مجله علمی- پژوهشی "پدافند الکترونیکی و سایبری"

ویژه‌نامه کنفرانس بین‌المللی ترکیبیات، رمزنگاری و محاسبات، ص ۲۰ -۱۷

# نکاتی در رابطه با کدهای تام گراف‌های فاصله متوازن

حسن خرازی[۱*]، مهدی علائیان[۲]، حسین شبانی[۳]

۱- استادیار، دانشگاه امام حسین (ع) ۲- استاد، دانشگاه علم و صنعت ایران ۳- دکتری ریاضی، دانشگاه کاشان

(دریافت: ۹۵/۰۷/۰۵، پذیرش: ۹۶/۰۳/۰۷)

## چکیده

در این مقاله به بررسی وجود کدهای تام در برخی از خانواده‌های گراف‌های فاصله متوازن می‌پردازیم. هم‌چنین برخی نتایج در رابطه با وجود کدهای تام در حاصل‌ضرب دورها و توان‌های این نوع گراف نیز آورده شده است.

**واژه‌های کلیدی**: گراف‌های فاصله متوازن، کد تام، توان گراف

## ۱- مقدمه

کدهای تام در گراف به عنوان تعمیمی از کدهای تام در نظریه کد معرفی گردید و شرایط لازم برای وجود این نوع کدها در برخی از خانواده‌های گراف‌ها مورد بررسی قرار گرفت [۱]. این مفهوم مورد توجه محققین در این زمینه قرار گرفت و به بررسی و تعیین وجود آن در گراف‌ها پرداختند [۲]. مسأله تعیین وجود کد تام در یک گراف، یک مسأله $NP$- سخت است [۳]. بنابراین، برای گراف داده‌شده $G$ تعیین وجود یک کد تام در آن، از مسائل مورد علاقه محققین است و لذا در این زمینه سوالات زیر مطرح است: برای گراف داده‌شده $G$، آیا این گراف شامل یک کد تام است؟ اگر $G$ شامل یک کد تام باشد آن‌گاه این کد به چه صورتی است؟

منظور از یک گراف در این مقاله یک گراف ساده که فاقد یال‌های چندگانه و طوقه می‌باشد. فرض کنید $G$ یک گراف با مجموعه رأس‌های $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ است. اگر $u$ و $v$ دو رأس گراف $G$ باشند آن‌گاه یک مسیر بین آن‌ها دنباله‌ای از رأس‌ها و یال‌هاست که هیچ رأس و یالی در آن تکرار نشده است. گراف همبند، گرافی است که بین هر دو رأس آن یک مسیر وجود داشته باشد. طول یک مسیر برابر با تعداد یال‌های آن است. طول یک کوتاه‌ترین مسیر بین رأس $u$ و $v$ را فاصله بین آن‌ها نامیده و با $d(u,v)$ و یا به‌صورت $d_G(u,v)$ نشان داده می‌شود. قطر گراف $G$ که با $diam(G)$ نشان داده می‌شود برابر با بیش‌ترین فاصله ممکن بین همه رأس‌های گراف است.

فرض کنیم $v \in V(G)$ و $r$ یک عدد صحیح مثبت است. در این صورت، یک گوی به مرکز $v$ و شعاع $r$ عبارت است از زیرمجموعه‌ای از رأس‌ها به صورت

$$B(v,r) = \{x \in V(G) : d(v,x) \leq r\}.$$

**تعریف:** فرض کنید $G$ یک گراف است. در این صورت هر زیرمجموعه مانند $C$ از $V(G)$ را یک کد و هریک از عناصر آن را یک کدواژه می‌نامیم. کد $C$ را یک کد $t$- تام گوییم هرگاه همه گوی‌ها به شعاع $t$ و مرکز کدواژه‌ها تشکیل یک افراز برای $V(G)$ بدهند. در حالت خاص $t = 1$، کد 1-تام را کد تام می‌نامند.

اگر $C$ یک کد $t$- تام باشد آن‌گاه گوی‌های $B(v,t)$ که $v \in C$، مجزا هستند و تمام رئوس گراف را می‌پوشانند. فرض بر این است که گراف همبند است، زیرا در غیر این صورت، هر مولفه گراف باید شامل کد $t$- تام باشد. در حالتی که $C$ یک کد تام است داریم:

- برای هر دو رأس $u$ و $v$ از $C$، $d(u,v) \geq 3$،
- هر رأس که در $C$ قرار ندارد حداکثر با یک کدواژه مجاور است.

در ادامه به معرفی گراف فاصله متوازن می‌پردازیم. گراف‌های فاصله متوازن ابتدا توسط هاندا (Handa) [۴] در سال ۱۹۹۹ در رابطه با مکعب‌های جزئی مورد بررسی قرار گرفت و سپس این مفهوم در سال ۲۰۰۸ در [۵] به صورت رسمی معرفی و در چارچوب حاصل‌ضرب‌های گوناگون گراف مطالعه گردید.

* رایانامه نویسنده مسئول: hkharazi@ihu.ac.ir

فرض کنید $G$ یک گراف و $ab$ یال دلخواهی از آن است. در این صورت مجموعه همه رئوسی که به $a$ نسبت به $b$ نزدیک‌تر هستند را با $W_{ab}^G$ نشان می‌دهند. به عبارت دیگر:

$$W_{ab}^G = \{u \in V(G): d(u,a) < d(u,b)\}.$$

به طریق مشابه مجموعه $W_{ba}^G$ تعریف می‌شود. هم‌چنین مجموعه ${}_aW_b^G$ به صورت مجموعه رئوسی است که فاصله آن‌ها از دو رأس $a$ و $b$ به یک اندازه است. به بیان دیگر:

$${}_aW_b^G = \{u \in V(G): d(u,a) < d(u,b)\}.$$

برای یال $ab$ سه مجموعه $W_{ab}^G$، $W_{ba}^G$ و ${}_aW_b^G$ یک افراز رأسی برای $G$ ارائه می‌دهند.

**تعریف:** گراف $G$ را فاصله متوازن گویند هرگاه برای هر یال $ab$ از آن $|W_{ab}^G| = |W_{ba}^G|$.

در این مقاله وجود کدهای t-تام در برخی گراف‌های فاصله متوازن بررسی خواهند گردید.

## ۲- کدهای تام در گراف‌های فاصله متوازن

در این بخش به بررسی وجود کدهای تام در برخی گراف‌های فاصله متوازن خواهیم پرداخت. با استفاده از اعمال روی گراف‌ها، می‌توان گراف‌های فاصله متوازن جدیدی ساخت [۶]. پژوهشگران بسیاری در رابطه با وجود کدهای تام در حاصل‌ضرب گرافها مطالعه نموده‌اند [۷-۹]. یکی از این حاصل‌ضرب‌ها، ضرب دکارتی دو گراف $G$ و $H$ $(G \times H)$ است که مجموعه رئوس و یال‌های آن برابر است با:

$$V(G \times H) = V(G) \times V(H),$$
$$E(G \times H) = \{(a,b)(c,d): [ac \in E(G) \& b = d] \vee [a = c \;\&\; bd \in E(H)]\}.$$

فرض کنید $G$ و $H$ دو گراف هم‌بند هستند. در این صورت $G \times H$ یک گراف فاصله متوازن است اگر و تنها اگر هر دو گراف $G$ و $H$ فاصله متوازن باشند [۵].

گراف دور $C_n$ با $n$ رأس، فاصله متوازن بوده و لذا حاصل‌ضرب دکارتی تعدادی از دورها نیز فاصله متوازن هستند و در قضیه زیر وجود کدهای تام در این نوع از گراف‌ها را بیان می‌کند.

**قضیه ۱ [۱۰، قضیه ۶-۲]:** فرض کنید $G$ دورهای $C_{n_1}$، ...، $C_{n_r}$ برای $r > 1$ است. در این صورت $G$ دارای یک کد $t$-تام است اگر هر $n_i$ مضربی از $t^r + (t+1)^r$ باشد. به علاوه، یک کد $t$-تام از $G$ توسط $r$ رأس تعیین می‌گردد.

گراف ابر-مکعب $n$-بعدی $Q_n$ شامل $2^n$ رأس به صورت دنباله‌ای از $n$-تایی‌های دودویی است که دو رأس باهم مجاور هستند هرگاه تنها در یک مولفه اختلاف داشته باشند. این گراف فاصله متوازن بوده و دارای کد ۱- تام است اگر و تنها اگر $n + 1$ توانی از ۲ باشد. در حالت کلی، قضیه زیر را می‌توان به راحتی نتیجه گرفت.

**قضیه ۲:** یک شرط لازم برای وجود یک کد $t$- تام در $Q_n$ آن است که $\binom{n}{r+1}/\binom{2r+1}{r}$ یک مقدار صحیح باشد.

اثبات. با استفاده از [۱۱] به راحتی حکم به دست می‌آید.

**قضیه ۳ [۸، نتیجه ۸]:** فرض کنید $G$ یک گراف دوبخشی و $k$ یک عدد صحیح مثبت است. در این صورت حاصل‌ضرب دکارتی $2^k$ کپی از $G$ با ابرمکعب $Q_{2^k-1}$ دارای کد تام است.

فرض کنید $\Gamma$ یک گروه متناهی و $S$ زیرمجموعه‌ای از اعضای آن است به‌طوری‌که شامل همانی نیست، $S = S^{-1}$ و $\Gamma$ را تولید می‌کند. در این صورت، گراف کیلی $Cay(\Gamma, S)$ یک گراف $|S|$- منتظم با مجموعه رئوس $V = \Gamma$ و مجموعه یال‌های $E = \{ab : a^{-1}b \in S\}$.

**لم ۴:** گراف کیلی $Cay(G,S)$ یک گراف فاصله متوازن است.

**اثبات:** گراف کیلی یک گراف رأس انتقالی است و لذا فاصله متوازن خواهد بود.

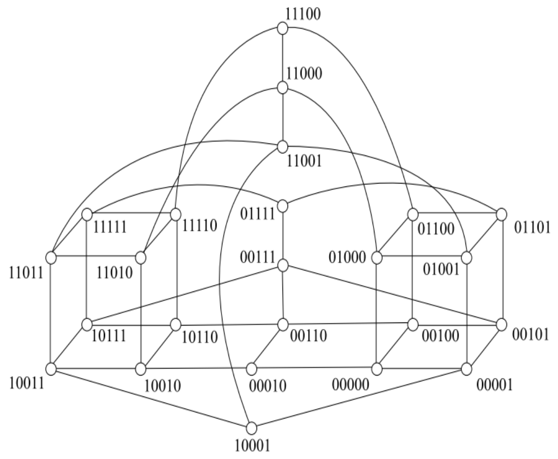
**قضیه ۵ [۸، لم ۹]:** گراف کیلی $G = Cay(\Gamma, S)$ را در نظر بگیرید که $\Gamma$ یک گروه آبلی است. در این صورت $G$ دارای کد تام است.

فرض کنید $q$ یک عدد صحیح مثبت است و گراف کیلی $K_{2^q,2^q} \times Q_{2^q-1}$ را در نظر بگیرید که در آن $K_{2^q,2^q}$ گراف دوبخشی کامل است. بنابر مطالب اخیر، نتیجه زیر به‌دست می‌آید:

**نتیجه ۶ [۸، نتیجه ۱۱]:** برای هر دو عدد صحیح مثبت $q$ و $n$، گراف $K_{2^q,2^q}^{2^n} \times Q_{2^{q+n}-1}$ دارای کد تام است.

گراف‌های فاصله متوازن شامل بسیاری از خانواده‌های معروف گراف‌ها مانند گراف‌های رأس انتقالی، شبه‌متقارن، پترسن تعمیم یافته و ... می‌باشند. بسیاری از این گراف‌ها، گراف‌هایی منتظم هستند. هم‌چنین گراف‌های نامنتظمی با خاصیت فاصله متوازن بودن وجود دارد. یکی از گراف‌های مشهور فاصله متوازن گرف معرفی شده توسط هاندا شکل (۱) است که آن را به عنوان یک گراف فاصله متوازن نامنتظم معرفی کرد. این گراف یک مکعب

جزئی بوده و قابل نشاندن در ابرمکعب $Q_5$ است [به مرجع ۴رجوع شود].



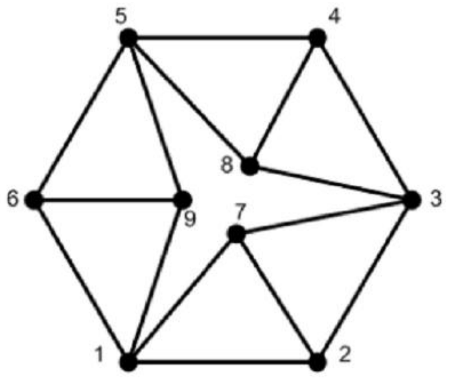

**شکل (۱):** گراف هاندا

گراف هاندا دارای کد تام نمی‌باشد که در قضیه زیر به آن اشاره شده است.

**قضیه ۷:** گراف هاندا شامل کد ۱- تام نیست.

**اثبات:** بررسی عدم وجود کد تام در گراف هاندا ساده است و به‌راحتی با توجه به شکل گراف به‌دست می‌آید.

در میان گراف‌های با تعداد حداکثر ۱۰ رأس، گراف شکل (۲) تنها گراف فاصله متوازن نامنتظم و غیردوبخشی است [۶].




**شکل (۲):** گراف $G_1$

فرض کنید $k$ یک عدد صحیح نامنفی است. در این صورت برای $n = 6k + 3$، گراف دور $C_{4k+2}$ با رئوس برچسب‌دار ۱، ۲، ...، $4k + 2$ را در نظر بگیرید و به آن رأس‌هایی با برچسب $4k + 3$، $4k + 4$، ...، $6k + 3$ به گونه‌ای اضافه کنید که رأس $4k + 3$ مجاور رئوس ۱، ۲ و ۳، رأس $4k + 4$ مجاور رئوس ۴، ۵ و ۶، ... و در نهایت رأس $6k + 3$ مجاور رئوس $4k + 1$، $4k + 2$ و ۱ باشد. گراف به‌دست‌آمده از روش فوق را گراف $G_k$ نامیده می‌شود که گرافی نامنتظم است. گراف $G_k$ فاصله متوازن است. دلیل این مطلب آن است که در این گراف هر یال فقط به یکی از سه شکل زیر است:

- یال‌ها از نوع $e = \{i, i + 1\}$، $i = 1,2, \dots ,4k + 2$؛
- یال‌ها از نوع $e = \{2i, 4k + i + 2\}$، $i = 1,2, \dots ,4k + 1$؛
- یال‌ها از نوع $e = \{2i \pm 1, 4k + i + 2\}$، $i = 1,2, \dots ,4k + 1$؛

و در هر یک از حالات فوق مشاهده می‌کنیم که $|W_{ab}| = |W_{ba}| = 3k + 1$.

**قضیه ۸:** گراف $G_k$ دارای کد تام است اگر و تنها اگر $k = 3t + 1$ که در آن $t$ یک عدد صحیح نامنفی است.

**اثبات:** مجموعه رئوس $G_k$ را به سه دسته تقسیم می‌کنیم:

- دسته اول $V_1$: رئوسی که با $4k + 3$، ...، $6k + 3$ نام‌گذاری شده اند.
- دسته دوم $V_2$: رئوس درجه ۴ روی دور $C_{4k+2}$ که با دو رأس از رئوس دسته $V_1$ مجاور هستند.
- دسته سوم $V_3$: رئوس درجه ۳ روی دور $C_{4k+2}$ که با یک رأس از رئوس دسته $V_1$ مجاور هستند.

حال فرض کنید $C \subset C(G_k)$ یک کد تام و $c_1 \in C$. بدون کاستن از کلیت مسأله، فرض می‌کنید $c_1 \in V_2$. در این صورت لزوماً رأس بعدی $c_2 \in C$ در فاصله ۳ از $c_1$ قرار دارد و لذا $c_2 \in V_1$ یا $c_2 \in V_3$. فرض کنید $c_2 \in V_3$ و این مطلب در وجود کد تام تأثیری ندارد. به همین ترتیب لزوماً $c_3 \in V_2$ و ... . بنابراین، کد $C$ را می‌توان به صورت $c_1$، $c_2$، ...، $c_r$ در نظر گرفت که $r$ یک عدد صحیح مثبت است و تمام $c_i$ها روی دور $C_{4k+2}$ قرار دارند که در آن، $d(c_r, c_1) = 3$. این مطلب ایجاب می‌کند که $C_{4k+2}$ باید دوری به طول $3s$ باشد که $s$ عددی صحیح و مثبت است و در نتیجه $4k + 2 = 3s$. این امر تنها زمانی برقرار است که $k = 3t + 1$ که $t$ یک عدد صحیح نامنفی است.

در ادامه خاصیت فاصله متوازن‌بودن توان یک گراف فاصله متوازن بررسی خواهد گردید. سپس با استفاده از آن وجود کدهای تام در توان‌های گراف‌هایی که فاصله متوازن هستند، بررسی خواهد شد.

توان $k$-ام گراف $G$ را با $G^k$ نشان‌داده و عبارتی است از گرافی با مجموعه رئوس $V(G^k) = V(G)$ و دو رأس در آن با هم مجاور هستند اگر و تنها اگر فاصله آن‌ها در $G$ حداکثر $k$ باشد.

اگر حداقل مقدار $k$ برابر با قطر گراف باشد آن‌گاه توان $k$-ام گراف برابر با گراف کامل است. هم‌چنین برای یک رأس مانند $x$ از گراف همبند $G$ و یک عدد صحیح و نامنفی $k$، مجموعه تمام رئوس به فاصله $k$ را با نماد $N_k(x)$ نشان داده می‌شود. به عبارت دیگر:

$$N_k(x) = \{y \in V(G) : d(x, y) = k\}.$$

**قضیه ۹:** فرض کنید $G$ یک گراف و $k$ یک عدد صحیح مثبت است. در این صورت اگر گراف $G$ فاصله متوازن باشد آن‌گاه توان $k$- ام آن $G^k$ نیز فاصله متوازن است.

**اثبات:** فرض کنید $xy$ یالی از گراف $G^k$ است. در این صورت اگر $xy$ یالی از گراف $G$ باشد آن‌گاه مجموعه رئوس $N_k(x) \cup N_{2k}(x) \cup \ldots$ در $W_{xy}^{G^k}$ قرار دارد و بقیه مجموعه‌های $N_i(x)$ که در آن $i \neq lk$، در ${}_xW_y^{G^k}$ قرار دارند. به طریق مشابه، حکم برای هر یال در $G^k$ برقرار است.

**قضیه ۱۰ [۱۱، گزاره ۲]:** فرض کنید $C_n$ گراف دور با $n$ رأس است. در این صورت $C_n^2$ دارای کد تام است اگر و تنها اگر $n$ مضربی از ۵ باشد. به‌علاوه، چنین کدی دارای $\frac{n^2}{5}$ کدواژه است.

مکمل گراف $G$ گراف $\bar{G}$ است که $V(\bar{G}) = V(G)$ و دو رأس در $\bar{G}$ مجاورند اگر و تنها اگر در $G$ مجاور نباشند. در حالتی که گراف $G$ و گراف $\bar{G}$ یک‌ریخت باشند، گراف را خودمکمل گویند. برای مثال گراف مسیر $P_4$ و دور $C_5$ چنین هستند. مجموعه $\{(v, v): v \in V(G)\}$ یک کد تام در $G \times \bar{G}$ است و لذا برای هر دو گراف $G$ و $H$، گراف $G \times (H \times (\overline{G \times H}))$ دارای کد تام است. بنابراین، برای هر گراف $G$، نامتناهی گراف مانند $H$ وجود دارد که $G \times H$ دارای کد تام است [۱۱].

**قضیه ۱۱ [۱۱، گزاره ۳]:** اگر $G$ یک گراف خودمکمل با $n$ رأس باشد، آن‌گاه $G^2$ شامل کدتام از اندازه $n$ است.

## ۴- نتیجه‌گیری

کدهای تام به جهت آن‌که از نظر تصحیح خطا مناسب هستند، مورد توجه پژوهشگران در این حوزه می‌باشد. بدین منظور ما به معرفی دسته خاصی از این کدها به نام کدهای فاصله متوازن می‌پردازیم. فرض کنید $C$ یک کد و $d(x, y)$ بیان‌گر فاصله بین کدواژه‌های $x$ و $y$ است. در این صورت گوییم $x$ و $y$ مجاورند اگر فاصله بین آن‌ها کمترین مقدار را داشته باشد. قرار دهید:

$$N_x(xy) = \{c \in C : d(c, x) < d(c, y)\},$$

$$N_y(xy) = \{c \in C : d(c, y) < d(c, x)\},$$

$$N_0(xy) = \{c \in C : d(c, x) = d(c, y)\}.$$

سه مجموعه فوق تشکیل یک افراز برای کد C می‌دهند. کد C را "کد فاصله متوازن" گوییم اگر و تنها اگر برای هر دو کد مجاور $x$ و $y$ داشته باشیم $N_x(xy) = N_y(xy)$. برای مثال فرض کنید $C$ کد تام حاصل از گراف $C_n$ برای $n = 3k$ است. در این صورت $C$ فاصله متوازن خواهد بود.

## ۵- مراجع

[1] N. Biggs, "Perfect Codes in Graphs," J. Combin. Theory, Ser. B, vol. 15, pp. 289–296, 1973.

[2] F. J. MacWilliams and N. J. A. Sloane, "The Theory of Error-Correcting Codes," North-Holland, 8th impression, 1993.

[3] I. Dvorakova-Rulicova, "Perfect Codes in Regular Graphs," Comment. Math. Univ. Carolinae, vol. 29, pp. 79–83, 1988.

[4] K. Handa, "Bipartite Graphs with Balanced (a, b)-partitions," Ars Combin., vol. 51, pp. 113–119, 1999.

[5] J. Jerebic, S. Klavˇzar, and D. F. Rall, "Distance-Balanced Graphs," Ann. Combin. vol. 12, pp. 71-79, 2008.

[6] A. Ilić, S. Klavžar, and M. Milanović, "On Distance-Balanced Graphs," European Journal of Combinatorics, vol. 31, no. 3, pp. 733-737, 2010.

[7] S. Klavzar, S. Spacapan, and J. Zerovnik, "An Almost Complete Description of Perfect Codes in Direct Product of Cycles," Adv. in Appl. Math., vol. 37, no. 1, pp. 2-18, 2006.

[8] M. Mollard, "On Perfect Codes in Cartesian Product of Graphs," European Journal of Combinatorics, vol. 32, no. 3, pp. 398-403, 2010.

[9] J. Zerovnik, "Perfect Codes in Direct Products of Cycles, a Complete Characterization," Adv. in Appl. Math., vol. 41, no. 2, pp. 197-205, 2008.

[10] S. Spacapan, "Perfect Codes in Direct Products of Cycles," Electronic Notes in Discrete Mathematics, vol. 22, pp. 201-205, 2005.

[11] J. Kratochvil, "1-Perfect Codes over Self-Complementary Graphs," Comment. Math. Univ. Carolinae, vol. 26, pp. 589–595, 1985.

[12] J. H. VanLint, "Coding theory (Lecture Notes in Mathematics)," 1973.