کنترل بهینه ی سیستم کوانتومی سه ترازه روی گروه های لی

محمدعلی جعفری زاده *،حکیمه صادق زاده ،فهیمه نقدی ،.

گروه فیزیک نظری، دانشکده فیزیک،دانشگاه تبریز، ایران۵۱۶۶۶

چکیده

در این مقاله ما تکنیک کنترل بهینه را روی گروه‌های لی اعمال می‌کنیم. یک مدل سیستم سه ترازه را در نظر می گیریم. هدف این است که با استفاده از دو پالس لیزری با شکل و فرکانس دلخواه، جمعیت از تراز اول به تراز سوم انتقال داده شود. اما این امر با کمترین انرژی انجام خواهد شد. برای این منظور از کنترل بهینه و اصل ماکزیمم پونتریگین که شرط اساسی بهینه‌سازی است استفاده می‌کنیم. مسئله را به حالت روزونانسی محدود کرده سپس به پارامترهای حقیقی کاهش می‌دهیم و در نهایت خواهیم دید که منیمم کردن تابع هزینه انرژی برابر با منیمم کردن زمان خواهد بود.

کلمات کلیدی: کنترل بهینه،اصل ماکزیمم پونتریگین،گروه های لی،بهینه سازی

۱. مقدمه

مسئله نظریه کنترل کوانتومی یک زمینه تحقیقاتی است که به سرعت در حال توسعه است. تا پیدایش مکانیک کوانتومی، کنترل پدیده های کوانتومی هدف تحقیق فیزیک کوانتومی و شیمی بوده است (واررن، رابیتز، و داحله ;۱۹۹۳، چو، ۲۰۰۲). اهداف اصلی در تئوری کنترل کوانتومی ایجاد پایه ی تئوری مستحکم و توسعه ی روش های سیستماتیک برای کنترل و مهار سیستم های کوانتومی است (مابوچی و خانجا، ۲۰۰۵). چرا که سیستم های میکروسکوپی کوانتومی دارای ویژگی های منحصربه فردی مانند در هم تنیدگی و همدوسی می باشند که در سیستم های کلاسیک رخ نمی دهد. روش کنترل بهینه در نظریه ی کنترل یک روش بسیار مهم است که بسیار مورد توجه قرار گرفته است (ریس و ژاو ۲۰۰۰. خانجا، براکت و گلایزر ۲۰۰۱ و د الساندرو ۲۰۰۲). از دیدگاه سیستم کنترلی اهداف و وظایف سیستم کوانتومی می تواند شامل: ۱- فراهم سازی حالت، ۲- انتقال یک حالت اولیه ی داده شده به حالت نهایی دلخواه، ۳- کنترل و ردیابی مسیر، ۴- حفظ حالت سیستم باشد [1].

روش کنترل بهینه به این صورت است که ضمن منیمم کردن تابع هزینه ی سیستم ،با داشتن پارامتر کنترلی بتوان سیستم کنترل پذیر را از حالت اولیه ی داده شده به حالت نهایی مورد نظر هدایت کرد. تعیین این پارامتر کنترلی بسیار اساسی است. این پارامتر باید در معادله دینامیکی سیستم صدق کند و تابع هزینه سیستم را مینیمم کند [2] . شایان ذکر است که نظریه ی کنترل بهینه اخیرا برای انتقال حالت سیستم های کوانتومی مورد استفاده قرار گرفته است. (داحله،

* عضو هیئت علمی دانشکده فیزیک دانشگاه تبریز
Email: Jafarizadeh@tabrizu.ac.ir

پیرس و رابیتز در سال ۱۹۹۸، راماکریشنا ۲۰۰۰، د السالندرو ۲۰۰۱، خانجا براکت و گلاسر در سال ۲۰۰۱، بوسکین و پیکولی۲۰۰۴). اهمیت کنترل بهینه این است که با به حداقل رساندن تابع هزینه مربوطه، سیستم تحت کنترل قرار می گیرد. این تابع هزینه برای هر سیستم می تواند متفاوت باشد. درتحقیقات انجام شده توسط خانجا، براکت و گلایزر در سال۲۰۰۱ و د السالندرو در سال ۲۰۰۱ زمان بهینه ی سیستم به عنوان تابع هزینه انتخاب شده است. هدف این بود که سیستم را از حالت اولیه ی داده شده به حالت نهایی مطلوب با کمترین زمان ممکن هدایت شود. و در مقالات شن شی و رابیتز در سال ۱۹۹۳ ; بوسکین، چامبرشین و گادیر در سال۲۰۰۲ ;گریو پالوس و بامه در سال ۲۰۰۴. انرژی بهینه سیستم به عنوان تابع هزینه انتخاب شده است. هدف این بود که سیستم را از حالت اولیه ی داده شده به حالت نهایی مطلوب با کمترین انرژی ممکن هدایت شود [1].

مسئله ی انتقال جمعیت ما بین تراز های اتمی در پروژه های اتمی و مولکولی حیاتی است. چرا که انتقال جمعیت اساس تولید لیزر می باشد . این کار می تواند به روش های مختلف از نوع اپتیکی، الکتریکی،شیمیای یا گرمایی انجام شود به شرطی که انرژی لازم برای برانگیختگی اتم ها و ایجاد وارونی جمعیت فراهم شود. این انتقال جمعیت باید طوری باشد که آثار ناشی از ریلکسیشن و ناهمدوسی که همواره وجود دارد به حداقل برسد در سال های اخیر افراد به طراحی لیزرها با استفاده از تکنیک های هندسی روی آورده اند. سیستم های کوانتومی بسته با بعد محدود، متناظر با سیستم های چپ(یا راست) ناوردا روی گروه ها لی $SU(n)$ هستند. برای این مدل از سیستم ها تکنیک های بسیار قوی کنترل بهینه در نظر گرفته می شود. روش کنترل بهینه کمک می کند زمان یا انرژی لازم برای این انتقالات را مینیمم کند؛ چون کنترل بهینه این امکان را فراهم می کند تا با کنترل کردن یک پارامتر کنترلی تابع هزینه سیستم منیمم شود. ما در این مقاله به دنبال پیدا کردن مقدار پارامتر کنترلی (دامنه لیزر) هستیم که انرژی گرفته از پالس های لیزری منیمم شود. ابزار بسیار قوی در این روش برای مطالعه ی مسیرهای بهینه، اصل ماکزیمم پونتریگین* است که باعث می شود مسئله دینامیکی به کتانژانت باندل† شیفت پیدا کند و به صورت سیستم هامیلتونی بررسی شود.

۲. توصیف مسئله

سیستم کوانتومی سه ترازه ای که تحت نفوذ دو لیزر با شکل و فرکانس دلخواه قرار دارد را در نظر می گیریم. هدف این است که جمعیت را از تراز اول و از حالت $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$ به تراز سوم $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$ با کمترین انرژی که از دو پالس لیزری گرفته می شود انتقال دهیم [3]. دینامیک سیستم با معادله ی شرودیگر توصیف می شود:

$$i\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}=H\psi(t) \qquad ; \qquad \psi(0)=(\psi_1(0),\psi_2(0),\psi_3(0))^T:[0,T]\to C^3\ ,\ \sum_{j=1}^{3}\left|\psi_j\right|^2=1 \qquad (1)$$

$\psi(t)$ متعلق به کره ی پنج بعدی $S^5\subset C^3$ می باشد.

هامیلتونی و تابع هزینه سیستم به صورت زیر است:

$$H=\begin{pmatrix}E_1 & F_1 & 0\\ F_1^* & E_2 & F_2\\ 0 & F_2^* & E_3\end{pmatrix} \qquad , \qquad \min\int_0^T\left(\left|F_1(t)\right|^2+\left|F_2(t)\right|^2\right)dt \qquad (2)$$

F_jها توابع کنترل پذیر هستند که همان پالس های لیزری خارجی، E_iها انرژی سه تراز می باشد

* Pontryagin maximum principle
† Cotangent bundel

اگر از تصویر برهم کنشی استفاده کنیم و پالس ها ی لیزری را به حالت رزونانسی محدود کنیم، کاهش گروه صورت خواهد گرفت و مسئله از کنترل روی گروه $U(3)$ به کنترل روی گروه $SO(3)$ تبدیل می شود. در نهایت یک مسئله راست ناوردا روی گروه $SO(3)$ خواهد بود.

در تصویر برهم کنشی* با انجام تبدیل زیر [4]:

$$\psi(t) = U(t)\psi'(t) \tag{3}$$

$$i\dot{\psi}'(t) = \left(U^{-1}HU(t) - iU^{-1}\dot{U}(t)\right)\psi'(t) \tag{4}$$

$$\rightarrow H' = U^{-1}HU(t) - iU^{-1}\dot{U}(t) \quad \rightarrow \quad \dot{\psi}'(t) = \tilde{H}\psi'(t) \tag{5}$$

$$U = \begin{pmatrix} e^{-iE_1t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-iE_2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-iE_3t} \end{pmatrix} \quad , \quad U^{-1} = \frac{1}{e^{-i(E_1+E_2+E_3)t}} \begin{pmatrix} e^{-i(E_2+E_3)t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i(E_1+E_3)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(E_1+E_2)t} \end{pmatrix} \tag{6}$$

هامیلتونی به صورت زیر و بدون جملات آزاد خواهد بود:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & F_1 & 0 \\ F_1^* & 0 & F_2 \\ 0 & F_2^* & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

در حالات رزونانسی پالس های لیزری به صورت زیر هستند.

$$F_j = u_j(t) e^{\left[i\left(E_{j+1} - E_j\right)t + \xi_j\right]} \qquad j = 1,2 \tag{8}$$

ξ_j فاز اولیه ی دلخواه می باشد.

با اعمال این قید هامیلونی حقیقی و بدون جملات آزاد به صورت زیر است:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -u_1 & 0 \\ u_1 & 0 & -u_2 \\ 0 & u_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

۳. اصل ماکزیمم

یک سیستم کنترلی از چپ ناوردا دلخواه روی ماتریس های گروه لی $G \le GL(n,R)$ با بعد m به شکل زیر در نظر میگیریم [5]:

* Interaction picture

$$\dot{g} = g\,(A + u_1 B_1 + \ldots + u_l B_l) \qquad , \quad g \in G \quad , \qquad u \in R^l \tag{10}$$

$$\dot{g} = g\,E(1; g) \quad ; g \in G \;\; u \in R^l \tag{11}$$

هدف پیدا کردن توابع $g \in G$ و $u \in R^l$ است که در معادله دینامیکی مسئله صدق کند و تابع ارزش[*]

هموار $L : R^L \to R_{\succ 0}$(که لاگرانژی نامیده می شود) را مینیمم کند و در شرایط اولیه زیر نیز صدق کند:

$$g(0) = g_0 \qquad , \qquad g(T) = g_1 \tag{12}$$

$$\min \to \int L(u(t))dt \tag{13}$$

به طوریکه:

$$L(u) = \frac{1}{2}(c_1 u^2 + \ldots + c_l u^2) \tag{14}$$

برای هر عدد حقیقی λ و هر پارامتر کنترلی $u \in R^l$ یک تابع هامیلتونی روی کتانژانت باندل $T^*G = G \times g^*$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$H_u^\lambda(\xi) = \lambda L(u) + \xi(gE(1,u))$$

$$= \lambda L(u) + p(E(1,u)) \qquad ; \qquad \xi(g,p) \in T^*G \tag{15}$$

اگر مسیر کنترل شده ی $(\bar{g}(0),\bar{u}(0))$ روی بازه ی $[0,T]$ پاسخ مسئله ی کنترلی (۱۰)، (۱۲)،(۱۳) باشد بنابرین

یک منحنی $\xi(0) : [0,T] \to T^*G$ با $\xi(t) \in T_{\bar{g}(t)}{}^* G,\ t \in [0,T]$ و یک عدد حقیقی $\lambda \le 0$ وجود دارد

بطوریکه درشرایط زیر برای هر $t \in [0,T]$ صدق کنند:

---
[*] Cost function

$$(\lambda,\xi(\mathrm{t})) \neq (0,0) \tag{16}$$

$$\dot{\xi}(\mathrm{t}) = \vec{\mathrm{H}}^{\lambda}_{\bar{u}(t)}(\xi(\mathrm{t})) \tag{17}$$

$$\vec{\mathrm{H}}^{\lambda}_{\bar{u}(t)} = \mathrm{H}^{\lambda}_{u(t)}(\xi(\mathrm{t})) = constant. \tag{18}$$

تابع هامیلتونی کاهش یافته به صورت زیر است:

$$\mathrm{H(p) = p(A)} + \frac{1}{2}(\frac{1}{c_1}p^2(B_1)^2 + \dots \frac{1}{c_l}p^2(B_l)^2) \tag{19}$$

و معادلات اکسترمال* هم از رابطه ی زیر محاسبه می شود:

$$\dot{p}_i = -\sum_{j=1,k=1}^{m} C_{ij}^k p_k \frac{\partial H}{\partial p_j} \tag{20}$$

۴.کنترل بهینه ی مسئله

مسئله ی انتقال جمعیت می تواند به دو صورت معادله ی موج به صورت زیر:

$$\psi(t) = g(t)\psi(t) \tag{21}$$

و یا معادله تحول عملگرها بیان شود:

$$\dot{g}(t) = -iHg(t) \qquad g(0) = I \tag{22}$$

اولی را مسئله یdownstairs و دومی را مسئله ی upstairs می نامیم.

مسئله ی upstairs تحت تبدیلات ذکر شده در بالا در نهایت به صورت زیر و در قالب یک مسئله کنترل بهینه روی گروه $SO(3)$ خواهد بود:

$$\dot{g}(t) = Hg(t) \qquad g(0) \in Sorce \ , \ g(T) \in T\arg et \ ; \ H = \begin{pmatrix} 0 & -u_1 & 0 \\ u_1 & 0 & -u_2 \\ 0 & u_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$\min J(u_1(0), u_2(0)) = \int_0^T (u_1^2(t) + u_2^2(t))\,dt \tag{24}$$

اگر هامیلتونی بدست آمده را در معادله دینامیکی جاگذاری کنیم:

* exstremal

$$\dot{g}=\left(\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}u_1+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}u_2\right)g(t) \qquad (25)$$

و این یک مسئله ی کنترل پذیر روی گروه $SO(3)$ است زیرا پایه های ظاهر شده در معادله دینامیکی سیستم، جبر گروه $SO(3)$ را برآورده می کند:

$$X_1:=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad , \quad X_2:=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad (26)$$

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}:=X_3 \qquad (27)$$

$$[X_1,X_2]=X_3 \quad , \quad [X_2,X_3]=X_1 \quad , \quad [X_3,X_1]=X_2 \qquad (28)$$

قضیه: معادله دینامیکی کنترل پذیر است اگر و تنها اگر شرط زیر را بر آورده کند:

$$i\frac{dU(t)}{dt}=\left(H_0+\sum_{j=1}^{n}u_jH_j\right)U(t) \quad \to \quad Lie\{iH_0,iH_1,\dots,iH_m\}=SU(n)$$

$$\dot{g}(t)=\frac{1}{2}(X_1v_1+X_2v_2)g(t) \qquad (29)$$

طبق رابطه ی (۱۹) و (۲۰) بدست آمده از اصل ماکزیمم، هامیلتونی کاهش یافته* و معادلات حرکت به صورت زیر است:

* Reduced hamiltonian

$$H = \frac{1}{2}\left(P^2 X_1^2 + P^2 X_2^2\right) \qquad P_i = pX_i$$
$$= \frac{1}{2}\left(P_1^2 + P_2^2\right) \tag{30}$$

$$\dot{p}_i = -\sum_{j=1,k=1}^{m} C_{ij}^k p_k \frac{\partial H}{\partial p_j} \tag{31}$$
$$\dot{P}_1 = -\alpha^2 P_2 P_3 \tag{32}$$
$$\dot{P}_2 = P_1 P_3 \tag{33}$$
$$\dot{P}_3 = 0 \tag{34}$$

$$\dot{P}_3 = 0 \to P_3 = K \tag{35}$$

بنا براین P_3 ثابت حرکت است.

$$\dot{P}_1 = -P_2 P_3 \to \ddot{P}_1 = -\dot{P}_2 P_3 - P_2 \dot{P}_3 \tag{36}$$

$$\ddot{P}_1 = -P_1 P_3^2 = K^2 P_1 \to \ddot{P} + K^2 P = 0 \tag{37}$$

$$\to \qquad P_1 = \cos kt \qquad , P_2 = \sin kt \tag{38}$$

و چون $u_i = p_i$:

$$u_1 = \cos kt \qquad , u_2 = \sin kt \tag{39}$$

حال که پارامترهای کنترلی مسئله بدست آمد در معادله دینامیک جای گذاری می کنیم تا مسیر بهینه بدست آید.

$$\dot{g} = \left(\cos kt\, Z + \sin kt\, X\right) g \tag{40}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{41}$$

با تبدیل تشابه تحت ماتریس $U=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ معادله بالا تبدیل می شود به:

$$\dot{g}=\left(\cos kt\,X+\sin kt\,Y\right)g \tag{42}$$

$$\dot{g}=\left(\cos kt\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}+\sin kt\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\right)g \tag{43}$$

$$\dot{g}=\begin{pmatrix}0&0&\sin kt\\0&0&-\cos kt\\-\sin kt&\cos kt&0\end{pmatrix}g \tag{44}$$

$$g=\begin{pmatrix}\cos\eta t&-\sin\eta t&0\\\sin\eta t&\cos\eta t&0\\0&0&1\end{pmatrix}B \tag{45}$$

که B یک ماتریس ۳در۳ است.

$$\dot{g}=\begin{pmatrix}-\eta\sin\eta t&-\eta\cos\eta t&0\\\eta\cos\eta t&-\eta\sin\eta t&0\\0&0&0\end{pmatrix}B+\begin{pmatrix}\cos\eta t&-\sin\eta t&0\\\sin\eta t&\cos\eta t&0\\0&0&1\end{pmatrix}\dot{B} \tag{46}$$

$$\begin{pmatrix}\cos\eta t&-\sin\eta t&0\\\sin\eta t&\cos\eta t&0\\0&0&1\end{pmatrix}\dot{B}=\begin{pmatrix}\eta\sin\eta t&\eta\cos\eta t&\sin kt\\-\eta\cos\eta t&\eta\sin\eta t&-\cos kt\\\sin(\eta-k)t&\cos(\eta-k)t&0\end{pmatrix}B \tag{47}$$

$$\Rightarrow\dot{B}=\begin{pmatrix}\cos\eta t&\sin\eta t&0\\-\sin\eta t&\cos\eta t&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta\sin\eta t&\eta\cos\eta t&\sin kt\\-\eta\cos\eta t&\eta\sin\eta t&-\cos kt\\\sin(\eta-k)&\cos(\eta-k)&0\end{pmatrix}B \tag{48}$$

$$\dot{B}=\begin{pmatrix}0&\eta&-\sin(\eta-k)t\\-\eta&0&-\cos(\eta-k)t\\\sin(\eta-k)t&\cos(\eta-k)t&0\end{pmatrix}B \tag{49}$$

با انتخاب $\eta=k$ داریم

$$\dot{B}=\begin{pmatrix}0&\eta&0\\-\eta&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}B=\left(X-\eta Z\right)B \tag{50}$$

$$\Rightarrow B(t)=e^{(X-\eta Z)t}B(0) \tag{51}$$

با توجه به اینکه:

$$e^{(X-\eta Z)t}=\cos t\sqrt{1+\eta^2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\frac{\sin t\sqrt{1+\eta^2}}{t\sqrt{1+\eta^2}}\begin{pmatrix}0&\eta t&0\\-\eta t&0&-t\\0&t&0\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1-\cos t\sqrt{1+\eta^2}}{1+\eta^2}\begin{pmatrix}1&0&-\eta\\0&0&0\\-\eta&0&\eta^2\end{pmatrix} \tag{52}$$

$$e^{(X-\eta Z)t}=\begin{pmatrix}\cos t\sqrt{1+\eta^2}+\frac{1}{1+\eta^2}\left(1-\cos t\sqrt{1+\eta^2}\right) & \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}\sin t\sqrt{1+\eta^2} & -\frac{\eta}{1+\eta^2}\left(1-\cos t\sqrt{1+\eta^2}\right)\\ -\frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}\sin t\sqrt{1+\eta^2} & \cos t\sqrt{1+\eta^2} & -\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}\sin t\sqrt{1+\eta^2}\\ -\frac{\eta}{1+\eta^2}\left(1-\cos t\sqrt{1+\eta^2}\right) & \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}\sin t\sqrt{1+\eta^2} & \frac{\eta^2}{1+\eta^2}\left(1-\cos t\sqrt{1+\eta^2}\right)+\cos t\sqrt{1+\eta^2}\end{pmatrix} \tag{53}$$

با جاگذاری مقادیر بدست آمده در رابطه ی (٤٤) داریم:

$$g(t)=\begin{pmatrix}\cos\eta t\left(\cos t\sqrt{1+\eta^2}+\frac{1}{1+\eta^2}\left(1-\cos t\sqrt{1+\eta^2}\right)\right)+\frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}\sin\eta t\sin t\sqrt{1+\eta^2} & \times & \times\\ \sin\eta t\left(t^2+\left(1-t^2\right)\cos t\sqrt{1+\eta^2}\right)-\frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}\cos\eta t\sin t\sqrt{1+\eta^2} & \times & \times\\ -\frac{\eta}{1+\eta^2}\left(1-\cos t\sqrt{1+\eta^2}\right) & \times & \times\end{pmatrix} \tag{54}$$

ماتریس حاصل توصیف کننده ی بهینه ترین مسیری است سیستم می تواند با طی آن به حالت نهایی مطلوب برسد.

توجه: به دلیل بزرگ بودن ماتریس حاصل ما فقط به حاصل ستون اول ماتریس که مورد نیاز مسئله هست اکتفا کردیم.

حالت اولیه و نهایی سیستم به صورت زیر است:

$$\psi(T)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad , \quad \psi(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad , \quad U=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \tag{55}$$

$$\tilde{\psi}(T)=U\psi(T)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \tag{56}$$

$$\tilde{\psi}(0)=U\psi(0)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \tag{57}$$

$$\tilde{\psi}(T)=g(T)\tilde{\psi}(0) \tag{58}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}\cos\eta T\sin T\sqrt{1+\eta^2}-\sin\eta T\cos T\sqrt{1+\eta^2}\\ \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}\sin\eta T\sin T\sqrt{1+\eta^2}+\cos\eta T\cos T\sqrt{1+\eta^2}\\ \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}\sin T\sqrt{1+\eta^2}\end{pmatrix} \tag{59}$$

بنابراین داریم:

$$\rightarrow \begin{cases} \sin T\sqrt{1+\eta^2}=0 \\ \sin\eta T\cos T\sqrt{1+\eta^2}=-1 \quad \rightarrow \quad \cos T\sqrt{1+\eta^2}=\dfrac{-1}{\sin\eta T} \\ \cos\eta T\cos T\sqrt{1+\eta^2}=0 \quad \rightarrow \quad \cot\eta T=0 \quad \rightarrow \eta T=\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \qquad (60)$$

با جاگذاری شرط نهایی مسئله داریم:

$$f_a=\frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}\cos\eta T\sin T\sqrt{1+\eta^2}-\mathrm{Sin}\,\eta T\cos T\sqrt{1+\eta^2}=1 \qquad (61)$$

با تغییر متغیر:

$$\lambda=\frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} \quad , \quad T\sqrt{1+\eta^2}=\theta \quad , \quad \lambda\theta=\eta T \qquad (62)$$

خواهیم داشت :

$$\lambda\cos\lambda\theta\sin\theta-\sin\lambda\theta\cos\theta=1 \qquad (63)$$

اگر دو بردار $v_1=(\lambda\cos\lambda\theta,\sin\lambda\theta)$ و $v_2=(\sin\theta,-\cos\theta)$ را تعریف کنیم رابطه بالا برابر است با ضرب این دو بردار، بنابراین

$$f_a=\langle v_1,v_2\rangle=1 \qquad (64)$$

$$\rightarrow \quad \|v_1\|=\|v_2\|=1 \quad , \quad v_1=\pm v_2 \qquad (65)$$

$$\|v_1\|=1\rightarrow\sqrt{\lambda^2\cos^2\lambda\theta+\sin^2\lambda\theta}=\sqrt{\lambda^2\left(1-\sin^2\lambda\theta\right)+\sin^2\lambda\theta}=$$

$$\rightarrow \quad =\left(1-\lambda^2\right)\sin^2\lambda\theta=1-\lambda^2 \qquad (66)$$

$$\rightarrow \quad \sin^2\lambda\theta=1 \quad \rightarrow \quad \sin\lambda\theta=\pm1 \quad \rightarrow \quad \lambda\theta=k'\pi+\frac{\pi}{2} \quad (1) \qquad (67)$$

و چون $v_1=v_2$:

$$\sin\lambda\theta=-\cos\theta \quad\rightarrow\quad \cos\theta=\pm 1 \quad\rightarrow\quad \theta=k\pi \quad (2) \tag{68}$$

از رابطه ی (۱) و (۲) :

$$\lambda k\pi=k'\pi+\frac{\pi}{2} \quad\rightarrow\quad \lambda=\frac{k'}{k}+\frac{1}{2k} \tag{69}$$

چون نرم v_1 یک است بنابراین باید $\lambda<1$ باشد ، در نتیجه

$$\lambda=\left|\frac{k'}{k}+\frac{1}{2k}\right|<1 \quad , \quad \lambda=\frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} \tag{70}$$

و طبق رابطه $T\sqrt{1+\eta^2}=\theta$ خواهیم داشت :

$$T=\frac{\theta}{\sqrt{1+\eta^2}}=\frac{k\pi}{\sqrt{1+\eta^2}} \tag{71}$$

اگر $k=0$:

$$k=0 \quad\rightarrow\quad \theta=0 \quad\rightarrow\quad f_a=0 \tag{72}$$

که با جواب مسئله ما تطبیق ندارد.

اگر $k=1$

$$k=1 \quad\rightarrow\quad \theta=1 \quad\rightarrow\quad \sin\lambda\pi=1 \quad\rightarrow\quad \lambda\pi=k'\pi+\frac{\pi}{2} \quad\rightarrow\quad \lambda=k'+\frac{1}{2} \tag{73}$$

و چون $\lambda<1$ است

$$\rightarrow \left|k'+\frac{1}{2}\right|<1 \quad\Rightarrow\quad k'=0\ ,\ k'=-1 \tag{74}$$

بطور مشابه برای حالتی که $k=-1$. بنابراین $k=\pm 1$ است ودرهر دو صورت خواهیم داشت :

$$|\lambda|=\frac{1}{2} \tag{75}$$

$$\lambda=\frac{\eta}{1+\eta^2} \quad\rightarrow\quad \frac{1}{2}=\frac{\eta}{1+\eta^2} \quad\rightarrow\quad \eta=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad T=\pm\frac{\pi\sqrt{3}}{2} \tag{76}$$

بنابراین تابع هزینه برابر خواهد بود با :

$$J(u):=\int_0^T\left(v_1^2(t)+v_2^2(t)\right)dt=\int_0^T\left[\cos^2(\eta t)+\sin^2(\eta t)\right]dt=\int_0^T dt=T=\pm\frac{\pi\sqrt{3}}{2} \tag{77}$$

یعنی با صرف این مقدار انرژی سیستم با بهینه ترین حالت انتقال می یابد.

۵.نتیجه گیری

همان طور که قبلا بیان شد،هدف این بود که با گرفتن کمترین انرژی از پالس های لیزری، جمعیت را از تراز اول به تراز سوم انتقال دهیم. برای این منظور با اعمال تکنیک و محاسبات کنترل بهینه، مقدار پارامتر کنترلی را بدست آوردیم. مشاهده کردیم که این پارامترها، دامنه ی لیزرها هستند که مقدار آن ها در رابطه ی(۳۹) محاسبه شده است. مقدار ماتریسی که منجر به انتقال این حالت کوانتومی می شود در رابطه (۵۴) بدست می آید این مقدار، بهینه ترین مسیری است که سیستم می تواند طی کند. در نهایت تابع هزینه ی سیستم در رابطه ی (۷۷) منیمم شده است. بنابراین اگر دامنه ی دو لیزر اعمالی به سیستم کوانتومی دارای مقادیر زیر باشد:

$$u_1 = \cos kt \qquad , u_2 = \sin kt \tag{78}$$

بهینه ترین مسیر با صرف مقدار انرژی $J = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}$ حاصل می شود.

۱۲. مراجع

1.Cong, S., 2014. *Control of quantum systems: theory and methods*. John Wiley & Sons.

2. d'Alessandro, Domenico. *Introduction to quantum control and dynamics*. CRC press, 2007.
3. Boscain, Ugo, Thomas Chambrion, and J-P. Gauthier. "On the K+ P problem for a three-level quantum system: Optimality implies resonance." *Journal of Dynamical and Control Systems* 8.4 (2002): 547-572.
4. Boscain, Ugo, et al. "Optimal control in laser-induced population transfer for two-and three-level quantum systems." *Journal of Mathematical Physics* 43.5 (2002): 2107-2132.

5.Remsing, Claudiu C. "Optimal Control on the Rotation Group SO (3)." *Carpathian Journal of Mathematics* (2012): 321-328.