دومین کنفرانس بین‌المللی ترکیبیات، رمزنگاری و محاسبات
I4C 2017
Homepage: http://i4c.iust.ac.ir

تحلیل حساسیت وزن رئوس برای حفظ ۱- میانه بودن یک رأس از درخت

منا خداقلی [۱،*]، اردشیر دولتی [۲]

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه شاهد تهران

۲- دانشیار گروه علوم کامپیوتر، دانشگاه شاهد تهران

چکیده

میانه یک گراف عبارتست از زیر گراف القایی توسط مجموعه رئوسی که کم‌ترین فاصله را دارند. در این مقاله به بررسی و مطالعه رأس ۱- میانه روی گراف درخت وزن‌دار می‌پردازیم. در واقع رأس ۱- میانه یک درخت، رأس یا رئوسی از گراف است که مجموع همه فاصله‌های وزنی آن‌ها تا سایر رئوس مینیمم باشد. از آن جا که ممکن است در عمل وزن این رئوس دقیق اندازه‌گیری نشوند بنابراین تحلیل حساسیت روی وزن رئوس حائز اهمیت است. در این مقاله با فرض ثابت ماندن سایر پارامترها مانند طول یال‌های درخت، وزن رئوس درخت را جهت حفظ خاصیت ۱- میانه بودن رأس مورد نظر تحلیل حساسیت می‌نماییم.

کلمات کلیدی: گراف،درخت، رأس ۱- میانه، زیردرخت ماکسیمال، تحلیل حساسیت، شرط بهینگی

۱. مقدمه و بیان مسئله

میانه گراف G که با نماد $M(G)$ نمایش داده می‌شود عبارتست از زیرگراف القایی توسط مجموعه رأس‌هایی که کمترین فاصله را دارند. به هر یک از اعضای میانه گراف، رأس ۱ - میانه گفته می‌شود.
مسئله ۱- میانه یکی از معروف‌ترین مسائل مکان‌یابی تسهیلات به شمار می‌رود که مورد توجه بسیاری از دانشمندان و محققین قرار گرفته است. فرانسیس و همکارانش[1]، هندلر و میرچاندانی[2]، مینیکا[3]، میرچاندانی و فرانسیس[4]، کراچ و همکارانش[5] و تانسل و همکارانش [6] مسئله ۱- میانه را مورد بررسی قرار دادند. همچنین برای این مسئله روی درخت، الگوریتمی با زمان اجرای خطی توسط گلدمن [7] ارائه شده است. . هم‌چنین الگوریتم‌های چند جمله‌ای برای معکوس این مسئله روی درخت وجود دارد که به عنوان نمونه می‌توانید به [8] و [9] مراجعه نمایید.
هو و همکاران و یکسال بعد گلدمن نشان دادند که مسئله ۱- میانه روی درخت‌ها دارای این خاصیت است که جواب کاملا از طول‌های یالی مستقل است و فقط به وزن‌های رأسی وابسته است [10,11].
در این مقاله ما رأس ۱- میانه روی درخت وزن‌دار را در نظر می‌گیریم. درخت وزن‌دار $T=(V,E)$ با مجموعه رئوس $V=\{v_1,\dots,v_n\}$ و مجموعه یال‌های $E=\{e_1,\dots,e_{n-1}\}$ را در نظر بگیرید. به هر رأس v_i در V وزن نامنفی w_i و به هر یال e_i در E طول مثبت l_i اختصاص یافته است. $d(v_i,v_j)$ را کوتاه‌ترین مسیر بین هر دو رأس دلخواه v_i و v_j از رئوس درخت نمایش می‌دهیم.

---

* Corresponding author: دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات دانشگاه شاهد تهران
Email: ma_khodagholy@yahoo.com

تابع ۱- میانه در رأس $v_s \in V$ به صورت $\sum_{v_j \in V} w_j \; d(v_s, v_j)$ تعریف می‌شود.

بنابراین :

رأس $v_s \in V$ ، ۱- میانه درخت T است هرگاه :

$$\sum_{v_j \in V} w_j \; d(v_s, v_j) \le \sum_{v_j \in V} w_j \; d(v_i, v_j) \qquad \forall v_i \in V$$

اکنون فرض کنید v_s رأس دلخواه از درخت T ، با درجه k باشد و رئوس $v_1, v_2, \dots, v_k$، همسایه‌های مستقیم (بی واسطه) آن باشند. با حذف رأس v_s، k زیر درخت ماکسیمال در $T - v_s$ خواهیم داشت که با $T_1, \dots, T_k$ نمایش می‌دهیم. هم چنین مجموع وزن رئوس هر زیردرخت ماکسیمال را به صورت $W(T_i) := \sum_{v_j \in V(T_j)} w_j$ و مجموع وزن کل رئوس درخت را به صورت $W(T) := \sum_{i=1}^{n} w_i$ تعریف می‌کنیم.

لم۱.۱ : (**شرط بهینگی[10,11]**) . فرض می‌کنیم $T = (V, E)$ یک درخت وزن‌دار باشد. در این صورت رأس v_s از درجه k، رأس ۱- میانه درخت است اگر و فقط اگر وزن همه زیر درخت‌های ماکسیمال حاصل از $T - v_s$ کوچکتر مساوی نصف مجموع کل وزن درخت باشد ؛ یعنی

$$W(T_i) \le \frac{W(T)}{2} \qquad \forall \;\; i = 1, \dots, k \qquad \equiv \qquad max_{1 \le i \le k} \; W(T_i) \le \frac{W(T)}{2}$$

نتیجه ۱.۲: رأس $v_s \in V$ رأس ۱- میانه درخت T است، اگر و تنها اگر برای $D := Max_{i=1,\dots,k} \left\{ W(T_i) - \frac{W(T)}{2} \right\}$، داشته باشیم: $D \le 0$.

از آن جا که در عمل ممکن است وزن این رئوس به طور دقیق اندازه‌گیری نشده باشند، تحلیل حساسیت روی وزن رئوس حائز اهمیت است بنابراین در بخش بعدی وزن رئوس یک درخت را جهت حفظ خاصیت ۱- میانه بودن رأس مشخصی تحلیل حساسیت می‌نماییم.

۲. تحلیل حساسیت وزن رئوس درخت

فرض کنید v_s یک رأس ۱- میانه از درخت وزن‌دار T باشد. هم‌چنین فرض کنید برای هر رأس دلخواه $v_i \in V$، $\overline{w_i}$ و $\underline{w_i}$ به ترتیب کران‌های بالا و پایین وزن رأس v_i است. در این بخش هدف پیدا کردن حد بالای افزایش و حد بالای کاهش وزن یک رأس دلخواه از درخت است، به طوری که شرط بهینگی برای تمامی زیر درخت‌های ماکسیمال $T - v_s$ نقض نشود و در نتیجه رأس ۱- میانه درخت تغییر نکند. بنابراین سه حالت زیر بسته به موقعیت رأس مورد نظر در گراف، جهت بررسی میزان حداکثر افزایش و حداکثر کاهش وزن یک رأس دلخواه v_i، مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

حالت اول: اگر رأس v_i همان رأس ۱- میانه v_s باشد، در این صورت وزن رأس مورد نظر را می‌توان به هر اندازه‌ای تا بی‌نهایت افزایش داد. چرا که با افزایش وزن این رأس ، وزن کل درخت افزایش می‌یابد و وزن تمامی زیر درخت‌ها ثابت می‌ماند و شرط بهینگی را برای زیر درخت‌ها نقض نمی‌کند.

کاهش وزن این رأس نیز به اندازه‌ای می‌تواند صورت گیرد که شرط بهینگی برای تمامی زیر درخت‌ها نقض نشود. بنابراین جهت کاهش وزن چنین رأسی لم زیر را در نظر بگیرید.

لم۲.۱ : فرض کنید رأس v_i از درخت T، رأس ۱- میانه v_s باشد. اگر وزن این رأس حداکثر به اندازه $\delta := min_{j=1,\dots,k}\left\{2\left(\frac{W(T)}{2} - W(T_j)\right)\right\}$ کاهش یابد شرط بهینگی برای سایر زیر درخت‌ها نقض نمی‌شود.

در این صورت با توجه به لم فوق نتیجه زیر را داریم.

قضیه۲.۲ : فرض کنید $v_i = v_s$، در این صورت چنان چه بازه w_i به صورت زیر در نظر گرفته شود، رأس ۱- میانه تغییر نمی‌کند:

$$w_i = \left[min\{\delta, w_i - \underline{w_i}\}, \overline{w_i} - w_i\right]$$

حالت دوم: اگر رأس v_i در زیر درختی مانند T_r واقع شده باشد که وزن آن زیر درخت دقیقا نصف وزن کل درخت باشد در این صورت هیچ افزایشی نمی‌توان انجام داد. چون میزان افزایش وزن زیر درخت مورد نظر دقیقا دو برابر افزایش وزن کل درخت است بنابراین افزایش وزن چنین رأسی ، شرط بهینگی را نقض می‌کند .

کاهش وزن این رأس نیز به اندازه‌ای می تواند صورت گیرد که شرط بهینگی برای سایر زیر درخت‌ها نقض نشود.

لم۲.۳ : فرض کنید رأس v_i در زیر درختی مانند T_r واقع شده باشد که $W(T_r) = \frac{W(T)}{2}$. اگر وزن این رأس حداکثر به اندازه $\eta := min_{j\neq r}\left\{2\left(\frac{W(T)}{2} - W(T_j)\right)\right\}$ کاهش یابد، شرط بهینگی برای سایر زیر درخت‌ها نقض نمی‌شود.

در این صورت با توجه به لم فوق نتیجه زیر را داریم.

قضیه۲.۴ : فرض کنید $v_i \in T_r$ باشد که $W(T_r) = \frac{W(T)}{2}$، آن گاه با ارائه بازه w_i به صورت زیر ، رأس ۱- میانه تغییر نمی‌کند:

$$w_i = \left[min\{\eta, w_i - \underline{w_i}\}, w_i\right]$$

حالت سوم: فرض کنید رأس v_i در زیر درختی مانند T_q واقع شده باشد که وزن آن زیر درخت اکیدا کوچکتر از نصف وزن کل درخت باشد در این صورت کافی است حد بالای افزایش و حد بالای کاهش وزن رئوس را به گونه‌ای در نظر بگیریم که شرط بهینگی برای زیر درخت‌ها ، حفظ شود.

لم۲.۵ : فرض کنید رأس v_i در زیر درختی مانند T_q واقع شده باشد که $W(T_q) < \frac{W(T)}{2}$، اگر وزن این رأس حداکثر به اندازه $\rho = 2\left(\frac{W(T)}{2} - W(T_q)\right)$ افزایش یابد، شرط بهینگی برای سایر زیر درخت‌ها نقض نمی‌شود.

لم۲.۶ : فرض کنید رأس v_i در زیر درختی مانند T_q واقع شده باشد که $W(T_q) < \frac{W(T)}{2}$، اگر وزن این رأس حداکثر به اندازه $\lambda := min_{j=1,\dots,k}\left\{2\left(\frac{W(T)}{2} - W(T_j)\right)\right\}$ کاهش یابد، شرط بهینگی برای سایر زیر درخت‌ها نقض نمی‌شود.

در این صورت با توجه به دو لم فوق نتیجه زیر را داریم.

قضیه۲.۷ : فرض کنید $v_i \in T_q$ باشد که $W(T_q) < \frac{W(T)}{2}$، آن گاه چنان چه بازه w_i را به صورت زیر تعریف کنیم، رأس ۱- میانه تغییر نمی‌کند :

$$w_i = \left[min\{\lambda, w_i - \underline{w_i}\}, min\{\rho, \overline{w_i} - w_i\}\right]$$

۳. نتیجه گیری

در این مقاله به مطالعه یکی از مسائل مهم و کاربردی نظریه گراف و مکان‌یابی تسهیلات یعنی مسئله ۱- میانه روی درخت وزن‌دار پرداختیم. از آن‌جا که وزن رئوس ممکن است به طور دقیق تعیین نشده باشند، حساسیت مسئله تسبت به این وزن‌ها را مطالعه نمودیم و جهت حفظ شرایط ۱- میانه مشخصی از درخت، وزن رئوس را تحلیل حساسیت کردیم.

۴. مراجع

1. Francis, R. L., McGinnis, L. F., White, J. A. (1992). Facility layout and location: an analytical approach. Pearson College Division.

2. Handler, G. Y. G. Y., Mirchandani, P. B. (1979). Location on networks theory and algorithms (No. 04; T59. 85, H3.).

3. Maynika, E. (1981). Optimization algorithms on networks and graphs. *M. Mir*.

4. Mirchandani, P. B., Francis, R. L. (1990). Discrete location theory.

5. Korach, E., Rotem, D., Santoro, N. (1984). Distributed algorithms for finding centers and medians in networks. ACM Transactions on Programming Languages and Systems (TOPLAS), 6(3), 380-401.

6. Tansel, B. C., Francis, R. L., Lowe, T. J. (1983). State of the art—location on etworks: a survey. Part I: the p-center and p-median problems. Management science, 29(4), 482-497.

7. Goldman, A. J. (1971). Optimal center location in simple networks. Transportation science, 5(2),212-221.

8. Burkard, R. E., Pleschiutschnig, C., & Zhang, J. (2004). Inverse median problems. *Discrete Optimization*, *1*(1), 23-39.

9. Galavii, M. (2010). The inverse 1-median problem on a tree and on a path. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, *36*, 1241-1248.

10. Hua, L. K. (1962). Application of mathematical models to wheat harvesting. *Chinese Mathematics*, *2*, 539-560.

11. Goldman, A. J. (1971). Optimal center location in simple networks. *Transportation science*, *5*(2), 212-221.