روابط بین برخی از مجموعه‌های احاطه‌کننده

فرزانه پیری*[1]، سعید محمدیان سمنانی[2]،
Gary Macgillivray[3]

۱- دانشجوی دکتری؛ دانشگاه سمنان- دانشکده ریاضیات، آمار و علوم کامپیوتر

۲- عضو هیئت علمی؛ دانشگاه سمنان-دانشکده ریاضیات، آمار و علوم کامپیوتر

۳- عضو هیئت علمی؛ دانشگاه ویکتوریا؛ کانادا-دانشکده ریاضیات و آمار

چکیده

در این مقاله نوعی تابع احاطه‌کننده به نام تابع احاطه‌کننده ایتالیایی تعمیم‌یافته کارا معرفی شده و رابطه بین آن و برخی از مجموعه‌های احاطه‌کننده بررسی می‌شود. همچنین، کرانی برای عدد احاطه‌گر ایتالیایی تعمیم‌یافته کارا برای گراف‌هایی که تابع EGID را می‌پذیرند ارائه شده و شرط لازم روی مرتبه گراف‌های منتظم برای پذیرفتن این نوع توابع بررسی می‌گردد.

کلمات کلیدی: تابع احاطه‌کننده ایتالیایی کارا، مجموعه احاطه‌کننده دوبل، عدد احاطه‌گر، وزن گراف، گراف منتظم.

۱. مقدمه

فرض کنید $G(V,E)$ گرافی ساده از مرتبه n با مجموعه راس‌های $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ باشد. ماتریس مجاورت G، $A(G)=\left[a_{ij}\right]$، ماتریسی مربعی از مرتبه n است که در آن اگر یالی بین رئوس v_i و v_j در G موجود باشد، آنگاه $a_{ij}=1$؛ در غیر این‌صورت، $a_{ij}=0$. همسایگی باز یک راس در G مانند v، که به صورت $N_G(v)$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از مجموعه تمام رئوس مجاور با v؛ به عبارت دیگر: $N_G(v)=\{u\in V(G)\,|\,uv\in E(G)\}$. همچنین همسایگی بسته v در G عبارت است از $N_G[v]=N_G(v)\bigcup\{v\}$.

مجموعه $S\subseteq V$ یک مجموعه احاطه‌کننده نامیده می‌شود اگر هر راسی که متعلق به مجموعه S نیست همسایه ای در S داشته باشد. عدد احاطه‌گر γ اندازه کوچکترین مجموعه احاطه‌کننده گراف G است. مفهوم مجموعه

احاطه‌کننده در گرافها یکی از شناخته‌شده‌ترین مفاهیم در نظریه گراف بوده و مطالعات زیادی در این زمینه انجام شده است؛ از جمله می‌توان به [۴] مراجعه نمود.

هراری و هاینس تعمیمی از مجموعه احاطه‌کننده را در [۵] به شرح زیر معرفی کرده‌اند: مجموعه $S \subseteq V$ یک مجموعه احاطه‌کننده k-تایی گراف G نامیده می‌شود اگر برای هر راس $v \in V$ داشته باشیم: $|N_G(v) \cap S| \geq k$. به عبارت دیگر، مجموعه $S \subseteq V$ یک مجموعه احاطه‌کننده k-تایی برای G است اگر برای هر راس $v \in V$، یا v متعلق به مجموعه S بوده و حداقل $k-1$ همسایه در S داشته باشد و یا متعلق به متمم مجموعه S بوده و حداقل k همسایه در S داشته باشد. عدد احاطه‌گر k-تایی، $\gamma_{\times k}$، اندازه کوچکترین مجموعه احاطه‌کننده k-تایی G می‌باشد. یک مجموعه احاطه‌کننده ۲-تایی، مجموعه احاطه‌کننده دوبل گراف G نامیده می‌شود.

به عنوان یک تعریف معادل برای مجموعه احاطه‌کننده، می‌توان مجموعه احاطه‌کننده k-تایی را به ازای $k=1$ در نظر گرفت. یعنی مجموعه‌ای مانند $S \subseteq V$ که برای هر $v \in V$ داریم: $|N_G[v] \cap S| \geq 1$. اگر برای هر راس $v \in V$ تساوی برقرار باشد، آنگاه مجموعه S مجموعه احاطه‌کننده کارا نامیده می‌شود [۱]. به عبارت دیگر، مجموعه $S \subseteq V$ یک مجموعه احاطه‌کننده کارا است هرگاه S یک مجموعه مستقل بوده و هر راسی که در S نیست، دقیقا یک همسایه در S داشته باشد. عدد احاطه‌گر کارا، γ^E، اندازه کوچکترین مجموعه احاطه‌کننده کارا در G است. به طور مشابه، یک مجموعه احاطه‌کننده k-تایی کارا در گراف G، مجموعه‌ای مانند $S \subseteq V$ است به طوری که هر راس V دقیقا توسط k عضو S احاطه می‌شود. عدد احاطه‌گر k-تایی کارا، $\gamma^E_{\times k}$، اندازه کوچکترین مجموعه احاطه‌کننده k-تایی کارا در G می‌باشد. همچنین یک مجموعه احاطه‌کننده دوبل کارا که در[۵] تعریف شده است، یک مجموعه احاطه‌کننده k-تایی کارا به ازای $k=2$ می‌باشد.

یک تابع احاطه‌کننده ایتالیایی، تابعی به صورت $f: V \rightarrow \{0,1,2\}$ است به طوری که به ازای هر راس x که $f(x)=0$ داشته باشیم: $\sum_{u \in N(x)} f(u) \geq 2$. وزن یک راس v، $f(v)$، ارزش تخصیص داده شده به آن راس تحت تابع f می‌باشد. همچنین وزن یک تابع احاطه‌کننده ایتالیایی برابر است با $f(V)=\sum_{x \in V} f(x)$. مینیمم وزن یک تابع احاطه‌کننده ایتالیایی گراف G، عدد احاطه‌گر G نامیده و با γ_I نشان داده می‌شود. تابع احاطه‌کننده ایتالیایی اخیرا در [۲] و [۶] مطالعه شده است.

در این مقاله روی پارامتری متمرکز خواهیم شد که تعمیمی از مجموعه‌های احاطه‌کننده دوبل و احاطه‌کننده ایتالیایی به نام مجموعه احاطه‌کننده ایتالیایی تعمیم‌یافته است که به اختصار تابع GID می‌نامیم. این تابع با در نظر گرفتن شرط $\sum_{u \in N(x)} f(u) \geq 2$ روی تمام رئوس گراف G تعریف می‌شود. به طور مشابه، وزن یک تابع GID برابر با $f(V)=\sum_{x \in V} f(x)$ است و مینیمم وزن چنین تابعی، عدد احاطه‌گر ایتالیایی تعمیم‌یافته نام دارد و با γ_{GI} نشان داده می‌شود.

یک تابع احاطه‌کننده ایتالیایی تعمیم‌یافته کارای گراف G که به اختصار تابع EGID می‌نامیم، تابعی به صورت $f: V \rightarrow \{0,1,2\}$ است که برای هر راس $x \in V$ شرط $\sum_{u \in N[x]} f(u) = 2$ برقرار باشد. همچنین عدد احاطه‌گر ایتالیایی تعمیم‌یافته کارا، γ^E_{GI}، مینیمم وزن یک تابع EGID در G است.

تمام پارامترهای ذکر شده در فوق را می‌توان در یک چهارچوب کلی قرار داد که در [۶] معرفی شده است. فرض کنید G یک گراف باشد. با در نظر گرفتن عدد صحیح $p \geq 1$ و عبارت بولی ω، یک تابع $f: V \rightarrow \{0,1,\ldots,p\}$ تابع احاطه‌کننده (p,ω) نامیده می‌شود اگر ω درست باشد. در این مقاله ω را به صورت زیر در نظر می‌گیریم: برای هر راس v نامساوی $\sum_{x \in N[v]} f(x) \geq q$ برقرار باشد که در آن $q \geq 1$ عددی صحیح است. بنابراین، ترجیح می‌دهیم

از عبارت تابع احاطه‌کننده (p,ω_q) استفاده کنیم. برای مثال، اگر $p=q=1$، آنگاه تابع احاطه‌کننده $(1,\omega_1)$ تابع مشخصه یک مجموعه احاطه‌کننده است. اگر $p=1$ و $q=2$، آنگاه تابع احاطه‌کننده $(1,\omega_2)$ تابع مشخصه یک مجموعه احاطه‌کننده دوبل می‌باشد. در کل، تابع احاطه‌کننده $(1,\omega_k)$، تابع مشخصه یک مجموعه احاطه‌کننده k-تایی است. همچنین تابع احاطه‌کننده ایتالیایی تعمیم‌یافته از $p=q=2$ به دست می‌آید. به طور مشابه، وزن یک تابع احاطه‌کننده (p,ω_q) برابر با $f(V)=\sum_{x\in V} f(x)$ است و مینیمم وزن چنین تابعی روی گراف G را عدد احاطه گر (p,ω_q) گراف G می‌نامیم. مطابق با تابع احاطه‌کننده (p,ω_q)، می‌توان مجموعه رئوس گراف G را به داخل زیرمجموعه‌های $A_0,A_1,\dots,A_p$ افراز کرد به طوری که رئوس واقع در مجموعه A_j، $0\le j\le p$، دارای وزن j هستند.

با توجه به تعریف تابع احاطه‌کننده (p,ω_q)، می‌توان از مساله برنامه‌ریزی با اعداد صحیح زیر برای یافتن عدد احاطه‌گر (p,ω_q) استفاده کرد.

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimize} && \sum_{x\in V} f(x) \\
&s.t && \sum_{u\in N[x]} f(u)\ge q; \quad \forall x\in V \\
& && f(x)\in\{0,1,\dots p\}; \quad \forall x\in V
\end{aligned} \tag{1}
$$

با توجه به تعریف، تناظری یک به یک بین جواب‌های صحیح شدنی مساله برنامه‌ریزی فوق و توابع احاطه‌کننده (p,ω_q) وجود دارد. بنابراین، یک جواب صحیح بهینه مساله فوق، متناظر با عدد احاطه‌گر (p,ω_q) گراف G می‌باشد.

به علاوه، اگر در شرط عبارت ω_q، برای هر راس v تساوی برقرار باشد آنگاه تابع احاطه‌کننده (p,ω_q) در گراف G کارا و مینیمم وزن آن، عدد احاطه‌گر کارای (p,ω_q) گراف G نامیده می‌شود. به طور مشابه، مساله برنامه‌ریزی با اعداد صحیح زیر عدد احاطه‌گر کارای (p,ω_q) گراف G را می‌دهد:

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimize} && \sum_{x\in V} f(x) \\
&s.t && \sum_{u\in N[x]} f(u)= q; \quad \forall x\in V \\
& && f(x)\in\{0,1,\dots p\}; \quad \forall x\in V
\end{aligned} \tag{2}
$$

۲. رابطه بین توابع احاطه‌کننده (p,ω_q)

قضیه۲٫۱. اگر گراف G یک مجموعه احاطه‌کننده کارا داشته باشد آنگاه G یک تابع EGID می‌پذیرد و $\gamma_{GI}^{E}=2\gamma^{E}$.

برهان. فرض کنید S مجموعه احاطه‌کننده کارای مینیمم گراف G باشد. واضح است که G یک تابع EGID نیز می‌پذیرد (کافیست وزن ۲ را به رئوس S تخصیص دهیم). بنابراین $\gamma_{GI}^{E} \leq 2\gamma^{E}$. فرض کنید $S' = A_0 \bigcup A_1 \bigcup A_2$ افرازی از مجموعه رئوس G متناظر با تابع EGID مینیمم باشد که در آن A_0 مجموعه رئوس G با وزن ۰، A_1 مجموعه رئوس G با وزن ۱ و A_2 مجموعه رئوس G با وزن ۲ باشند. اگر $A_2 = S$ و $A_1 = \varnothing$، آنگاه $\gamma_{GI}^{E} = 2\gamma^{E}$. فرض کنید حداقل یکی از عناصر S (مانند s) متعلق به مجموعه A_2 نباشد. بنابراین وزن راس s برابر با ۰ یا ۱ است. از آنجایی که s با عناصر دیگر S یا همسایه‌هایشان مجاور نیست، S' باید شامل برخی از همسایه های s (با وزن بزرگتر از ۰) باشد تا تساوی $\sum_{u \in N[s]} f(u) = 2$ برقرار باشد. بنابراین γ_{GI}^{E} نمی‌تواند کمتر از $2\gamma^{E}$ باشد. □

قضیه ۲,۱ می‌تواند مستقیما از نتیجه ۲,۵ که نشان می‌دهد تمام توابع EGID گراف G وزن یکسان دارند به دست آید. برای اثبات آن از رابطه بین تابع EGID و مجموعه احاطه‌کننده دوبل کارا استفاده می‌کنیم که نتیجه‌ای از قضیه زیر است:

قضیه۲,۲. گراف G دارای یک مجموعه احاطه‌کننده (کارای) (k, ω_k) تحت تابع f است اگر و تنها اگر $G' = G \; wr \; K_k$ یک مجموعه احاطه‌کننده (کارای) $(1, \omega_k)$ تحت تابع f' داشته باشد به‌طوری‌که $f(V(G)) = f'(V(G'))$.

برهان. فرض کنید $\{v_i \mid i = 1, \dots, n\}$ مجموعه راس‌های گراف G و $\{(v_i, u_j) \mid i = 1, \dots, n;\; j = 1, \dots, k\}$ مجموعه راس‌های گراف G' باشند. فرض کنید f یک تابع احاطه‌کننده (k, ω_k) برای گراف G و v_t راسی از G با وزن l تحت تابع f باشد. برای به دست آوردن یک مجموعه احاطه کننده $(1, \omega_k)$ برای گراف G'، با توجه به ساختار G'، کافیست وزن ۱ را به l راس زیرگراف کامل گراف G' القا شده توسط رئوس $\{(v_t, u_j) \mid j = 1, \dots, k\}$ تخصیص دهیم.

برعکس، فرض کنید f' یک تابع احاطه‌کننده $(1, \omega_k)$ برای گراف G' باشد. با تخصیص وزن $\sum_{j=1}^{k} f'((v_t, u_j))$ به راس v_t در G، یک تابع احاطه‌کننده (k, ω_k) برای گراف G به دست می‌آوریم. برای توابع کارا اثبات مشابه است. □

به عنوان یک نتیجه از قضیه ۲,۲، با فرض $p = q = 2$، داریم:

نتیجه ۲,۳. گراف G یک تابع EGID به نام f دارد اگر و تنها اگر $G' = G \; wr \; K_2$ یک مجموعه احاطه کننده دوبل کارا تحت تابع f' داشته باشد به طوری که $f(V(G)) = f'(V(G'))$.

قضیه ۲,۴. اگر گراف G یک مجموعه احاطه‌کننده دوبل کارا داشته باشد آنگاه اندازه تمام چنین مجموعه‌هایی یکسان است.

نتیجه ۲,۵. اگر گراف G دارای تابع EGID باشد، آنگاه وزن تمام چنین توابعی یکسان است.

قضیه ۲,۶. اگر گراف G دارای مجموعه احاطه‌کننده دوبل کارا باشد، آنگاه G دارای مجموعه احاطه‌کننده دوبل خواهد بود و $\gamma_{\times 2}^{E} = \gamma_{\times 2}$.

برهان. فرض کنید S یک مجموعه احاطه‌کننده دوبل کارا برای گراف G باشد. از آنجایی که اندازه تمام مجموعه‌های احاطه‌کننده دوبل کارا یکسان هستند، $|S| = \gamma_{\times 2}^{E}$. واضح است که S یک مجموعه احاطه‌کننده دوبل نیز برای گراف G می‌باشد.

فرض کنید S' یک مجموعه احاطه‌کننده دوبل مینیمم برای گراف G باشد. اگر $|S'|>|S|$ باشد آنگاه راسی مانند $v\in S$ وجود دارد که متعلق به S' نمی‌باشد. بنابراین، از آنجایی که v تنها یک همسایه در S دارد، برای پوشش آن باید یکی دیگر از همسایه‌های v (مانند x) متعلق به مجموعه S' باشد. اگر x با تمام همسایه‌های دیگر v مجاور باشد، $S-v\bigcup\{x\}$ یک مجموعه احاطه‌کننده دوبل است به طوری که اندازه آن برابر با $|S|$ می‌باشد. در غیر اینصورت، فرض کنید u (همسایه v) با x مجاور نباشد. بنابراین باید راس دیگری در S' مجاور با u موجود باشد؛ اما در این حالت، $|S|>|S'|$ که یک تناقض است. بنابراین S یک مجموعه احاطه‌کننده دوبل مینیمم برای گراف G است.

□

قضیه ۲,۷. اگر گراف G یک تابع EGID بپذیرد آنگاه تابع GID نیز می‌پذیرد و $\gamma_{GI}^E=\gamma_{GI}$.

برهان. فرض کنید f یک تابع EGID برای گراف G باشد. از آنجایی که وزن تمام توابع EGID برابر است، $\gamma_{GI}^E=f(V(G))$. با استفاده از قضایای ۲,۳ و ۲,۶، $G'=G\ wr\ K_2$ یک مجموعه احاطه‌کننده دوبل کارا مانند S' دارد که یک مجموعه احاطه‌کننده دوبل نیز برای G' تحت تابع f' می‌باشد به طوری که $f(V(G))=f'(V(G'))$؛ بدین معنی که $\gamma_{GI}^E=\gamma_{\times 2}^E=\gamma_{\times 2}$. مطابق با قضیه ۲,۲، با استفاده از مجموعه احاطه‌کننده دوبل S' برای گراف G' تحت تابع f'، می‌توان یک تابع GID مانند f'' برای گراف G تعیین نمود به طوری که $f''(V(G))=f'(V(G'))$؛ به عبارت دیگر $\gamma_{GI}^E=\gamma_{\times 2}^E=\gamma_{\times 2}=\gamma_{GI}$. □

همانطور که اشاره شد، اگر یک گراف G یک مجموعه احاطه‌کننده کارا داشته باشد، آنگاه G یک تابع EGID می‌پذیرد. همچنین اگر G تابع EGID بپذیرد، آنگاه G دارای یک تابع GID است. بعلاوه، می‌دانیم که اگر G یک مجموعه احاطه‌کننده کارا داشته باشد، آنگاه G دارای یک مجموعه احاطه‌کننده است و $\gamma^E=\gamma$. بنابراین می‌توان قضیه زیر را با استفاده از قضایای ۲,۱ و ۲,۷ به دست آورد.

نتیجه ۲,۸. اگر G دارای یک مجموعه احاطه‌کننده کارا باشد آنگاه G دارای یک تابع EGID، یک تابع GID و یک مجموعه احاطه‌کننده خواهد بود به طوری که $\gamma_{GI}^E=\gamma_{GI}=2\gamma^E=2\gamma$.

توجه کنید که ممکن است گراف G هیچ مجموعه احاطه‌کننده کارایی نداشته باشد؛ در حالی که یک تابع EGID بپذیرد. در این حالت $\gamma_{GI}^E<2\gamma$. به عنوان مثال، گراف‌های گردشی مکعبی با $8k$ راس که k عددی طبیعی و دلخواه است.

قضیه ۲,۹. فرض کنید G گرافی d-منتظم از مرتبه n باشد. اگر G یک تابع EGID به نام f بپذیرد آنگاه $f(V)=\gamma_{GI}^E=\dfrac{2n}{1+d}$.

برهان. از آنجایی که f یک تابع EGID برای گراف G است، برای هر راس $x\in V$ شرط $\sum_{u\in N[x]}f(u)=2$ حفظ می‌شود. از طرفی، وزن تمام توابع EGID برابر با یکدیگر می‌باشند. بنابراین:

$$2n=\sum_{x\in V}\sum_{u\in N[x]}f(u)=(1+d)\sum_{x\in V}f(x)=(1+d)\gamma_{GI}^E \qquad (3)$$

□

نتیجه ۲,۱۰. فرض کنید G گرافی از مرتبه n و مینیمم درجه δ باشد. اگر G یک تابع EGID به نام f بپذیرد، آنگاه $f(V)\le\dfrac{2n}{1+\delta}$.

قضیه زیر نتیجه ای از قضیه ۲,۹ می‌باشد؛ هرچند اثباتی متفاوت را برای آن ارائه خواهیم داد.

قضیه ۲٫۱۱. فرض کنید G گرافی d-منتظم از مرتبه n باشد. اگر G یک تابع EGID بپذیرد، آنگاه برای k دلخواه داریم: $n=(1+d)k$.

برهان. فرض کنید A_2 مجموعه راس‌های G با وزن ۲ و A_1 مجموعه راس‌های G با وزن ۱ باشند. همچنین A_{02} و A_{01} مجموعه‌هایی از رئوس G با وزن ۰ باشند به طوری که هر راس از آنها به ترتیب یا یک همسایه با وزن ۲ یا دو همسایه با وزن ۱ دارند. واضح است که $|A_{02}|=|A_2|d$ و $2|A_{01}|=(d-1)|A_1|$. بنابراین:

$$n=|A_1|+|A_2|+|A_{01}|+|A_{02}|=(1+d)(\frac{1}{2}|A_1|+|A_2|)$$

□

توجه کنید از آنجایی که یک جورسازی تام در زیرگراف القاشده توسط رئوس A_1 وجود دارد، مرتبه آن زوج می‌باشد.
عکس قضیه برقرار نمی‌باشد. به عنوان مثال می‌توان گراف نردبانی موبیوس مکعبی با ۸ راس را در نظر گرفت.

۳. نتیجه‌گیری

در این مقاله ثابت کردیم که اگر G دارای یک مجموعه احاطه‌کننده کارا باشد آنگاه G دارای یک تابع EGID، یک تابع GID و یک مجموعه احاطه‌کننده خواهد بود به طوری که $\gamma_{GI}^{E}=\gamma_{GI}=2\gamma^{E}=2\gamma$. هرچند ممکن است گراف هیچ مجموعه احاطه‌کننده کارایی نداشته باشد؛ در حالی که یک تابع EGID می‌پذیرد که در این حالت $\gamma_{GI}^{E}<2\gamma$. همچنین، اگر G یک تابع EGID به نام f بپذیرد، آنگاه $f(V)=\gamma_{GI}^{E}\le\frac{2n}{1+\delta}$ که در آن n مرتبه گراف و δ مینیمم درجه G می‌باشد. در نهایت، ثابت کردیم که اگر G گرافی d-منتظم از مرتبه n باشد. اگر G یک تابع EGID بپذیرد، آنگاه برای k دلخواه داریم: $n=(1+d)k$.

۴. مراجع

1.Dejter, I.J. and Serra, O. (2003), “Efficient dominating sets in Cayley graphs,” Discrete Appl.Math.129, pp 319-328.

2.Chellali, M. and Haynes, T. and Hedetniemi, S. and McRae, A. (2005), “Roman 2-domination,” to appear in Discrete Appl. Math.

3.Chellali, M. and Khelladi, A. and Maffray, F. (2005), “Exact double domination in graphs,” Discussiones Mathematicae, Graph Theory 25, pp 291-302.

4.Haynes, T.W. and Hedetniemi, S.T. and Slater, P.J. (1998), “Fundamentals of Domination in Graphs,” Marcel Dekker, New York.

5.Harary F. and Haynes, T.W. (2000), “Double domination in graphs,” Ars Combin. 55, 201-213.

6.Klostermeyer W.F. and MacGillivray, G. “Roman, Italian, and 2-Domination”.

7.West, D.B. (2002), “Introduction to Graph Theory,” University of Illinois Urbana.