مجله علمی- پژوهشی "پدافند الکترونیکی و سایبری"
ویژه‌نامه ترکیبیات، رمزنگاری و محاسبات، ص ۵ -۱

بررسی خواصی از گراف‌های فازی

علیرضا گیلانی*

استادیار واحد تهران جنوب،دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

(دریافت: ۹۷/۰۸/۲۵، پذیرش: ۹۸/۰۷/۰۲)

چکیده

در این مقاله به مطالعه خواصی از گراف‌های فازی پرداخته و یک ساختار جدیدی از گراف فازی را معرفی و سپس نتایج مختلفی را در ارتباط با گراف‌های فازی مطرح و قضایایی را در این ارتباط اثبات می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی:گراف‌های فازی،گراف فازی منظم،گراف فازی کامل

۱- مقدمه

در سال ۱۹۶۵ لطفی زاده [۳] مفهوم مجموعه فازی را معرفی کرده است. سپس روسن فیلد [۱] در سال ۱۹۷۵ گراف‌های فازی را تعریف نموده و نتایج و قضایای مختلفی را در این زمینه مورد بررسی قرار داده است که مبنایی برای بررسی بیشتر سایر محققان در زمینه گراف‌های فازی گردیده است. ناگرگانی [۴-۵]در سال‌های ۲۰۰۳ و ۲۰۰۸ گراف‌های فازی منتظم را معرفی و نتایجی را به‌دست آورده است. در این مقاله ساختار جدیدی از گراف‌های فازی را بیان و به اثبات خواص آن می‌پردازیم.

تعریف ۱-۱:فرض کنید Xیک مجموعه ناتهی باشدنگاشت $\mu: X \to [0,1]$ را زیر مجموعه فازی از مجموعه X نامند.

تعریف ۱-۲:فرض کنید μ , ϑ دو زیر مجموعه فازی از مجموعه X باشند. روابط و اعمال روی X به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$i)$ $\mu \subseteq \vartheta$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر $x \in X$ داشته باشیم: $\mu(x) \le \vartheta(x)$

ii) $\mu = \vartheta$ اگر و فقط اگر به‌ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $\mu(x) = \vartheta(x)$.

iii) به‌ازای هر $x \in X$

$(\mu \cap \vartheta)(x) = \min\{ \mu(x), \ \vartheta(x)\}$

$iv)$ به‌ازای هر $x \in X$

$(\mu \cup \vartheta)(x) = \max\{ \mu(x), \vartheta(x)\}$

$(v$ $\mu^C = 1 - \mu = \{ (x, \mu(x)) : \ x \in X \}$

تعریف ۱-۳:فرض کنید μ یک زیرمجموعه فازی X باشد. رابطه فازی A نسبت به X را یک رابطه فازی قوی گویند هرگاه به‌ازای هر x , yدرX داشته باشیم:

$\vartheta(x, y) = \min\{\mu(x), \vartheta(x)\}$

تعریف۱-۴:فرض کنید A یک مجموعه نا تهی و X یک مجموعه دلخواه و

$f: X \to v \times v$ یک تابع باشد. در این‌صورت A یک زیر مجموعه فازی از VوS یک رابطه فازی روی V نسبت به A وB یک زیر مجموعه فازی از X به‌طوری که:

$B(e) \le_{e \in f^{-1}(x,y)} S(x,y).$

آن‌گاه سه تایی مرتب $F = (A, B, f)$ را یک گراف فازی گویند که هر عضو A را یک نقطه فازی یا راس فازی و هر عضو B را یک یال فازی از گراف F نامند.

اگر $F(e) = (x, y)$ ، آنگاه نقاط فازی $(x, A(x))$و$(y, B(y))$ نقاط مجاور فازی نامند.

دو یال فازی $(e_1, B(e_1))$ و $(e_2, B(e_2))$ را یال مجاور نامند هرگاه در یک راس فازی مشترک باشند.

تعریف۱-۵:یک یال فازی را حلقه نامند هرگاه یک نقطه فازی

*رایانامه نویسنده مسئول: gilanial@yahoo.com

به خودش موجود باشد.

تعریف ۱-۶: فرض کنید $F=(A,B,f)$ یک گراف فازی باشد. گراف فازی F را شبه گراف فازی نامند هرگاه بیش از یکیال فازی دو راس فازی را به یکدیگر متصل کند.

تعریف۱-۷: گراف $F=(A,B,f)$ را گراف فازی ساده گویند هرگاه فاقد حلقه فازی و یال‌های فازی چندگانه باشد.

تعریف۱-۸: گراف فازی $H=(C,D,f)$ را زیر گراف $F=(A,B,f)$ گویند هرگاه داشته باشیم: $D\subseteq B\ ,\ C\subseteq A$.

زیر گراف H را زیر گراف فازی پوشا گویند هرگاه داشته باشیم: $C=A$.

زیر گراف H را زیر گراف فازی القایی F نامند هرگاه H زیر گراف فازی ماکزیمال از F نسبت به مجموعه رئوس فازی C باشد.

تعریف ۱-۹: فرض کنید $\mathrm{F}=(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{f})$ یک گراف فازی نسبت به مجموعه V و E باشد. فرض کنید C یک زیر مجموعه فازی از V ، زیر مجموعه D از E به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D(e)=C(U)\cap C(V)\cap B(e)$$

که در آن، $f(e)=(u,v)$ به‌ازای هر $e\in E$. آن‌گاه $\mathrm{H}=(\mathrm{C},\mathrm{D},\mathrm{f})$ را زیرگراف جزئی F نامند.

۲-نتایج و بحث

تعریف ۲-۱: فرض کنید Aیک زیرمجموعه فازی Xباشد آن‌گاه مجموعه تراز یا α- برش به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{A}_\alpha=\{\mathrm{x}\in\mathrm{X}: A(x)\geq\alpha\},\alpha\in[0,1]$$

تعریف ۲-۲: فرض کنید($F=(A,B,f$ یک گراف فازی نسبت به مجموعه V و E باشد. فرض کنید $\alpha,\beta\in[0,1]$ که $\alpha\leq\beta$ آن‌گاه (A_β,B_β,f) زیرگراف(A_α,B_α,f) است.

اثبات: بدیهی می باشد.

تعریف۲-۳: فرض کنید $H=(C,D,f)$ زیر گراف فازی گراف F=(A,B,f) و $\alpha\in[0,1]$ آن‌گاه $H_\alpha=(C_\alpha,D_\alpha,f)$ زیرگراف فازی $F_\alpha=(A_\alpha,B_\alpha,f)$ است.

اثبات: فرض کنید $H=(C,D,f)$زیرگراف $\mathrm{F}=(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{f})$ و $\alpha\in[0,1]$. فرض کنید$U\in A_\alpha$ داریم:

$$C(u)\geq\alpha\Rightarrow A(u)\geq C(u)\geq\alpha\Rightarrow A(u)\geq\alpha$$

لذا $C_\alpha\leq A_\alpha$.

فرض کنید $e\in D_u$ آنگاه:

$$D(e)\geq\alpha\Rightarrow B(e)\geq D(e)\geq\alpha\Rightarrow B(e)\geq\alpha$$

در نتیجه $D_\alpha\leq B_\alpha$. لذا H_α زیر گراف فازی از F_α است.

تعریف ۲-۴: فرض کنید A زیرمجموعه فازی از X باشد آنگاه زیر مجموعه تراز قوی یا α- برش قوی از A را که با $A_{\alpha+}$ نشان می‌دهندبه‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_{\alpha^+}=\{\,x\in X: A(x)>\alpha\,\},\alpha\in[0,1]$$

تعریف ۲-۵: فرض کنید $\mathrm{H}=(\mathrm{C},\mathrm{D},\mathrm{f})$زیر گراف $\mathrm{F}=(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{f})$ که $\alpha\in[0,1]$آنگاه $H_{\alpha^+}=(C_{\alpha^+},D_{\alpha^+},f)$ زیر گراف فازی گراف $F_{\alpha^+}=(A_{\alpha^+},B_{\alpha^+},f)$ است.

اثبات: فرض کنید $\mathrm{H}=(\mathrm{C},\mathrm{D},\mathrm{f})$ زیر گراف فازی گراف $F=(A,B,f$ که $\alpha\in[0,1]$.

فرض کنید $u\in C_{\alpha^+}$ داریم:

$$C(u)>\alpha\ \Rightarrow A(u)\geq C(u)>\alpha$$
$$\Rightarrow A(u)>\alpha\ \Rightarrow u\in A_{\alpha^+}$$

در نتیجه $C_{\alpha^+}\leq A_{\alpha^+}$

فرض کنید $e\in D_{\alpha^+}$داریم:

$$D(\mathrm{e})>\alpha\ \Rightarrow B(\mathrm{e})\geq \mathrm{D}(\mathrm{e})>\alpha$$
$$\Rightarrow \mathrm{B}(\mathrm{e})>\alpha$$

بنا براین، $D_{\alpha^+}\leq B_{\alpha^+}$. لذا H_{α^+} زیر گراف فازی از F_{α^+} است.

تعریف۲-۶: اگر$\mathrm{F}=(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{f})$ یک گراف فازی باشد. درجه راس فازی را با $d(V)$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(V)=\sum_{e\in f^{-1}(u,v)}B(e)+2\sum_{e\in f^{-1}(v,v)}B(e)$$

کمینه درجه گراف F را با $\delta(F)$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta(F)=\bigwedge\{\,d(v):\ v\in V\}$$

بیشینه درجه F رابا $\Delta(F)$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریفمی‌شود:

$$\Delta(F)=\bigvee\{\,d(v):\ v\in V\,\}$$

مرتبه گراف F رابا O(F) و اندازه گراف F را با S(F) نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$O(F)=\sum_{v\in V}A(V)S(F)=\sum_{e\in f^{-1}(x,y)}B(e)$$

تعریف ۲-۷: برای هر گراف فازی $\mathrm{F}=(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{f})$ همواره داریم:

$$0\leq\delta(F)\leq\Delta(F)$$

تعریف ۲-۸:اگر $F = (A, B, f)$یک گراف فازی باشد آن‌گاه داریم:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2S(F)$$

اثبات: فرض کنید $F = (A, B, f)$یک گراف فازی نسبت به مجموعه V و E باشد. با توجه به این‌که درجه یک راس فازی بیانگر مجموع یال‌های فازی که با راس فوق مرتبط هستند و از طرفی هر یال فازی از گراف F با دو راس فازی مجاورت دارد. لذا مقادیر عضویت هر یال فازی دو مرتبه با محموع درجه رئوس گراف فازی مرتبط می‌باشد. بنابراین، مجموع درجه تمام رئوس فازی در یک گراف برابر است با دو برابر مجموع مقادیر عضویت تمام یال‌های فازی می‌باشد. به بیان دیگر:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2S(F)$$

تعریف ۲-۹: فرض کنید F یک گراف فازی و p تعداد رئوس فازی آن باشد. آنگاه:

$$\delta(F) \leq \frac{2S(F)}{p} \leq \Delta(F)$$

برهان: فرض کنید F گراف فازی با p راس باشد. اگر هر یک ازرئوس فازی از درجهδ باشند، داریم:

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V} \sigma = p\delta$$

از طرفی اگر هر راس فازی از درجه Δ داریم:

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V} \Delta = p\,\Delta$$

داریم:

$$\sum_{v \in V} \sigma \leq \sum_{v \in V} d(v) \leq \sum_{v \in V} \Delta$$
$$\Rightarrow \ p\delta \leq 2S(F) \leq \geq p\Delta$$

بنابراین، داریم:

$$\delta(F) \leq \frac{2S(F)}{p} \leq \Delta(F)$$

تعریف ۲-۱۰:فرض کنیدF یک گراف فازی با تعداد رئوس فازی n باشد که تمامی رئوس فازی از درجه s یا t باشند. اگر F دارای p راس فازی از درجه s و n-pراس از درجه t باشد آن‌گاه داریم:

$$S(F) = \frac{p(s-t) + nt}{2}$$

برهان: فرض کنید V_1 مجموعه تمام رئوس فازی از درجه s و V_2مجموعه تمام رئوس فازی از درجهt باشند.

آن‌گاه داریم:

$$\sum_{v \in V} \mathrm{d(v)} = \sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$2S(F) = ps + (n - p)$$

لذا داریم:

$$S(F) = \frac{p(s-t) + nt}{2}$$

۳- گراف فازی منظم

تعریف ۳-۱:گراف فازی $F = (A, B, f)$ را گراف فازی منظم گویند هرگاه برای هر $v \in V$ داشته باشیم $d(v) = k$

تعریف ۳-۲:گراف F یک گراف فازی منتظم هست اگر و تنها اگر داشته باشیم: $S = \Delta = k$.

تعریف ۳-۳:گراف F را گراف کامل منظم گویند هرگاه هرزوج رئوس فازی متمایزمجاور بودهو بازای هر x و y در V داشته باشیم:

$$B(e) = S(x, y)_{e \in f^{-1}(x,y)}$$

تعریف ۳-۴:گراف Fرا گراف فازی قوی گویند هرگاه داشته باشیم:

$$B(e) = S(x, y)_{e \in f^{-1}(x,y)}$$

بازای هر $e \in E$.

تعریف ۳-۵:اگر F یک گراف k- منتظم با p راس فازی باشد، آن‌گاه داریم:

$$S(F) = \frac{pk}{2}$$

برهان: فرض کنیم F یک گراف فازی k-منظم باشد. داریم $d(v) = k$ برای هر v در V. بنابراین،pراس فازی وجود دارد به‌طوری که داریم:

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V} k = pk \Rightarrow S(F) = \frac{pk}{2}$$

تعریف۳-۶: فرض کنید $F = (A, B, f)$گراف فازی کامل و g تابع ثابت باشد. آنگاه F گراف فازی منتظم است.

برهــان: از این که gتابعی ثابت است لذا بازای هر vدر Vداریم$g(v) = k$. از طرفی چون Fگراف فازی کامل است، در نتیجه بازای هر xو yدر Vکه $x \neq y$ داریم:

$B(e) = S(x,y)_{e\in f^{-1}(x,y)}$.

در نتیجه مقادیر عضویت تمامی رئوس فازی برابر kمی باشد. در نتیجه به‌ازای هر $v \in V$ داریم:

$d(v) = (p-1)k$

لذا Fگراف فازی منتظم است.

تعریف ۳-۷: فرض کنید $F = (A, B, f)$ گراف فازی کامل با pراس فازی و به‌ازای هر vدر Vداشته باشیم g(v)=k. آن‌گاه Fیک گراف فازی (p-1)kمنتظم است.

تعریف ۳-۸:فرض کنید $F = (A,B,f)$ گراف کامل فازی با pراس فازی و gتابع ثابت باشد. آنگاه به‌ازای هر $v \in V$، مجموع عضویت تمامی یال‌های فازی برابر است با: $\frac{P(P-1)}{2}\, g(v)$.

به بیان دیگر $S(F) = pC_2 g(v)$ به‌ازای هر $v \in V$.

برهان: فرض کنید Fگراف فازی کامل و gتابع ثابت باشد. لذا به‌ازای هر vدر Vداریم:

$d(v) = p(p-1), g(v) = k$

انگاه داریم:

$$\sum_{v\in V} d(V) = \sum_{v\in V}(p-1)k \Rightarrow$$

$$2S(F) = p(p-1)k \Rightarrow S(F) = \frac{p(p-1)}{2}k$$

به بیان دیگر: $S(F) = p\, c_2 g(v)$

تعریف ۳-۹:اگر Fگراف فازی باشد. درجه کامل راس فازی vرا با$d_T(v)$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_T(v) = \sum_{e_i\in f^{-1}(u_i,v)} B(e_i) + 2\sum_{e_i\in f^{-1}(v,v)} B(e_i) + g(v)$$

$$2S(F) = p(p-1)k = d(v) + g(v)$$

به ازای هر $v \in V$.

تعریف۳-۱۰:گراف فازی Fرا گراف منظم k-کامل گویند هرگاه هر راس Fدارای درجه کامل k باشد.

تعریف ۳-۱۱:فرض کنید $F = (A,B,f)$ گراف فازی کامل و gتابع ثابت باشد. آنگاه Fگراف منظم کامل است.

برهان: بنا بر قضیه ۳,۶ واضح است که Fگراف فازی منظم است.

به بیان دیگر، به ازای هر vدر V،

$d(v) = (p-1)k$

از طرفی با توجه به این‌که gتابع ثابت است داریم: $g(v) = k$ ،

در نتیجه:

$d_T(v) = d(v) + g(v) = p(p-1)k + k = pk$

به‌ازای هر vدر V. در نتیجه Fگراف کامل منظم است.

تعریف۳-۱۲:فرض کنید Fگراف فازی منظم کامل با pراس فازی و $A(v) = k$

به‌ازای هر vدر V، Fگراف فازی منظم k-کامل است.

تعریف ۳-۱۳:فرض کنید $F = (A,B,f)$ یک گراف منظم فازی باشد. در این‌صورت $H = (C,B,f)$ گراف فازی منظم کامل است اگر به‌ازای هر $v_i \in V$ داریم:

$$C(v_i) = \bigvee_{i=1}^{n} g(v_i)$$

برهان:فرض کنید $F = (A, B, f)$ گراف فازی k-منظم باشد. لذا به‌ازای هر $v_i \in V$ داریم $d(v_i) = k$. برای هر $v_i \in V$ داده شده داریم:

$$C(v_i) = \bigvee_{i=1}^{n} g(v_i)$$

لذا داریم:

$d_{T(H)}(v_i) = d(v_i) + c(v_i) = k + k_1$ و $C(v_i) = k_1$

لذا Hگراف منظم فازی کامل است.

تعریف ۳-۱۴:فرض کنید $F = (A,B,f)$ گراف فازی و gتابع ثابت باشد. آنگاه Fگراف فازی k-منظم است اگر و تنها اگر Fگراف منظم (k+c)–منظم کامل باشد.

برهان: فرض کنید Fگراف k-منظم فازی بوده و داریم $g(v) = c$ به‌ازای هر vدر V، لذا $d(v) = k$. در نتیجه به‌ازای هر vدر Vداریم:

$d_T(v) = d(v) + g(v) = k + c$

در نتیجه Fگراف فازی (k+c)- منظم است.

بالعکس، فرض کنید Fیک گراف (k+c)- منظم باشد. به بیان دیگر به‌ازای هر $v \in V$ داریم $d_T(v) = k + c$. در نتیجه داریم:

$d(v) + g(v) = k + c$

$\Rightarrow d(v) + c = k + c \Rightarrow d(v) = k$

لذا F گراف فازی منظم k-کامل است.

تعریف ۳-۱۵:اگر $F = (A, B, f)$ گراف فازی منظم و گراف فازی منظم کامل باشد در این‌صورت gتابعی ثابت است.

برهان: فرض کنید Fگراف فازی فازی منظم و گراف فازی منظم کامل باشد. فرض کنید gثابت نباشد(فرض خلف) . لذا به‌ازای هـر uو vداریم $g(u) \neq g(v)$. از طرفی چون Fگرافk- مـنظم فـازی است داریم

$d(u) = d(v) = k$ در نتیجـه $d_T(u) \neq d_T(v)$ کـه ایـن یـک تناقض است با فرض قضیه. لذا فـرض خلـف باطـل اسـت. یعنـی gتابعی ثابت است.

تعریف۳-۱۶:اگر $F = (A, B, f)$ گراف منظم c- کامل فـازی بـا pراس فازی باشد، آنگاه داریم:

$$S(F) = \frac{pc - O(F)}{2}$$

برهان: فرض کنید Fگراف منظم c- کامل با pراس فـازی باشـد. در نتیجه به‌ازای هر vدر Vداریم $d_T(v) = c$:

لذا:

$$\sum d(v) + \sum g(v) = \sum c$$

در نتیجه $2S(F) + O(F) = pc$ لذا داریم:

$$S(F) = \frac{pc - O(F)}{2}$$

تعریف ۳-۱۷:اگر $F = (A, B, f)$گراف فازی k- مـنظم و گـراف منظم c- کامل با pراس فازی باشد آنگاه:

$$O(F) = p(c - k)$$

برهان: فرض کنیدFگراف فازی k-منظم با pراس فـازی، آن‌گـاه داریم: $2S(F) = pk$

در نتیجه:

$$2S(F) + O(F) = pc \implies O(F) = p(c - k)$$

۴-نتیجه‌گیری

در این مقاله به مطالعه خواصی از گراف‌هـای فـازی پرداختـه‌ایـم ویک ساختار جدیـدی از گـراف فـازی را ارائـه نمـوده و نتـایجی درارتباط با گراف‌های فازیبه‌دست آورده‌ایـم. مفـاهیم مختلفـی از گراف‌ها را می‌توان در ساختار گراف‌هـای فـازی بیـان و اسـتفاده کرد.

۵- مراجع

[1] N. Mardeson and C. S. Peg, "Operation on Fuzzy Graph," Information Science, pp. 159-170, vol. 19, 1994.

[2] A. Zadeh, "Fuzzy Set," Information and Control, pp. 338-353, vol. 8, 1965.

[3] N. Gani and B. Ahamed, "Order and size in Fuzzy graph," Bulletin of pure and Applied Science, vol. One, pp. 145-148, 2003.

[4] N. Gani and K. Radha, "Fuzzy Graphs," Journal of Physicsl Science," vol. 12, pp. 33-40, 2008.

[5] T. Yeh and S. Y. Bang, " Fuzzy relations fuzzy grapha and their applications to clustering analysis," pp. 125-149, 1975.