H_v–حلقه‌های فازی

محسن اصغری لاریمی *,۱

استادیار، دانشگاه گلستان

چکیده

در این پژوهش، خواصی از مفاهیم H_v–حلقه‌های فازی و H_v–همریختی‌های فازی از حلقه‌های فازی بیان شد. همچنین، ارتباط بین حلقه‌های فازی و حلقه‌ها مورد بررسی قرار گرفت. بعلاوه، مفاهیم p-برش از H_v-حلقه‌های فازی بیان و ارزیابی شد.

کلمات کلیدی: ابرساختار، H_v–حلقه، H_v–نیم‌گروه فازی، H_v–حلقه فازی

۱. مقدمه

مفهوم ابرگروه‌ها اولین بار در سال ۱۹۳۴ توسط مارتی [19] بیان شده است. ابرساختارهای جبری تعمیم مناسبی از ساختارهای جبری کلاسیک می‌باشند. در یک ساختار کلاسیک جبری، ترکیب دو عنصر یک عنصر است، ولی در یک ابرساختارهای جبری، ترکیب دو عنصر یک مجموعه است. از آن زمان، محققان زیادی بر روی این موضوع تحقیق کرده‌اند [1-8 ,17]. کلاس جدیدی از ابرساختارها به نام H_v–ساختارها اولین بار توسط وجیوکلیس [26] در سال ۱۹۹۰ بیان شده است. H_v–ساختارها، ابرساختارهایی هستند که در آن برابری با تقاطع غیر خالی جایگزین می‌شود. برای بررسی و اطلاعات بیشتر در ارتباط با مفهوم H_v–ساختارها می‌توان به کتابهای [8 ,9 ,14 ,25] و مقالات [27, 24, 20, 15, 13, 12, 10] مراجعه کرد.

اولین بار مفهوم زیرمجموعه فازی در سال ۱۹۶۵ توسط لطفی عسکرزاده [28] بیان شده است. بنا به تعریف زیرمجموعه فازی، نگاشتی از یک مجموعه غیر تهی H به بازه حقیقی $[0,1]$ می‌باشد. مفهوم ساختارهای جبر فازی با تعریف زیرگروه‌های فازی توسط رزنفیلد [22] شروع شد، و سپس این مفهوم به طور چشمگیری در ریاضیات تعمیم داده شده است (به مرجع [21] مراجعه شود). مطالعه ابرساختارهای فازی موضوع جالبی در مجموعه‌های فازی است. در ارتباط با مجموعه‌های فازی و ابرساختارها مقالات زیادی استخراج شد که عبارتند از [6 ,16 ,20].

در [23] سن و همکارانش مفهوم جدیدی از فازی را در نیم‌ابرگروه‌ها بیان کردند. در ادامه این مفهوم در ابرحلقه‌ها [17] و ابرمدول‌ها [18] مورد بررسی قرار گرفت و نتایج جالبی در این زمینه بدست آمد. این پژوهش گسترش همین مفهوم فازی روی H_v–حلقه‌ها می‌باشد.

۲. پیش‌نیازها

* **Corresponding Author Email: asghari2004@yahoo.com**

فرض کنید H یک مجموعه غیر تهی و $P^*(H)$ مجموعه همه زیرمجموعه‌های غیر تهی از H باشد. در این صورت یک ابرعمل روی H یک نگاشت $\circ : H \times H \to P^*(H)$ می‌باشد که زوج $(H,\circ)$ را یک ابرگروه‌واره یا یک ابرساختار گویند. اگر A و B زیرمجموعه‌های غیرتهی از H باشند، آن‌گاه

$$A \circ B = \bigcup_{\substack{a\in A \\ b\in B}} a \circ b, \quad x \circ A = \{x\} \circ A, \quad A \circ x = A \circ \{x\}.$$

یک ابرساختار $(H,\circ)$ را یک نیم ابرگروه گویند، هرگاه برای هر $x,y,z \in H$ داشته باشیم $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$، یعنی $\bigcup_{v \in y \circ z} x \circ v = \bigcup_{u \in x \circ y} u \circ z$.

یک نیم ابرگروه $(H,\circ)$ را یک ابرگروه گویند، هرگاه برای هر $x \in H$ داشته باشیم

$$x \circ H = H \circ x = H.$$

برای اطلاعات بیشتر درمورد ابرگروه‌ها به کتابهای [8] و [9] مراجعه شود.

مفهوم H_v–ساختارها برای اولین بار توسط وجیوکلیس [26] بیان شد. مفهوم H_v–ساختارها همان مفهوم ابرساختارها می‌باشند که در آن بجای تساوی از اشتراک غیرتهی استفاده شده است. یک ابرساختار $(H,\circ)$ را یک H_v–نیم‌گروه گویند، هرگاه برای هر $x,y,z \in H$، $((x \circ y) \circ z) \cap (x \circ (y \circ z)) \neq \varnothing$.

تعریف 1.2. یک H_v–نیم‌گروه $(H,\circ)$ را یک H_v–گروه گویند، هرگاه برای هر $x \in H$، $x \circ H = H \circ x = H$.

اگر $(H,\circ)$ یک ابرگروه و $\varnothing \neq K \subseteq H$، آن‌گاه $(K,\circ)$ را یک H_v–زیرگروه از $(H,\circ)$ گویند، هرگاه برای هر $x \in K$، $x \circ K = K \circ x = K$.

یک H_v–گروه $(H,\circ)$ را یک H_v–گروه جابجایی ضعیف گویند، هرگاه برای هر $x,y \in H$، $(x \circ y) \cap (y \circ x) \neq \varnothing$.

قضیه ۲،۲. [20] فرض کنید $(G,*)$ یک H_v–گروه باشد. در این صورت برای هر $a,b \in G$، $a * b \neq \varnothing$.

تعریف ۴،۲. [24] اگر R یک مجموعه غیرتهی باشد، دستگاه $(R,+,\cdot)$ را یک H_v–حلقه گویند، هرگاه

(i) $(R,+)$ یک H_v–گروه جابجایی ضعیف باشد،

(ii) $(R,\cdot)$ یک H_v–نیم‌گروه باشد،

(i) ابرعمل "$\cdot$" نسبت به ابرعمل "$+$" دارای خاصیت توزیع‌پذیری ضعیف باشد، یعنی برای هر $x,y,z \in H$،

$$(x \cdot (y+z)) \cap (x \cdot y + x \cdot z) \neq \varnothing$$
$$((x+y) \cdot z) \cap (x \cdot z + y \cdot z) \neq \varnothing$$

اکنون به چند مثال از H_v–حلقه‌ها می‌پردازیم.

مثالها:

(۱) [11] فرض کنید $(R,+,\cdot)$ یک حلقه و $A:R\to[0,1]$ یک مجموعه فازی باشد. فرض کنید ابرعمل‌های â، $\otimes$ و $*$ به صورت زیر تعریف شوند

الف) $x \,\hat{a}\, y=\{t:A(t)=A(x+y)\},$

ب) $x\otimes y=\{t:A(t)=A(x\cdot y)\},$

ج) اگر $A(x)\le A(y)$، آنگاه

$x*y=y*x=\{t:A(x)\le A(t)\le A(y)\}.$

در این‌صورت $(R,*,*)$، $(R,*,\otimes)$، $(R,*,\hat{a})$، $(R,\hat{a},*)$ و $(R,\hat{a},\otimes)$ یک H_v-حلقه هستند.

(۲) [12] فرض کنید R مجموعه اعداد حقیقی و سه ابرعمل روی R^n به صورت

$$x\oplus y=\{r(x+y):r\in[0,1]\},$$
$$x\,\square\, y=\{x+r(y-x):r\in[0,1]\},$$
$$x\cdot y=\{x+ry:r\in[0,1]\}.$$

تعریف شوند. در این صورت $(R^n,*,\circ)$ یک H_v-حلقه می‌باشد، که در آن $*,\circ\in\{\oplus,\square,\cdot\}$. یک زیرمجموعه غیرتهی H از R را یک H_v-زیرحلقه از $(R,+,\cdot)$ گویند، هرگاه $(H,+)$ یک H_v-زیرگروه از $(R,+)$ باشد و برای هر $h\in H$، و هر $r\in R$، $h\cdot r\in P^*(H)$ و $r\cdot h\in P^*(H)$.

مفهوم H_v-حلقه‌ها یک گسترشی از یک حلقه‌ها می‌باشد. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توان به مراجع [9]، [10] و [25] مراجعه کرد.

۳. H_v-حلقه‌های فازی و H_v-حلقه‌ها

در این بخش، مفهوم H_v-حلقه‌های فازی بیان می‌شود و ارتباط بین H_v-حلقه‌های فازی و H_v-حلقه‌ها بررسی می‌گردد.

مفهوم ابرگروه فازی در مرجع [23] بیان شد. فرض کنید S مجموعه غیرتهی و $F^*(S)$ مجموعه همه زیرمجموعه‌های فازی غیرصفر از S باشد. یک ابرعمل فازی روی S یک نگاشت مانند $\circ:S\times S\to F^*(S)$ است که در آن تصویر (a,b) با $a\circ b$ نشان داده می‌شود. در این حالت $(S,\circ)$ را یک ابرساختار فازی گویند. ابرساختار فازی $(S,\circ)$ را جابجایی گویند، هرگاه برای هر $a,b\in S$، $a\circ b=b\circ a$. ابرساختار فازی $(S,\circ)$ را یک نیم ابرگروه فازی گویند، هرگاه برای هر $a,b,c\in R$، $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$. که در آن برای هر $\mu\in F^*(S)$ و هر $r\in S$ داریم

$$(a\circ\mu)(r)=\bigvee_{t\in S}((a\circ t)(r)\wedge\mu(t)),$$
$$(\mu\circ a)(r)=\bigvee_{t\in S}(\mu(t)\wedge(t\circ a)(r)).$$

اگر A یک زیرمجموعه غیرتهی از S و $x\in S$ باشد، آن‌گاه برای هر $t\in S$ داریم

$$(A\circ x)(t)=\bigvee_{a\in A}(a\circ x)(t),\quad (x\circ A)(t)=\bigvee_{a\in A}(x\circ a)(t)$$

اگر $(S,\circ)$ یک ابرساختار فازی باشد به طوری‌که $\mu,\nu \in F^*(S)$، آن‌گاه برای هر $t \in S$ نماد $\mu\circ\nu$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(\mu\circ\nu) = \bigvee_{p,q\in S} (\mu(p) \wedge (p\circ q)(t) \wedge \nu(q)).$$

اگر A یک زیرمجموعه غیرتهی از S باشد، آن‌گاه تابع مشخصه آن برای $x \in S$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & ,x \in A \\ 0 & ,x \notin A \end{cases}$$

بویژه، برای هر $a,x \in S$، اگر $A=\{a\}$، آن‌گاه

$$\chi_a(x) = \begin{cases} 1 & ,x = a \\ 0 & ,x \neq a \end{cases}$$

یک نیم ابرگروه $(S,\circ)$ را یک ابرگروه فازی گویند، هرگاه برای هر $x \in S$، $x\circ S = S\circ x = \chi_S$. یک ابرگروه فازی $(S,\circ)$ را جابجایی فازی گویند، هرگاه برای هر $a,b \in S$، $a\circ b = b\circ a$. فرض کنید R یک مجموعه غیرتهی و $\oplus$ و $\otimes$ دو ابرعمل فازی روی R باشند.

دستگاه $(R,\oplus,\otimes)$ را یک ابرحلقه فازی گویند، هرگاه

اولاً: $(R,\oplus)$ یک ابرگروه فازی جابجایی باشد،

ثانیاً: $(R,\otimes)$ یک نیم ابرگروه فازی باشد،

ثالثاً: $\otimes$ نسبت به $\oplus$ توزیع‌پذیر فازی باشد، یعنی، برای هر $a,b,c \in R$ داشته باشیم

$$(a\otimes(b\oplus c)) = ((a\otimes b)\oplus(a\otimes c)),\quad ((a\oplus b)\otimes c) = ((a\otimes c)\oplus(b\otimes c))$$ ([17]).

حالا مفهوم H_v-نیم گروه فازی را که در مرجع [3] تعریف شد، در ادامه بیان می‌کنیم.

یک ابرساختار فازی $(S,\circ)$ را یک H_v-نیم‌گروه فازی گویند، هرگاه برای هر $a,b,c \in S$، عنصر $x \in S$ موجود باشد به طوری که

$$((a\circ b)\circ c)(x) > 0,\quad (a\circ(b\circ c))(x) > 0.$$

یک H_v-نیم‌گروه فازی $(S,\circ)$ را یک H_v-گروه فازی گویند، هرگاه برای هر $a \in S$، $a\circ S = S\circ a = \chi_S$.

تعریف ۱٫۳. یک H_v-گروه فازی $(S,\circ)$ را جابجایی ضعیف وِیند، هرگاه برای هر $a,b \in S$، عنصر $x \in S$ موجود باشد به طوری که

$$(a\circ b)(x) > 0,\ (b\circ a)(x) > 0.$$

فرض کنید $(S,\circ)$ یک H_v-گروه جابجایی ضعیف باشد و $a,b \in S$. در این صورت $(a\circ b)\cap(b\circ a) \neq \varnothing$ اگروتنهااگر عنصر $x \in S$ موجود باشد به طوری که $x \in (a\circ b)\cap(b\circ a)$ اگروتنهااگر $(\chi_{a\circ b} \wedge \chi_{b\circ a})(x) = 1$ اگروتنهااگر $(\chi_{a\circ b} \wedge \chi_{b\circ a})(x) \neq 0$ اگروتنهااگر $\chi_{a\circ b}(x) > 0,\ \ \chi_{b\circ a}(x) > 0$. این مطلب نشان می‌دهد که مفهوم H_v-گروه جابجایی ضعیف فازی گسترشی از مفهوم H_v-گروه جابجایی ضعیف است.

اکنون با تعریف H_v-حلقه فازی شروع می‌کنیم.

تعریف ۲٫۳. فرض کنید R یک مجموعه غیرتهی و $\oplus$ و $\otimes$ دو ابرساختار فازی روی R باشند. در این صورت دستگاه $(R,\oplus,\otimes)$ را یک H_v-حلقه فازی گویند، هرگاه

(i) ابرساختار $(R,\oplus)$ یک H_v-گروه جابجایی ضعیف فازی باشد.

(ii) ابرساختار $(R,\square)$ یک H_v-نیم‌گروه فازی باشد.

(iii) ابرعمل $\square$ نسبت به ابرعمل $\oplus$ توزیع‌پذیر فازی باشد، یعنی برای هر $a,b,c \in R$،

$$\exists x \in R, \quad (a \square (b \oplus c))(x) > 0, \quad ((a \square b) \oplus (a \square c)) > 0$$
$$\exists x \in R, \quad ((a \oplus b) \square c)(x) > 0, \quad ((a \square c) \oplus (b \square c))(x) > 0.$$

فرض کنید $(R,\oplus,\square)$ یک H_v-حلقه و $a,b,c \in R$. در این صورت $((a \oplus b) \square c)(x) \cap ((a \square c) \oplus (b \square c))(x) \neq \varnothing$ اگروتنهااگر عنصر $x \in R$ موجود باشد به طوری که $x \in ((a \oplus b) \square c) \cap ((a \square c) \oplus (b \square c))$ اگروتنهااگر $(\chi_{((a\oplus b)\square c)} \wedge \chi_{((a\square c)\oplus(b\square c))})(x) = 1$ اگروتنهااگر $\chi_{((a\oplus b)\square c)}(x) > 0$ و $\chi_{((a\square c)\oplus(b\square c))}(x) > 0$. به طور مشابه $(a \square (b \oplus c)) \cap ((a \square b) \oplus (a \square c))(x) \neq \varnothing$ اگروتنهااگر عنصر $x \in R$ موجود باشد که $\chi_{(a\square (b\oplus c))}(x) > 0$ و $\chi_{((a\square b)\oplus(a\square c))}(x) > 0$. بنابراین نشان می‌دهد که مفهوم H_v-حلقه‌های فازی گسترشی از مفهوم H_v-حلقه‌های می‌باشد.

مثال ۳,۳. فرض کنید R یک مجموعه غیرتهی باشد. برای هر $a,b \in R$ تعریف می‌کنیم $a \oplus b = \chi_{\{a,b\}}$ و $(a \circ b)(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ,t \in \{a,b\} \\ 0 & ,o.w. \end{cases}$. در این صورت $(R,\oplus,\circ)$ یک H_v-حلقه فازی است.

اثبات. با استفاده از مثال ۴,۳ و قضیه ۸,۳ از مرجع [3]، ابرساختار $(R,\circ)$ یک H_v-نیم‌گروه فازی و $(R,\oplus)$ یک H_v-گروه فازی است. چون برای هر $a,b \in R$ داریم $(b \oplus a)(a) = 1 > 0$ و $(a \oplus b)(a) = 1 > 0$، درنتیجه $(R,\oplus)$ یک H_v-گروه جابجایی ضعیف فازی است. از طرفی دیگر با محاسبه ساده داریم

$$((a \oplus b) \circ c)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ,x \in \{a,b,c\} \\ 0 & ,o.w. \end{cases}, ((a \circ b) \oplus (b \circ c))(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ,x \in \{a,b,c\} \\ 0 & ,o.w. \end{cases}$$

بنابراین، اگر $x \in \{a,b,c\}$، آن‌گاه $((a \oplus b) \circ c)(x) = ((a \circ c) \oplus (b \circ c))(x) = \frac{1}{2} > 0$. به طور مشابه برای $x \in \{a,b,c\}$ می‌توان نشان داد $(a \circ (b \oplus c))(x) = ((a \circ b) \oplus (a \circ c))(x) = \frac{1}{2} > 0$. درنتیجه $(R,\oplus,\circ)$ یک H_v-حلقه فازی است.

مثال ۴,۳. فرض کنید $R = \{a,b\}$ و فرض کنید دو ابرعمل $\oplus$ و $\circ$ برای هر $x,y \in R$ طوری تعریف شوند که $x \oplus y = \chi_{\{x,y\}}$ و $(a \circ a)(a) = 0.1$ و $(a \circ a)(b) = 0.2$، $(b \circ b)(a) = 0.3$، $(b \circ b)(b) = 0.4$، $(a \circ b)(a) = 0.5$، $(a \circ b)(b) = 0.6$، $(b \circ a)(a) = 0.7$ و $(b \circ a)(b) = 0.8$. در این صورت $(R,\oplus,\circ)$ یک H_v-حلقه فازی است، اما $(R,\oplus,\circ)$ یک ابرحلقه فازی نیست.

قضیه ۵,۳. فرض کنید $(R,\oplus,\circ)$ یک H_v-حلقه فازی باشد. در این صورت برای هر $a,b \in R$ داریم $a \oplus b \neq 0$ و $a \circ b \neq 0$.

اثبات. آسان است.

قضیه ۶,۳. فرض کنید $(R,\oplus,\circ)$ یک ابرحلقه فازی باشد. فرض کنید برای هر $a,b \in S$، $(a \circ b)(x) > 0$, $(b \circ a)(x) > 0$. در این‌صورت $(R,\oplus,\circ)$ یک H_v-حلقه فازی است.

اثبات. آسان است.

قضیه ۷,۳. فرض کنید μ یک زیرمجموعه فازی از گروه آبلی R باشد به طوری که برای هر $a\in R$، $\mu(a)\neq 0$. اگر برای هر $a,b\in R$ دو ابرعمل $\oplus$ و $\circ$ به صورت $(a\oplus b)(t)=\mu(abt^{-1})$ و $(a\circ b)(t)=\begin{cases}\mu(a)\wedge\mu(b) & ,t=ab\\ 0 & ,o.w.\end{cases}$ تعریف شوند. در این صورت $(R,\oplus,\circ)$ یک H_v-حلقه است.

اثبات. با استفاده از قضیه۲,۳ و۱۰,۳ از مرجع [3]، ابرساختار $(R,\oplus)$ یک H_v-گروه جابجایی ضعیف فازی و $(R,\circ)$ یک H_v-نیم‌گروه فازی است. از طرف دیگر برای هر $a,b,c\in R$ داریم

$$((a\oplus b)\circ c)(x)=\underset{y\in R}{\vee}\mu(aby^{-1})\wedge(y\circ c)(x)\geq\mu(a)\wedge(b\circ c)(x)=\begin{cases}\mu(a)\wedge\mu(b)\wedge\mu(c) & ,x=ab\\ 0 & ,o.w.\end{cases}$$

و همچنین برای هر $x\in R$ داریم

$$\begin{aligned}((a\circ c)\oplus(b\circ c))(x)&=\underset{s,t\in R}{\vee}((a\circ c)(s)\wedge(b\circ c)(t)\wedge\mu(stx^{-1}))\\ &\geq\mu(a)\wedge\mu(b)\wedge\mu(c)\wedge\mu(abc^{2}x^{-1}).\end{aligned}$$

بنابراین، $((a\oplus b)\circ c)(ab)\geq\mu(a)\wedge\mu(b)\wedge\mu(c)>0$ و $((a\circ c)\oplus(b\circ c))(ab)\geq\mu(a)\wedge\mu(b)\wedge\mu(c)>0$. به طور مشابه می‌توان نشان داد $(a\circ(b\oplus c))(ab)>0$ و $((a\circ c)\oplus(b\circ c))(ab)>0$. درنتیجه $(R,\oplus,\circ)$ یک H_v-حلقه است.

قضیه ۸,۳. فرض کنید $(R,\circ)$ یک H_v-گروه فازی و برای هر $a,b\in R$ عنصر $x\in R$ چنان موجود باشد به طوری که $(a\circ b)(x)>0$. فرض کنید برای هر $a,b\in R$، $(a\oplus b)=\chi_R$. در این صورت $(R,\oplus,\circ)$ یک H_v-حلقه فازی است.

اثبات. آسان است.

قضیه زیر ارتباط بین H_v-گروه‌های فازی و H_v-گروه‌ها را نشان می‌دهد.

قضیه ۹,۳. فرض کنید $(R,+,\cdot)$ یک H_v-حلقه و $\mu\in F(R)$ به طوری باشد که برای هر $a\in R$، $\mu(a)\neq 0$ و $\underset{x\in R}{\vee}\mu(x)=1$. اگر برای هر $a,b\in R$ داشته باشیم

$$(a\circ b)(t)=\begin{cases}\mu(t) & ,t=ab\\ 0 & ,o.w.\end{cases},\quad(a\oplus b)(t)=\begin{cases}\mu(t) & ,t\in a+b\\ 0 & ,o.w.\end{cases}$$

آن‌گاه $(R,\oplus,\circ)$ یک H_v-حلقه فازی است.

اثبات. چون $(R,+)$ یک H_v-نیم‌گروه است. آنگاه برای هر $a,b,c\in R$ داریم $((a+b)+c)\cap(a+(b+c))\neq\varnothing$. بنابراین، عنصر $x\in R$ چنان وجود دارد به طوری‌که $x\in((a+b)+c)$ و $x\in(a+(b+c))$. درنتیجه عناصر $s,t\in R$ چنان وجود دارند به طوری‌که

$$s\in(a+b),\quad x\in s+c,\quad t\in b+c,\quad x\in a+t.$$

آن‌گاه $(a\oplus b)(s)=\mu(s)$، $(s\oplus c)(x)=\mu(x)$ و $(b\oplus c)(t)=\mu(t)$، $(a\oplus t)(x)=\mu(x)$. از طرف دیگر داریم

$$\begin{aligned}((a\oplus b)\oplus c)(x)&=\underset{r\in R}{\vee}(a\oplus b)(r)\wedge(r\oplus c)(x)\geq(a\oplus b)(s)\wedge(s\oplus c)(x)\\ &=\mu(s)\wedge\mu(x)>0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a\oplus(b\oplus c))(x)&=\underset{p\in R}{\vee}(a\oplus p)(x)\wedge(b\oplus c)(p)\geq(a\oplus t)(x)\wedge(b\oplus c)(t)\\ &=\mu(x)\wedge\mu(t)>0.\end{aligned}$$

بنابراین $(R,\oplus)$ یک H_v-نیم‌گروه فازی است. به طور مشابه می‌توان نشان داد که ابرساختار $(R,\circ)$ یک H_v-نیم‌گروه فازی است.

همچنین، چون $(R,+)$ یک H_v-گروه است. آن‌گاه برای هر $x \in R$ داریم $x+R=R=R+x$. در نتیجه برای هر $t \in R$ عناصر $s_1, s_2 \in R$ چنان وجود دارند به طوری که $t \in (x+s_1) \cap (s_2+x)$. پس، برای هر $t, x \in R$ داریم

$$(x \oplus R)(t) = \underset{r \in R}{\vee} (x \oplus r)(t) = \underset{t \in x \oplus R}{\vee} \mu(t) = \underset{t \in R}{\vee} \mu(t) = 1 = \chi_R(t),$$
$$(R \oplus x)(t) = \underset{r \in R}{\vee} (r \oplus x)(t) = \underset{t \in R \oplus x}{\vee} \mu(t) = \underset{t \in R}{\vee} \mu(t) = 1 = \chi_R(t).$$

یعنی $x \oplus R = R \oplus x = \chi_R$. درنتیجه $(R,+)$ یک H_v-گروه فازی است.

حال، چون $(R,+)$ یک H_v-گروه جابجایی ضعیف است. آن‌گاه برای هر $a,b \in R$، $(a+b) \cap (b+a) \neq \varnothing$. بنابراین، عنصر $x \in R$ چنان وجود دارد که $x \in a+b$ و $x \in b+a$. درنتیجه $(a \oplus b)(x) = \mu(x) > 0$ و $(b \oplus a)(x) = \mu(x) > 0$.

بنابراین $(R,\oplus)$ یک H_v-گروه جابجایی ضعیف فازی است. برای اثبات توزیع پذیری فازی، چون $(R,+,\cdot)$ یک H_v-حلقه است. برای هر $a,b,c \in R$ داریم $((a+b)\cdot c) \cap ((a \cdot c)+(b \cdot c)) \neq \varnothing$. در نتیجه عنصر $x \in R$ چنان وجود دارد به طوری که $x \in ((a+b).c)$ و $x \in ((a.c)+(a.c))$. بنابراین، عنصر $s \in R$ چنان وجود دارد به طوری که $s \in a+b$ و $x \in s \cdot c$ و همچنین عناصر $t,p \in R$ وجود دارند به طوری که $t \in a \cdot c$، $p \in b \cdot c$ و $x \in t+p$. آن‌گاه $(a \oplus b)(s) = \mu(s)$، $(s \circ c)(x) = \mu(x)$ و $(a \circ c)(t) = \mu(t)$، $(b \circ c)(p) = \mu(p)$ و $(t \oplus p)(x) = \mu(x)$.

از طرف دیگر داریم

$$\begin{aligned}((a \oplus b) \circ c)(x) &= \underset{y \in R}{\vee} (a \oplus b)(y) \wedge (y \circ c)(x) \geq (a \oplus b)(s) \wedge (s \circ c)(x)\\ &= \mu(s) \wedge \mu(x) > 0\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}((a \circ c) \oplus (b \circ c))(x) &= \underset{y \in R}{\vee} (a \circ c)(y) \wedge (y \oplus z)(x) \wedge (b \circ c)(z)\\ &\geq (a \circ c)(t) \wedge (t \oplus p)(x) \wedge (b \circ c)(p)\\ &= \mu(t) \wedge \mu(x) \wedge \mu(p) > 0.\end{aligned}$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد که عنصر $x' \in R$ وجود دارد که $(a \circ (b \oplus c))(x') > 0$ و $((a \circ b) \oplus (a \circ c))(x') > 0$.

بنابراین $(R,\oplus,\circ)$ یک H_v-حلقه فازی است.

قضیه ۱۰٫۳. فرض کنید $(R,\oplus,\circ)$ یک H_v-حلقه فازی باشد. در این صورت

(i) برای هر $a,b \in R$، $\chi_a \circ \chi_b = a \circ b$،

(ii) برای هر $a \in R$، $\chi_R \circ \chi_a = R \circ a$ و $\chi_a \circ \chi_R = a \circ R$،

(iii) برای هر $\mu \in F(R)$، $\chi_R \circ \mu = R \circ \mu$ و $\mu \circ \chi_R = \mu \circ R$،

(iv) برای هر $a,b,c \in R$، $\chi_a \circ (\chi_b \circ \chi_c) = a \circ (b \circ c)$ و $(\chi_a \circ \chi_b) \circ \chi_c = (a \circ b) \circ c$،

(v) برای هر $a,b,c \in R$، $\chi_a \square (\chi_b \oplus \chi_c) = (\chi_a \square \chi_b) \oplus (\chi_a \square \chi_c)$ و $(\chi_a \oplus \chi_b) \square \chi_c = (\chi_a \square \chi_c) \oplus (\chi_b \square \chi_c)$،

که در آن $\circ \in \{\oplus, \square\}$.

اثبات. آسان است.

۴. p-برش از H_v-حلقه‌های فازی

فرض کنید R یک مجموعه غیرتهی و $(R,\circ)$ یک ابرساختار باشد. در این صورت p-برش $a \circ b$ برای $a,b \in R$ به صورت $(a \circ b)_p = \{t \in R \mid (a \circ b)(t) \geq p\}$ تعریف می‌شود که در آن $p \in (0,1]$. همچنین ابرعمل $\circ_p$ روی R به صورت $a \circ_p b = (a \circ b)_p$ بیان می‌شود.

قضیه۱,۴. [18] فرض کنید R یک مجموعه غیرتهی و $\oplus_p$ و $\odot_p$ ابرساختارهای متناظر $\oplus$ و $\odot$ باشند. در این صورت برای هر $a,b,c,t \in R$ داریم

$$(a \odot (b \oplus c))(t) \geq p \Leftrightarrow t \in (a \odot_p (b \oplus_p c)),$$
$$((a \oplus b) \odot c)(t) \geq p \Leftrightarrow t \in ((a \oplus_p b) \odot_p c),$$
$$((a \odot b) \oplus (a \odot c))(t) \geq p \Leftrightarrow t \in ((a \odot_p b) \oplus_p (a \odot_p c)),$$
$$((b \odot a) \oplus (c \odot a))(t) \geq p \Leftrightarrow t \in ((b \odot_p a) \oplus_p (c \odot_p a)).$$

قضیه۲,۴. [3] ابرساختار $(R,\circ)$ یک H_v-گروه فازی است اگروتنهااگر برای هر $p \in (0,1]$، $(R,\circ_p)$ یک H_v-گروه باشد.

قضیه۳,۴. $(R,\oplus,\odot)$ یک H_v-حلقه فازی است اگروتنهااگر برای هر $p \in (0,1]$، $(R,\oplus_p,\odot_p)$ یک H_v-حلقه باشد.

اثبات. با استفاده از قضیه۲,۴، کافیست خاصیت توزیع پذیری را بررسی کنیم. فرض کنید $(R,\oplus,\odot)$ یک H_v-حلقه فازی و $p \in (0,1]$ باشد.

درنتیجه برای هر $a,b,c \in R$ عنصر $t \in R$ وجود دارد به طوری که $(a \odot (b \oplus c))(t) = m > 0$ و $((a \odot b) \oplus (a \odot c))(t) = n > 0$. بنابراین، اگر $m \wedge n = p$، آن‌گاه $(a \odot (b \oplus c))(t) \geq p$ و $((a \odot b) \oplus (a \odot c))(t) \geq p$ اگروتنهااگر برای هر $a,b,c \in R$ عنصر $t \in R$ وجود دارد به طوری که $t \in (a \odot_p (b \oplus_p c)) \cap ((a \odot_p b) \oplus_p (a \odot_p c))$.

به طور مشابه می‌توان نشان داد که برای هر $a,b,c \in R$ عنصر $t \in R$ وجود دارد به طوری که $t \in ((a \oplus_p b) \odot_p c) \cap ((a \odot_p c) \oplus_p (b \odot_p c))$. بنابراین $(R,\oplus_p,\odot_p)$ یک H_v-حلقه است.

برعکس، اگر $p \in (0,1]$ و $(R,\oplus_p,\odot_p)$ یک H_v-حلقه باشد، آن‌گاه برای هر $a,b,c \in R$ عنصر $t \in R$ وجود دارد که $t \in (a \odot_p (b \oplus_p c)) \cap ((a \odot_p b) \oplus_p (a \odot_p c))$. بنابراین $(a \odot (b \oplus c))(t) \geq p > 0$ و $((a \odot b) \oplus (a \odot c))(t) \geq p > 0$. درنتیجه $(R,\oplus,\odot)$ یک H_v-حلقه فازی است.

اگر $(G,\circ)$ یک H_v-گروه باشد، آن‌گاه برای هر $a,b \in G$، در مراجع [17] و [23] ابرعمل زیر که متناظر با ابرعمل $\circ$ می‌باشد تعریف شده است

$$a * b = \{x \in G \mid (a \circ b)(x) > 0\}.$$

قضیه۴,۴. [3] فرض کنید $(G,\circ)$ یک H_v-گروه فازی باشد. در این صورت $(G,*)$ یک H_v-گروه است.

حال اگر $(R,\oplus,\odot)$ یک H_v-حلقه فازی باشد، دو ابرعمل متناظر را برای هر $a,b \in R$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$a + b = \{x \in R \mid (a \oplus b)(x) > 0\}, \quad a \cdot b = \{x \in R \mid (a \circ b)(x) > 0\}.$$

قضیه۵,۴. فرض کنید $(R,\oplus,\odot)$ یک H_v-حلقه فازی باشد. در این صورت $(R,+,\cdot)$ یک H_v-حلقه است.

اثبات. با استفاده از قضیه۴,۴، ابرساختار $(R,+)$ یک H_v-گروه جابجایی ضعیف و $(R,\cdot)$ یک H_v-نیم‌گروه است. فرض کنید $(R,\oplus,\odot)$ یک H_v-حلقه فازی باشد. در این صورت $a,b,c \in R$ عنصر $x \in R$ چنان وجود دارد به طوری که $x \in (a \cdot (b + c)) \cap ((a \cdot b) + (a \cdot c))$. آنگاه

$$(a \odot (b \oplus c))(x) > 0, \quad ((a \odot b) \oplus (a \odot c))(x) > 0$$

بنابراین $\underset{p,q \in R}{\vee} (a \odot b)(p) \wedge (p \oplus q)(x) \wedge (a \odot c)(q) > 0$ و $\underset{t \in R}{\vee} (a \odot t)(x) \wedge (b \oplus c)(t) > 0$. درنتیجه عناصر $x, t_1, p_1, q_1 \in R$ وجود دارند به طوری‌که

$$x \in a \cdot t_1, \quad t_1 \in b + c, \quad p_1 \in a \cdot b, \quad x \in p_1 + q_1, \quad q_1 \in a \cdot c$$

بنابراین $x \in (a \cdot (b + c)) \cap ((a \cdot b) + (a \cdot c))$.

به طور مشابه می‌توان نشان داد که برای هر $a,b,c \in R$ عنصر $t \in R$ چنان وجود دارد به طوری که $t \in (a \cdot (b + c)) \cap ((a \cdot b) + (a \cdot c))$. درنتیجه $(R,+,\cdot)$ یک H_v-حلقه است.

بنا به مراجع [17] و [23]، اگر $(G,*)$ یک ابرگروه باشد، آن‌گاه برای هر $a,b \in G$ می‌توان ابرعمل فازی $a \circ b = \chi_{a*b}$ را تعریف کرد.

قضیه۶٫۴. [3] فرض کنید $(G,*)$ یک H_v-گروه فازی باشد. در این صورت $(G,\circ)$ یک H_v- گروه فازی است.

حال اگر $(R,+,\cdot)$ یک H_v-حلقه باشد، آن‌گاه برای هر $a,b \in R$ دو ابرعمل متناظر $a \circ b = \chi_{a \cdot b}$ و $a \oplus b = \chi_{a+b}$ را تعریف می‌کنیم.

قضیه۷٫۴. فرض کنید $(R,+,\cdot)$ یک H_v-حلقه باشد. در این صورت $(R,\oplus,\odot)$ یک H_v-حلقه فازی است.

اثبات. با استفاده از قضیه بالا $(R,\oplus)$ یک H_v-گروه فازی و $(R,\cdot)$ یک H_v-نیم‌گروه فازی است. فرض کنید $(R,\oplus,\odot)$ یک H_v-حلقه فازی باشد. چون $(R,+)$ یک H_v-گروه جابجایی ضعیف است. آن‌گاه برای هر $a,b \in R$، $(a+b)\cap(b+a) \neq \emptyset$. بنابراین عنصر $x \in R$ وجود دارد که $x \in a+b$ و $x \in b+a$. درنتیجه

$$(a \oplus b)(x) = \chi_{\{a+b\}}(x) = 1 > 0, \quad (b \oplus a)(x) = \chi_{\{b+a\}}(x) = 1 > 0.$$

پس $(R,\oplus)$ یک H_v-گروه جابجایی ضعیف فازی است. حال، طبق فرض برای هر $a,b,c \in R$ عنصر $x \in R$ وجود دارد به طوری که $x \in ((a+b)\cdot c)$ و $x \in (a\cdot c)+(b\cdot c)$. اگر $x \in ((a+b)\cdot c)$، آن‌گاه عنصر $s \in R$، $s \in a+b$ وجود دارد به طوری که $x \in sc$. بنابراین

$$((a \oplus b)\odot c)(x) = \bigvee_{y \in R} (a \oplus b)(y) \wedge (y \odot c)(x) = \bigvee_{y \in R} \chi_{\{a+b\}}(y) \wedge \chi_{\{y\cdot c\}}(x)$$
$$\geq \chi_{\{a+b\}}(s) \wedge \chi_{\{s+c\}}(x) = 1 > 0.$$

به طور مشابه، اگر $x \in (a\cdot c)+(b\cdot c)$، آن‌گاه عناصر $t,p \in R$، $t \in a\cdot c$، $p \in b\cdot c$ وجود دارند به طوری که $x \in t+p$. در نتیجه داریم $((a \odot c)\oplus(b \odot c))(x) \geq \chi_{\{a\cdot c\}}(t) \wedge \chi_{\{t+p\}}(x) \wedge \chi_{\{b\cdot c\}}(p) = 1 > 0$. همچنین به طور مشابه می‌توان نشان داد که عنصر $x' \in R$ وجود دارد به طوری که $(a \odot (b \oplus c))(x') > 0$ و $((a \odot b)\oplus(a \odot c))(x') > 0$. بنابراین $(R,\oplus,\odot)$ یک H_v-حلقه فازی است.

با استفاده از دو قضیه۵٫۴ و ۷٫۴ می‌توان نتیجه گرفت که اگر $H_v R$ نشان‌دهنده کلاسی از H_v-گروه‌ها و $FH_v R$ نشان‌دهنده کلاسی از H_v-گروه‌های فازی باشند، آن‌گاه می‌توان دو نگاشت زیر را برای هر $a,b \in R$ بیان کرد.

(۱) $f : H_v R \to FH_v R$ و $f(R,+,\cdot) = (R,\oplus,\circ)$ که در آن $a \oplus b = \chi_{a+b}$ و $a \circ b = \chi_{a\cdot b}$،

(۲) $f : FH_v R \to H_v R$ و $g(R,\oplus,\circ) = (R,+,\cdot)$ که در آن $a \cdot b = \{x \in R \mid (a \circ b)(x) > 0\}$ و $a+b = \{x \in R \mid (a \oplus b)(x) > 0\}$.

۴. مراجع

[1] R. Ameri, M.M. Zahedi, Hyperalgebraic systems, Ital. J. Pure Appl. Math., 6 (1999) 21-32.
[2] R. Ameri, M. Asghari-Larimi, M. Maghsoomi, Direct limits of a direct system of fuzzy complete multialgebra, Journal of Intelligent Fuzzy Systems, 30 (2016) 1293-1299.
[3] M. Asghari-Larimi, Fuzzy Hv-semigroups (accepted).
[4] M. Asghari-Larimi, B. Davvaz, Hyperstructures associated to arithmetic functions, Ars Combitoria, 97 (2010) 51-63.
[5] M. Asghari-Larimi, V. Leoreanu-Fotea, A connection between hypergroupoids and L-Fuzzy Sets of Type 2, Italian J. of Pure and Appl. Math., 26 (2009) 207-216.

[6] G. Chowdhury, Fuzzy transposition hypersemigroups, Iranian Journal of Fuzzy Systems Vol. 6, 3 (2009) 37-52.
[7] J. Chvalina, S. Hoskova, Modelling of join spaces with proximities by first-order linear partial differential operators, Ital. J. Pure Appl. Math., Number 21 (2007) 177-190.
[8] P. Corsini, Prolegomena of hypergroup theory, Second edition, Aviani editor, 1993.
[9] P. Corsini, V. Leoreanu, Applications of hyperstructure theory, Advances in Mathematics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.
[10] B. Davvaz, A brief survey of the theory of Hv-structures. In: Proc. 8th International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications, 19 Sep. 2002, Spanidis Press, Samothraki, Greece, (2003) 39-70.
[11] B. Davvaz, Approximations in hyperrings, Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing, 15 (2009) 471-488.
[12] B. Davvaz, Fuzzy Hv-groups, Fuzzy Sets and Systems, 101 (1999) 191-195.
[13] B. Davvaz, Fuzzy Hv-submodules, Fuzzy Sets and Systems, 117 (2001) 477-484.
[14] B. Davvaz, V. Leoreanu-Fotea, Hyperring theory and Applications, International Academic Press, USA, 2007.
[15] A. Dramalidis, Dual Hv-rings, Rivista di Matematica Pura de Applicata, 17 (1996) 55-62.
[16] P. He, X. Xin, Fuzzy hyperlattices, Computers and Mathematics with Applications, 62 (2011) 4682-4690.
[17] V. Leoreanu-Fotea, B. Davvaz, Fuzzy hyperrings, Fuzzy Sets and Systems, 160 (2009) 2366-2378.
[18] V. Leoreanu-Fotea, Fuzzy hypermodules, Computers and Mathematics with Applications, 57 (2009) 466-475.
[19] F. Marty, Sur une generalization de la notion de groupe, 8th Congress Math. Scandenaves, Stockholm, (1934) 45-49.
[20] Ch. G. Massouros, A. Dramalidis, Transposition Hv-groups, Ars Combinatoria, 106 (2012) 143-160.
[21] J.N. Mordeson, M.S. Malik, Fuzzy Commutative Algebra, Word Publ., 1998.
[22] A. Rosenfeld, Fuzzy groups, J. Math. Anal. Appl., 35 (1971) 512-517.
[23] M.K. Sen, R. Ameri, G. Chowdhury, Fuzzy hypersemigroups, Soft Comput., (2007) doi:10.1007/s00500-007-0257-9.
[24] S. Spartalis, T. Vougiouklis, The fundamental relations on Hv-rings. Riv. Mat. Pura Appl., 13 (1994) 7-20.
[25] T. Vougiouklis, Hyperstructures and their representations, Hadronic Press, Inc, 115, Palm Harber, USA, (1994).
[26] T. Vougiouklis, The fundamental relation in hyperrings. The general hyperfield, in: Proceedings of the Fourth International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications (AHA 1990), World Scientific, 1991, pp. 203-211.
[27] T. Vougiouklis, Representations of hypergroups by hypermatrices. Rivista di Mat. Pura ed Appl., 2 (1987) 719.
[28] L.A. Zadeh, Fuzzy Sets, Inform and Control, 8 (1965) 338-353.