به افتخار پرسی جان هی‌وود به این نام نام‌گذاری شده است.



شکل ۱. گراف هی وود

تعریف ۲-۲: هر رنگ آمیزی گراف G با m رنگ را یک m– رنگ آمیزی تام با ماتریس $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ گوییم هرگاه هر راس به رنگ i، تعداد a_{ij} راس مجاور به رنگ j داشته باشد. به ماتریس A ماتریس پارامتر گوییم. در حالت m=2 رنگ اول را قرمز و رنگ دوم را آبی در نظر میگیریم.

نتیجه: هر m– رنگ آمیزی تام در گراف G را می توان به صورت یک نگاشت $T: V(G) \to \{1,2,\dots,m\}$ در نظر گرفت که خاصیت ذکر شده در تعریف را داشته باشد.

[1] رایانامه نویسنده مسئول: alaeiyan@iust.ac.ir

قضیه ۲-۳: اگر Tیک رنگ آمیزی تام گراف G با m رنگ باشد آنگاه هر مقدار ویژه T، یک مقدار ویژه ماتریس مجاورت G است.
برهان [۲].

قضیه ۲-۴: فرض کنید G یک گراف k- منتظم و T یک m– رنگ آمیزی تام با ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times m}$ در گراف Gباشد. در این صورت مجموع مقادیر هر سطر در ماتریس A برابر k است.

برهان. فرض کنید v یک راس دلخواه به رنگ i باشد. تعداد رئوس مجاور v به رنگ j برابر a_{ij} است. از طرفی از طرفی تعداد رئوس مجاور v برابر k میباشد. بنابر این $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}=k$. در نهایت از آنجا که راس v دلخواه انتخاب شده بود ، قضیه به اثبات میرسد.

قضیه ۲-۵: فرض کنید T یک ۲-رنگ آمیزی تام با ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در گراف همبند G باشد. در این صورت $b,c\neq0$.

برهان. فرض کنید $b=0$ باشد. در این صورت هر راس به رنگ آبی هیچ راس مجاوری به رنگ قرمز ندارد. درنتیجه هر راس به رنگ قرمز نیز هیچ راس مجاوری به رنگ آبی ندارد. بنابراین رئوس به رنگ آبی و قرمز تشکیل دو مولفه همبندی می‌دهند که با همبندی گراف در تناقض است.

قضیه ۲-۶: چنانچه گراف G دارای یک ۲- رنگ آمیزی تام با ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد آنگاه دارای ۲-رنگ آمیزی تام با ماتریس $\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$ نیز میباشد.

برهان. با تعویض رنگ های قرمز و آبی، نتیجه حاصل می شود.

قضیه ۲-۷: فرض کنید R نشان دهنده مجموعه تمام رئوس قرمز در یک ۲- رنگ آمیزی تام با ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در گراف همبند G باشد در این صورت

$$|R|=|V(G)|\frac{c}{b+c}$$

برهان. با حذف یالهای بین رئوس قرمز و نیز حذف یالهای بین رئوس آبی، گراف دو بخشی بدست آمده با بخشهای مجموعه رئوس قرمز و مجموعه رئوس آبی را در نظر بگیرید. در این گراف هر راس به رنگ قرمز تعداد b راس مجاور به رنگ آبی دارد. بنابراین تعداد یالها در این گراف برابر $|R|b$ است. از طرف دیگر هر راس به رنگ آبی، تعداد c راس مجاور به رنگ قرمز دارد. درنتیجه تعداد یالها در این گراف برابر $|B|c$ می باشد. از آنجا که $|R|+|B|=|V(G)|$ لذا

$$|V(G)|=|R|+|B| \\ =|R|+\frac{b}{c}|R| \\ =\left(\frac{b+c}{c}\right)|R|$$

درنتیجه حکم خواسته شده به سادگی بست می آید.

نتیجه ۲-۸: فرض کنید $|B|$ نشان دهنده مجموعه تمام رئوس آبی در یک ۲-رنگ آمیزی تام با ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در گراف همبند G باشد در این صورت

$$|B|=|V(G)|\frac{b}{b+c}$$

قضیه ۲-۹: فرض کنید T یک ۲- رنگ آمیزی تام با ماتریس پارامتر $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در گراف k- منتظم G باشد. در این صورت مقادیر ویژه ماتریس پارامتر برابر k و $a-c$ هستند.

برهان. از آنجا که میدانیم مجموع تمامی سطرها برابر k است به سادگی میتوان دید که $\lambda_1=1$ یک مقدار ویژه با بردار متناظر $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ است. برای بدست آوردن مقدار ویژه دیگر λ_2 ابتدا توجه کنید که $\lambda_1+\lambda_2=\operatorname{tr}A=a+d$ لذا $\lambda_1=a+d-k$. اما $c+d=k$. در نتیجه $\lambda_2=a+d-k=a+d-c=a-c$.

۳- قضیه اصلی

قضیه ۳-۱: اگر A ماتریس پارامتر متناظر با یک ۲- رنگ آمیزی تام در گراف هی‌وود باشد آنگاه A باید یکی از ماتریسهای زیر باشد: نوشته شوند.

$$A_1=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\quad A_2=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\quad A_3=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\quad A_5=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\quad A_6=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

برهان. با استفاده از قضایای ۲-۴ ،۲-۵ ،۲-۶ و محاسبات ابتدایی به سادگی قابل اثبات است.

قضیه ۳-۲: مقدار ویژه‌های صحیح گراف هی‌وود عبارتند از {۳،-۳}.

برهان [۳].

قضیه ۳-۳: گراف هی‌وود هیچ ۲-رنگ آمیزی با ماتریس های A_1،A_2،A_3A_4 و A_5 ندارد.

برهان. با استفاده از قضایای ۲-۳، ۲-۷ ،۲-۹ و ۳-۲ نتیجه حاصل می شود.

قضیه ۳-۴: گراف هی‌وود دارای ۲- رنگ آمیزی تام با ماتریس A_6 میباشد.

برهان. برای این ۲- رنگ آمیزی یک ساختار رائه می دهیم. رئوس گراف هی‌وود را به ترتیب در جهت ساعتگرد از a_1

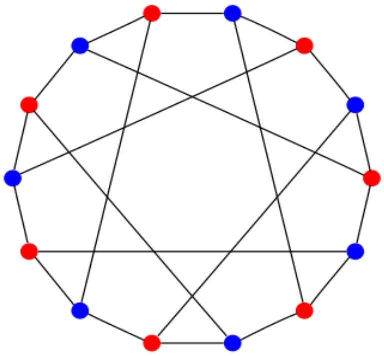
تا a_{14} نام گذاری می‌کنیم. برای هر عدد صحیح و مثبت m ، نگاشت $T : V(G) \to \{1,2\}$ را برای $0 \le k \le 7$ به صورت زیر در نظر بگیرید :

$$T(a_{2k}) = 1 \qquad 1 \le k \le 7$$
$$T(a_{2k+1}) = 2 \qquad 0 \le k \le 6$$

نگاشت داده شده یک ۲- رنگ آمیزی تام با ماتریس A_6 است.

۴- نتیجه گیری

در گراف هی‌وود که با ماتریس A_6 به صورت زیر و با رنگهای آبی و قرمز رنگ آمیزی به صورت زیر رنگ آمیزی شده است، مشاهده می‌شود که هر رأس که با رنگ آبی رنگ آمیزی شده است با ۳ راس با رنک قرمز مجاور است و هیچ مجاوری با رنگ آبی ندارد و بر عکس.



شکل ۲. رنگ آمیزی تام گراف هی وود

۵- مراجع

[1] A.L. Gavrilyuk and S.V. Goryainov,"On perfect 2-colorings of Johnson graphs J (v, 3)," Journal of Combinatorial Designs, Volume 21, 232-252, 2013.

[2] D. G. Fon-Der-Flaass,"Perfect 2-colorings of a hypercube," Siberian Mathematical Journal, Volume 4, 923-930, 2007.

[3] Heawood, P. J. "Map colouring theorems". Quarterly J. Math. Oxford Ser. 24: 322–339 1980.

[4] M. Alaeiyan and A. Abedi, "Perfect 2-colorings of Johnson graphs J(4, 3), J(4, 3), J(6, 3) and Petersen graph" Ars Combinatoria,(to appear)

[5] M. Alaeiyan, H. Karami,"Perfect 2-colorings of the generalized Petersen graph," Proceedings Mathematical Sciences, Volume 126, 1-6, 2016.

[6] S. V. Avgustinovich, I. Yu. Mogilnykh, "Perfect 2-colorings of Johnson graphs J(6, 3) and J(7, 3)," Lecture Notes in Computer Science, Volume 5228 11-19, 2008.

[7] S. V. Avgustinovich, I. Yu. Mogilnykh,"Perfect colorings of the Johnson graphs J (8, 3) and J (8, 4) with two colors" Journal of Applied and Industrial Mathematics, Volume 5 19-30, 2011.