مجله علمی- پژوهشی "پدافند الکترونیکی و سایبری"
ویژه‌نامه ترکیبیات، رمزنگاری و محاسبات، ص ۸۶ -۷۵

مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر: فرمول‌بندی و الگوریتم

جواد طیبی[۱*]، ابومسلم محمدی[۲]
۱- استادیار دانشگاه صنعتی بیرجند، گروه مهندسی صنایع ۲- هیأت علمی دانشگاه افسری امام علی (ع)، گروه ریاضی
(دریافت: ۱۳۹۷/۰۸/۲۵ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۷/۰۲)

چکیده

در عصر نوین، یکی از مهم‌ترین ارکان تصمیم‌گیری فرماندهان جنگی استفاده از مدل‌سازی و مفاهیم ریاضی است. در این مقاله مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این مسأله یک بازی استکلبرگ است که شامل دو بازیکن مهاجم و مدافع می‌باشد. مهاجم برای نفوذ به یک نقطه می‌خواهد ایمن‌ترین مسیر ممکن را اختیار کند در حالی که هدف مدافع کم کردن ایمنی مسیرهاست به‌گونه‌ای که تا حد امکان جلوی نفوذ مهاجم را بگیرد. در این مقاله این مسأله فرمول‌بندی‌شده و الگوریتمی کارا برای حل آن ارایه می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: مسایل ممانعت، جستجوی دودویی، کمترین برش، امن‌ترین مسیر

۱- مقدمه

این مقاله به مطالعه مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر می‌پردازد که یکی از مسایل کاربردی در حوزه نظامی است. علی‌رغم این‌که گونه‌های مختلفی از مسایل ممانعت توسط پژوهشگران بررسی شده است، این مسأله برای اولین بار توسط نویسندگان مطرح شده است [۱]. اجازه دهید که ابتدا مسأله از دیدگاه نظامی تشریح گردد.

فرض کنید یک گردان از دشمن که اکنون در مکان مشخصی که نقطه شروع نامیده می‌شود، مستقر است. دشمن می‌خواهد به یک نقطه هدف (مانند یک شهر، یک پایگاه نظامی و ...) حمله کند. برای شناسایی نقطه هدف، یک گروه جاسوسی از افراد دشمن ملزم به نفوذ در این منطقه هستند. بین نقطه شروع و نقطه هدف مسیرهای متعددی قرار دارند که گروه جاسوسی با انتخاب هر یک از آن‌ها می‌تواند به نقطه هدف دست یابد. دشمن می‌خواهد از بین این مسیرها ایمن‌ترین مسیر ممکن را انتخاب کند تا از آن طریق به نقطه هدف رسیده و احتمال شناسایی نیروهای وی کاهش یابند. از طرفی نیروهای خودی می‌خواهند تا حد ممکن با استقرار نیروها در مسیرها جلوی نفوذ دشمن را به نقطه هدف بگیرند. به دلیل محدودیت تعداد نیروی انسانی (و همچنین مهمات)، نیروهای خودی باید تصمیم بگیرند که در کدام مسیرها و با چه تعداد مستقر شوند که بتوانند تا حد ممکن نیروهای دشمن را شناسایی و سرکوب کنند. پس به‌طور خلاصه، در این مسأله هدف دشمن یافتن ایمن‌ترین مسیر برای دست‌یابی به نقطه هدف است در حالی‌که هدف نیروهای خودی تا حد امکان کاهش دادن ایمنی مسیرهاست تا بدین وسیله از ورود دشمن به نقطه هدف جلوگیری شود. از این پس این مسأله به عنوان مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر نامیده می‌شود.

در بخش دوم ادبیات مربوط به مسایل ممانعت مرور می‌شود. در بخش سوم مسأله ایمن‌ترین مسیر معرفی شده و در مورد روش‌های حل آن بحث می‌شود. این مسأله یک مقدمه برای وارد شدن به بحث اصلی است. در بخش چهارم مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر مورد توجه قرار گرفته و به‌طور کامل تشریح می‌گردد. هر دو مسأله مورد بحث در بخش‌های سوم و چهارم از مسایل بهینه‌سازی شبکه هستند. در مسأله ایمن‌ترین مسیر شبکه زمینه ثابت بوده و به دنبال جواب بهینه (ایمن‌ترین مسیر) هستیم. در حالی‌که در مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر شبکه زمینه متغیر است. بدان معنا که ایمنی هر مسیر را می‌توان در صورت نیاز کاهش داد تا جلوی مطلوبیت جواب بهینه را گرفت. به بیان روشن‌تر، مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر یک بازی دو نفره استکلبرگ محسوب می‌شود که در آن یک بازیکن (نیروی دشمن) به دنبال یافتن ایمن‌ترین مسیر بوده و بازیکن دیگر (نیروی خودی) ایمنی مسیرها را تغییر می‌دهد تا بازیکن اول به جواب بهینه مطلوب دست پیدا نکند[۱]. در بخش پنجم نتایج اولیه‌ای را در مورد مسایل مطرح کرده و در بخش ششم به الگوریتم مورد نظر بیان می‌گردد. در نهایت در بخش هفتم نتیجه‌گیری کرده و در مورد کارهای پژوهشی آتی در این زمینه بحث می‌شود.

* رایانامه نویسنده مسئول Javadtayyebi@birjandut.ac.ir

۲- مرور ادبیات

برای هر مسأله بهینه‌سازی شبکه یک مسأله ممانعت شبکه قابل تعریف است. فرض کنید یک مسأله بهینه‌سازی شبکه (مثلا مسأله کوتاهترین مسیر، مسأله تخصیص یا مسأله بیشترین جریان) داده شده است. در مسأله ممانعت متناظر با این مسأله، دو گروه از بازیکن‌ها موجودند که هدف گروه اول (مهاجم) بهینه‌سازی مسأله تعریف شده بر شبکه بوده در حالی که گروه دوم (مدافع) می‌خواهد با اعمال تغییراتی بر شبکه تا حد ممکن مانع از دست‌یابی گروه اول به هدفش شود. بنابراین، می‌توان مسایل ممانعت شبکه را به عنوان بازی‌های استکلبرگ نیز در نظر گرفت [۲]. این گونه بازی‌ها شامل دو سطح می‌باشند که مدافع در سطح اول و مهاجم در سطح دوم قرار دارد. تا زمانی که مدافع تصمیم‌گیری خود را انجام ندهد، مهاجم تصمیم‌گیری نخواهد کرد. مدافع با آگاهی نسبت به این حقیقت که مهاجم همواره بهترین تصمیم را می‌گیرد، تصمیم‌گیری خواهد کرد. با ادبیات مورد استفاده در بازی‌های استکلبرگ، به مدافع رهبر و به مهاجم پیرو گویند. محققان طی سال‌های اخیر به مطالعه انواع مسایل ممانعت شبکه پرداخته‌اند که جدول (۱) نشان‌دهنده برخی از این مسایل می‌باشد. برای مرور بیشتر کارهای انجام‌شده در این زمینه خواننده می‌تواند به مقاله مروری [۳] رجوع کند.

جدول (۱): مرور ادبیات مسایل ممانعت

مسأله	مراجع
مسأله ممانعت کوتاهترین مسیر	[۴]، [۵]، [۶]، [۷]، [۸]، [۹]، [۱۰]
مسأله ممانعت بیشترین جریان	[۱۱]، [۱۲]، [۱۳]، [۱۴]، [۱۵]، [۱۶]
مسأله ممانعت تخصیص و جورسازی	[۱۷]، [۱۸]

علی‌رغم کارهای زیادی که در این زمینه مطرح و انجام شده است. اما بسته به دانش نویسندگان، تاکنون هیچ مقاله‌ای به جز [۱] در زمینه ممانعت ایمن‌ترین مسیر نوشته نشده است.

۳- مسأله ایمن‌ترین مسیر

فرض کنید یک گراف جهت‌دار $G(V,A)$ داده شده است که در آن $V=\{1,2,\dots,n\}$ مجموعه رئوس گراف بوده و A مجموعه‌ای شامل یال‌های گراف است. مجموعه‌ی V شامل دو رأس به خصوص 1 و n است که راس 1 همان مکان استقرار دشمن را نشان داده و راس n نشانگر منطقه حساس خودی است. منظور از یال‌های گراف مسیرهایی است که در امتداد این دو نقطه واقعند و دیگر رئوس گراف نشان دهنده تقاطع جاده‌ها می‌باشند. به هر یال $(i,j)\in A$ از گراف یک عدد نامنفی c_{ij} نسبت داده می‌شود. c_{ij} نشان‌دهنده ایمنی فعلی (i,j) است. منظور از یک مسیر p از رأس 1 به رأس n دنباله‌ای از یال‌ها مانند $(1,i_1)-(i_1,i_2)-\dots-(i_k,n)$ است. توجه کنید که در این دنباله یال اول از رأس 1 آغاز شده و یال انتهایی به رأس n ختم می‌گردد و همچنین هر دو یال متوالی در دنباله دارای رأس مشترک هستند. منظور از ایمنی هر مسیر p حداقل مقدار ایمنی یال‌های آن است. به بیان دیگر اگر با c_p ایمنی مسیر p نشان داده شود، آن‌گاه $c_p=\min_{(i,j)\in p} c_{ij}$. در مسأله ایمن‌ترین مسیر هدف یافتن مسیری با بیشترین ایمنی ممکن است. با توضیحات فوق می‌توان مسأله را به شکل زیر فرمول‌بندی کرد:

$$\max_{p\in P} \min_{(i,j)\in P} c_{ij},$$

.

که در این جا، P مجموعه همه مسیرهایی در گراف G از راس 1 به راس n است. برای ارایه یک فرمول‌بندی دیگر از مسأله، نیاز به این فرض است که همه مقادیر ایمنی مثبت هستند یعنی، به‌ازای هر $(i,j)\in A$، $c_{ij}>0$. این فرض یک فرض محدودکننده نیست زیرا عملا مسیرهایی با ایمنی صفر هرگز انتخاب نخواهند شد، پس می‌توان یال‌هایی که ایمنی صفر دارند را از شبکه حذف کرد تا فرض فوق برقرار شود.

فرض کنید p یک مسیر دلخواه از 1 به n است. به‌ازای هر یال $(i,j)\in A$، متغیر صفر و یک x_{ij} به‌صورت زیر تعریف شود:

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & (i,j)\in p,\\ 0 & (i,j)\notin p.\end{cases}$$

با این تعریف، می‌توان مسأله ایمن‌ترین مسیر را به‌صورت زیر فرمول‌بندی کرد:

$$\max \min\{c_{ij}+M(1-x_{ij})\}$$
$$\sum_{(i,j)\in A} x_{ij}-\sum_{(j,i)\in A} x_{ji}=\begin{cases}1 & i=1\\ 0 & i\neq 1,n\\ -1 & i=n\end{cases}$$
$$x_{ij}\in\{0,1\} \qquad \forall (i,j)\in A.$$

در این فرمول‌بندی M بیانگر یک عدد ثابت بسیار بزرگ است. توجه کنید که به‌ازای هر مسیر p، اگر $(i,j)\in p$ آن‌گاه $c_{ij}+M(1-x_{ij})=c_{ij}$ و در غیر این‌صورت حاصل این مقدار عدد بسیار بزرگ است. بنابراین، $\min c_{ij}+M(1-x_{ij})$ همان مقدار ایمنی مسیر p خواهد بود. محدودیت‌های مسأله همان

محدودیت‌های مسأله کوتاهترین مسیر هستند که به محدودیت‌های بقای جرم نیز شهرت دارند [۱۹] . این محدودیت‌ها بیان می‌کنند که یک واحد جریان بایستی از راس 1 آغاز شده و به راس n برسد. بقیه رئوس نقش رئوس واسطه را دارند یعنی تفاضل جریان ورودی از خروجی آن‌ها برابر صفر است.

با تعریف متغیر $c_p = \min c_{ij} + M(1 - x_{ij})$ این مسأله قابل تبدیل به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}
&\max c_p \\
&\text{s.t. } c_{ij} + M(1 - x_{ij}) \geq c_p \quad \forall (i,j) \in A, \\
&\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in A} x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ 0 & i \neq 1, n \\ -1 & i = n \end{cases} \\
&x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A.
\end{aligned} \tag{۲}$$

بنابراین، می‌توان مسأله را با استفاده از روش‌های حل مسایل برنامه‌ریزی خطی صفر و یک مانند روش جمعی بالاس حل کرد. اما از آن‌جا که پیچیدگی زمانی این‌گونه تکنیک‌ها نمایی است، در ادامه به تشریح یک الگوریتم کارا برای حل مسأله پرداخته خواهد شد که بتوان با استفاده از آن مسأله را در زمان چندجمله‌ای حل کرد.

یکی از مشهورترین الگوریتم‌هایی که برای حل مسأله کوتاهترین مسیر به‌کار می‌رود، الگوریتمی منسوب به دیکسترا است[۲۰]. این الگوریتم را می‌توان برای یافتن کوتاهترین مسیر از یک راس مبدا s به سایر رئوس به کار برد. البته شایان ذکر است که تنها در صورتی الگوریتم قابل استفاده است که طول‌های یالی نامنفی باشند. در این بخش، یک نسخه تغییر یافته از الگوریتم دیکسترا پیشنهاد می‌شود که بتواند مسأله (۲) را حل کند. در این الگوریتم هر راس i دارای یک برچسب (d_i, p_i) است که اولین مولفه این زوج مرتب نشان دهنده این است که تاکنون الگوریتم مسیری از راس 1 به راس i با ایمنی برابر d_i را پیدا کرده است. p_i نشان دهنده‌ی آخرین راس قبل از i بر این مسیر است که می‌توان از آن پس از خاتمه الگوریتم برای یافتن مسیر بهینه استفاده کرد. در ابتدا برچسب راس 1 را برابر $(d_1, p_1) = (+\infty, 0)$ در نظر گرفته و برچسب رئوس دیگر برابر $(-\infty, \#)$ قرار داده می‌شود. برچسب‌ها به دو دسته دایم و موقت تفکیک می‌شوند. در هر تکرار از الگوریتم یکی از برچسب‌های موقت دایم خواهد شد و الگوریتم تا زمانی ادامه می‌یابد که بر چسب راس n دایم شود. از بین همه رئوس برچسب راسی دایم می‌شود که بیشترین مقدار $d(i)$ را در بین رئوس با برچسب موقت داشته باشد. پس در اولین تکرار برچسب راس 1 دایم می‌شود. پس از دایم شدن برچسب راس i، برچسب سایر رئوس مجاور با این راس مانند j به‌روز می‌شود. بدین صورت که اگر $d_j < \min\{d_i, c_{ij}\}$ آن‌گاه مقدار d_j به مقدار $(d_j, p_j) = (\min\{d_i, c_{ij}\}, i)$ تغییر می‌کند. در غیر این‌صورت برچسب راس j تغییری نخواهد کرد. پس از به‌روزرسانی برچسب‌ها روند فوق ادامه می‌یابد تا زمانی‌که بر چسب راس n دایم شود. پس از خاتمه الگوریتم مقدار تابع هدف مسأله (۲) برابر d_t است که می‌توان با استفاده از مولفه‌های دوم برچسب‌ها و پیمایش به عقب ایمن‌ترین مسیر را یافت. در زیر الگوریتم دیکسترای تغییر یافته آورده شده است.

الگوریتم (۱): الگوریتم دیکسترای تغییر یافته برای حل مسأله (۲)

گام ۱. قرار دهید $(d_1, p_1) = (+\infty, 0)$ برای هر راس $i \in V\backslash\{1\}$ قرار دهید $(d_i, p_i) = (-\infty, \#)$.

گام ۲. از بین همه رئوس با برچسب موقت، راسی را با بیشترین مقدار d_i دایم کنید. فرض کنید که راس i دایم شده است.

گام ۳. اگر راس n دایم شده است متوقف شوید، در غیر این‌صورت به گام بعدی بروید.

گام ۴. همه یال‌های (i, j) خروجی از راس i را بررسی کنید. اگر $d_j < \min\{d_i, c_{ij}\}$ قرار دهید $(d_j, p_j) = (\min\{d_i, c_{ij}\}, i)$. به گام ۲ بازگردید.

۴-مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر

مسایل نظامی را معمولا می‌توان در رده به خصوصی از مسایل بهینه‌سازی به نام تئوری بازی‌ها جای داد. مسایل بازی‌ها دارای دیدگاه‌های دو طرفه هستند: دیدگاه بازیکن اول (نیروهای خودی) و دیدگاه بازیکن دوم (نیروهای دشمن). در این بخش به معرفی مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر پرداخته شده که یک بازی دو نفره شامل نیروهای خودی و دشمن است. در ابتدا مسأله به طور دقیق تعریف شده و سپس فرمول‌بندی می‌گردد. فرمول‌بندی ارایه‌شده، یک مسأله بهینه‌سازی دو سطحی است.

فرض کنید یک گراف جهت‌دار $G(V, A)$ داده شده است که در آن $V = \{1,2,\dots,n\}$ مجموعه رئوس گراف بوده و A مجموعه‌ای شامل یال‌های گراف است. مجموعه V شامل دو رأس به خصوص 1 و n است که راس 1 همان مکان استقرار دشمن (نقطه شروع یا مبدا) را نشان داده و راس n نشانگر منطقه حساس خودی (نقطه هدف یا مقصد) است. هر یال $(i, j) \in A$ نشان‌دهنده مسیری است که نقطه i را به نقطه j متصل می‌کند. به هر یال (i, j) یک عدد نامنفی c_{ij} نسبت داده می‌شود که همان مقدار کمی ایمنی مسیر است.

فرض کنید d_{ij} نشان‌دهنده متغیری نامنفی است که در صورت استقرار نیروهای خودی از ایمنی یال (i, j) کم می‌شود. پس اگر نیروهای خودی بر این یال مستقر شوند ایمنی یال از مقدار c_{ij} به

مقدار $c_{ij}-d_{ij}$ تغییر خواهد کرد. از این رو به ازای هر یال $(i,j)\in A$ بایستی نامساوی $d_{ij}\le c_{ij}$ برقرار باشد. این نامساوی بدان معناست که حداکثر میزان کاسته شدن ایمنی برابر مقدار ایمنی آن مسیر است. عدد w_{ij} مقدار هزینه واحدی است که باید در صورت استقرار یک واحد نیروهای خودی ($d_{ij}=1$) بر یال (i,j) صرف گردد. این هزینه می‌تواند تابعی بر حسب تعداد نیروی انسانی اعزام شده و همچنین مقدار تجهیزات مورد نیاز باشد. توجه کنید که به وضوح هر چه نیروهای خودی بخواهند مقدار ایمنی یک مسیر را بیشتر کاهش دهند (یعنی d_{ij} را بزرگتر کنند) نیاز است که هزینه بیشتری معادل $w_{ij}c_{ij}$ را برای یال (i,j) بپردازند. در این مسأله فرض شده است که $W\ge 0$ حداکثر میزان بودجه‌ای است که نیروهای خودی می‌خواهند برای ممانعت پیشروی دشمن بر یال‌ها هزینه کنند. پس بایستی مجموع هزینه‌های صرف شده برای ممانعت، بیشتر از مقدار کل بودجه W نشود.

مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر را می‌توان به صورت یک مسأله برنامه‌ریزی دو سطحی فرمول‌بندی کرد که در سطح پایین نیروهای دشمن ایمن‌ترین مسیر را انتخاب کرده و در سطح بالا نیروهای خودی با تخریب ایمنی، مانع از انتخاب ایمن‌ترین مسیرها می‌شوند. با این توضیحات و با استفاده از فرمول‌بندی (۲۰)، می‌توان سطح پایین مسأله را به شکل زیر فرمول‌بندی کرد:

$$\begin{aligned} & z=\max c_p\\ & c_{ij}-d_{ij}+M(1-x_{ij})\ge c_p \quad \forall(i,j)\in A,\\ & \sum_{(i,j)\in A} x_{ij}-\sum_{(j,i)\in A} x_{ji}=\begin{cases}1 & i=1\\ 0 & i\ne 1,n\\ -1 & i=n\end{cases}\\ & x_{ij}\in\{0,1\} \quad \forall(i,j)\in A. \end{aligned} \quad (۱)$$

این همان مسأله ایمن‌ترین مسیر (۲۰) است که در آن ایمنی هر یال از c_{ij} به $c_{ij}-d_{ij}$ تغییر کرده است. جواب بهینه این مسأله در z ذخیره شده است تا بتوان در مسأله سطح بالا از آن استفاده کرد. در مسأله سطح بالا هدف مینیمم‌سازی مقدار تابع هدف مسأله

(۱) یعنی همان c_p است. این سطح شامل محدودیت‌های بودجه $\sum_{(i,j)\in A} w_{ij}d_{ij}\le W$ و محدودیت‌های کران $0\le d_{ij}\le c_{ij}$ به‌ازای هر یال $(i,j)\in A$ می‌باشد. بنابراین، مسأله ممانعت از ایمن‌ترین مسیر به‌صورت یک مسأله برنامه‌ریزی دو سطحی به شکل زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \min z\\ & 0\le d_{ij}\le c_{ij} \quad \forall(i,j)\in A\\ & \sum_{(i,j)\in A} w_{ij}d_{ij}\le W,\\ & z=\max\{ c_p :\\ & c_{ij}-d_{ij}+M(1-x_{ij})\ge c_p \quad \forall(i,j)\in A,\\ & \sum_{(i,j)\in A} x_{ij}-\sum_{(j,i)\in A} x_{ji}=\begin{cases}1 & i=1\\ 0 & i\ne 1,n\\ -1 & i=n\end{cases}\\ & x_{ij}\in\{0,1\} \quad \forall(i,j)\in A\}. \end{aligned} \quad (۲۰)$$

این مسأله یک مسأله بهینه‌سازی خطی دو سطحی صفر و یک مختلط است که می‌توان آن را با نرم‌افزارهای بهینه‌سازی از جمله گمپس حل کرده و جواب بهینه را یافت. با این وجود، معمولا حل مسایل بهینه‌سازی خطی صفر و یک در ابعاد بزرگ حتی به وسیله ابرکامپیوترها ممکن است بسیار زمان‌بر باشد. از طرف دیگر، این مسأله یک مسأله تصمیم‌گیری راهبردی است که زمان نقشی حیاتی را در آن ایفا می‌کند. از این رو بهتر است روش‌هایی برای حل این مسأله ارایه داد که زمان کمتری را صرف کنند. هدف از بیان بخش‌های آتی، رسیدن به این مقصود است.

۵- نتایج اولیه

در این بخش برخی نتایج اولیه در رابطه با مسأله (۴) ارایه خواهد شد. با استفاده از این نتایج می‌توان الگوریتم‌هایی را برای حل این مسأله پیشنهاد کرد. در ابتدا به بیان فرض مثبت بودن داده‌ها می‌پردازیم:

فرض: مقادیر ایمنی c_{ij} و هزینه w_{ij} برای هر یال $(i,j)\in A$ مثبت‌اند.

این فرض مسأله را محدود نمی‌کند زیرا اگر c_{ij} برابر صفر باشد، هیچ‌گاه دشمن مسیرهایی که از این یال می‌گذرند را انتخاب نخواهد کرد و بنابراین، می‌توان یال‌هایی با ایمنی صفر را از شبکه حذف کرد. در حالتی که $w_{ij}=0$ باشد، می‌توان در ابتدا ایمنی این گونه یال‌ها را (بدون هیچ هزینه‌ای) به مقدار صفر تغییر داده و آن‌ها را از شبکه حذف کرد.

قضیه ۱- اگر مقدار بهینه مسأله ایمن‌ترین مسیر مخالف صفر باشد، آن‌گاه در جواب بهینه همواره محدودیت بودجه به شکل تساوی برقرار است.

اثبات: به برهان خلف فرض کنید که d^* جواب بهینه مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر باشد اما $\sum_{(i,j)\in A} w_{ij}d^*_{ij}<W$. یک جواب d' را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$d'_{ij}=\begin{cases} d^*_{ij}+\epsilon & d^*_{ij}<c_{ij},\\ d^*_{ij} & d^*_{ij}=c_{ij},\end{cases} \quad \forall(i,j)\in A.$$

که در این جواب، $\epsilon>0$ عددی بسیار کوچک انتخاب شده است به‌طوری که اولا $\sum_{(i,j)\in A} w_{ij}d'_{ij}<W$ و ثانیا اگر $d^*_{ij}<c_{ij}$، آن‌گاه $d'_{ij}<c_{ij}$. به راحتی می‌توان نشان داد که مقدار بهینه جواب d'

حداقل به اندازه ϵ کمتر از جواب بهینه d^* است. پس d^* نمی‌تواند جواب بهینه مسأله باشد که به تناقض می‌رسیم.

از این پس فرض می‌شود که مقدار بهینه مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر (۴) برابر z^* است. یعنی نیروهای خودی مطمئن هستند که نیروهای دشمن هر مسیری را انتخاب کنند، مقدار ایمنی مسیر بیشتر از z^* نخواهد بود. در مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر نیروهای خودی می‌خواهند ایمنی هر مسیری از نقطه شروع به نقطه هدف را با کمترین بودجه کاهش دهند. برای این کار، کافی است فقط برای یک یال از هر مسیر این کار را انجام دهند. مجموعه این یال‌ها منجر به یک برش می‌شوند. این برش شبکه را به دو مولفه همبندی تقسیم می‌کند که نقطه شروع در یک مولفه و نقطه هدف در مولفه‌ای دیگر قرار دارند. در یک برش بهینه یال‌هایی که ایمنی آن‌ها کمتر یا مساوی z^* است نیاز به تغییر ندارند. تنها کافی است ایمنی یال‌هایی از برش را که مقدار ایمنی کنونی آن‌ها بیشتر از z^* است، کاهش یابند. توجه کنید که نیروهای خودی ملزم هستند که مقدار ایمنی هر این گونه یالی را به مقدار z^* کاهش دهند تا مطمئن شوند مسیرهای گذرنده از این یال‌ها دارای ایمنی بیشتر از z^* نیستند. نتایج حاصل در یک قضیه به‌طور رسمی بیان شده است.

قضیه ۲. فرض کنید مقدار بهینه مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر برابر z^* باشد. همواره یک جواب بهینه d^* از مسأله موجود است به‌طوری که

$$d^*_{ij} = \begin{cases} 0 & (i,j)\notin C, \\ 0 & (i,j)\in C \wedge c_{ij}\le z^*, \\ c_{ij}-z^* & (i,j)\in C\wedge c_{ij}>z^*, \end{cases} \qquad \forall (i,j)\in A,$$

که در آن، C نشان‌دهنده مجموعه یال‌های پیشروی یک برش است که نقاط شروع و هدف را از هم جدا می‌کند.

مثال ۱: مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر ارایه‌شده در شکل (۱) را در نظر بگیرید. مقدار بهینه این مسأله برابر $z^* = 2.5$ است. یعنی هر مسیر از 1 به 4 نمی‌تواند ایمنی بیشتر از 2.5 داشته باشد. در این مسأله برش $C = (S,\bar{S})$ با $S = \{1,2\}$ و $\bar{S} = \{3,4\}$ متناظر با جواب بهینه معرفی شده است. توجه کنید که ایمنی مسیر (1,4) کمتر از 2.5 بوده و تغییر نکرده است اما ایمنی دو یال دیگر از مقدار 3 به مقدار $z^* = 2.5$ کاهش یافته‌اند. آخرین نکته‌ای که در این مثال باید ذکر شود این است که ایمنی یال (3,2) نیز تغییر نکرده است زیرا علی‌رغم این که این یال در برش مورد نظر قرار دارد، اما یک یال پسرو است.

نتیجه حاصل از قضیه ۲ بسیار حائز اهمیت است. زیرا بیان می‌کند که می‌توان جواب بهینه را تنها در جواب‌های خاصی از مسأله که متناظر با یک برش هستند یافت. اما نقطه ضعف این قضیه در این است که برای ساخت جواب بهینه از روی برش نیاز است که ابتدا مقدار بهینه را بدانیم. در ادامه، برای این که این نقطه ضعف بر طرف شود برای هر برش یک جواب منحصر به فرد ارایه می‌گردد.

برش دلخواه $[S,\bar{S}]$ را در نظر بگیرید. با توجه به قضیه ۲. فرض کنید مقدار بهینه مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر برابر z^* باشد. همواره یک جواب بهینه d^* از مسأله موجود است به‌طوری که۲ تنها ایمنی یال‌های پیشرو برش تغییر خواهند کرد که مجموعه آن‌ها با $C = (S,\bar{S})$ نشان داده شده است. فرض کنید ایمنی یال‌های متعلق به C به‌طور غیر نزولی مرتب شده است و $c_0(=0) \le c_1 \le c_2 \le \cdots \le c_s$ نشان‌دهنده‌ی این لیست مرتب شده باشد. به‌ازای اندیس ثابت $l \in \{1,2,\ldots,s\}$ بردار $d^l \in R^{|A|}$ را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$d^l_{ij} = \begin{cases} 0 & (i,j)\notin C, \\ 0 & (i,j)\in C \wedge c_{ij}\le c_l, \\ c_{ij}-z & (i,j)\in C\wedge c_{ij}>c_l, \end{cases} \qquad \forall (i,j)\in A, \tag{۵}$$

که در آن، z مقداری است که به‌ازای آن محدودیت بودجه به شکل تساوی برقرار باشد؛ یعنی:

$$\sum_{(i,j)\in A} w_{ij} d^l_{ij} = W \implies \sum_{(i,j)\in C:\, c_{ij}>c_l} w_{ij}(c_{ij}-z) = W \implies$$

$$z = \frac{\sum_{(i,j)\in A:c_{ij}>c_l} c_{ij}w_{ij} - W}{\sum_{(i,j)\in A:c_{ij}>c_l} w_{ij}}. \tag{۶}$$

آخرین رابطه، مقدار دقیق z را مشخص می‌کند. با توجه به قضیه ۲، z را می‌توان یک برآورد از مقدار تابع هدف در نظر گرفت.

قضیه ۳: بردار d^l یک جواب شدنی از مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر با مقدار تابع هدف z باشد، اگر و تنها اگر $c_l \le z \le c_{l+1}$.

اثبات. ابتدا قسمت لزوم ثابت می‌شود. فرض کنید (i_l, j_l) یالی است که $c_{i_l j_l} = c_l$ و همچنین، (i_{l+1}, j_{l+1}) یالی است که $c_{i_{l+1} j_{l+1}} = c_{l+1}$.

به برهان خلف، اگر $z > c_{l+1}$ ، آن‌گاه $d^l_{i_{l+1} j_{l+1}}$ مقداری منفی است که نتیجه می‌دهد d^l یک جواب شدنی نیست. اما اگر $z < c_l$، آن‌گاه ایمنی همه یال‌های تغییریافته از ایمنی یال (i_l, j_l) کمتر خواهد شد. پس هنوز هم مسیرهایی از نقطه شروع به نقطه هدف که از یال (i_l, j_l) می‌گذرند لزوما دارای مقدار ایمنی کمتر از z نیستند. بنابراین، مقدار تابع هدف d^l برابر z نیست.

برای اثبات قسمت کفایت، توجه کنید که نامساوی $z \le c_{l+1}$، نامنفی بودن بردار d^l تضمین شده است. از طرف

دیگر، رابطه

(۶) برقراری قید بودجه را نیز تضمین می‌کند. پس d^l یک جواب شدنی از مسأله خواهد بود. در نهایت چون نامساوی $c_l \leq z$ برقرار است، پس ایمنی هر یال از برش حداکثر برابر z می‌باشد که نشان می‌دهد مقدار تابع هدف d^l برابر z است.

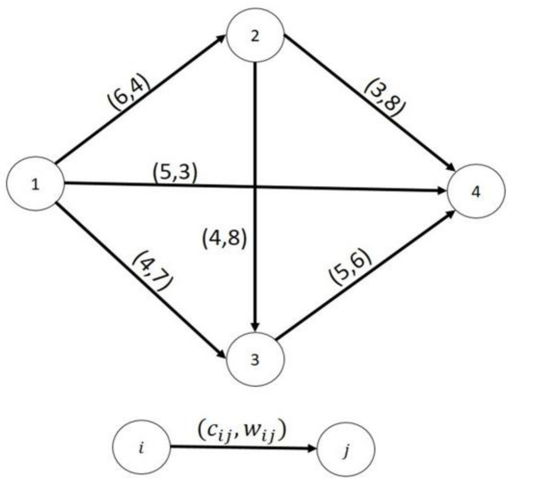
با توجه به این قضیه، کافی است برای هر برش C اندیسی مانند l را یافت که به‌ازای آن، نامساوی

$$c_l \leq \frac{\sum_{(i,j)\in A: c_{ij} > c_l} c_{ij} w_{ij} - W}{\sum_{(i,j)\in A: c_{ij} > c_l} w_{ij}} \leq c_{l+1}$$

برقرار باشد. در این‌صورت می‌توان جواب شدنی d^l را به‌دست آورد.

مثال ۲: نمونه‌ای از مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر در شکل (۱) آورده شده است.

در این مثال، جواب شدنی متناظر با برش $C = (S, \bar{S})$ با



شکل (۱): نمونه‌ای از مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر با بودجه کل $W = 20$.

$S = \{1,2\}$ محاسبه می‌شود. مجموعه یال‌های پیشرو این برش برابر

$C = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$

هستند. مجموعه ایمنی این یال‌ها در لیست زیر مرتب شده‌اند:

$$0(= c_0) \leq 3(= c_1) \leq 4(= c_2) \leq 4(= c_3) \leq 5(= c_4).$$

به‌ازای مقادیر مختلف $l = 0,1,2,3$ مقدار z در جدول (۲) به دست آمده است.

جدول (۲): مقادیر حاصل به‌ازای lهای مختلف

l	z	$[c_l, c_{l+1}]$
0	$\frac{3\times8+4\times7+4\times8+5\times3-20}{8+7+8+3} = 3.81$	[0,3]
1	$\frac{4\times7+4\times8+5\times3-20}{7+8+3} = \frac{55}{18} = 3.06$	[3,4]
2	$\frac{4\times8+5\times3-20}{8+3} = 2.45$	[4,4]
3	$\frac{5\times3-20}{3} = -1.67$	[4,5]

همان‌طور که از مقادیر جدول (۲) مشهود است تنها به‌ازای $l = 1$ شرط $c_l \leq z \leq c_{l+1}$ برقرار است. بنابراین، جواب شدنی مربوط به این برش به‌صورت:

$$d_{12}^0 = d_{34}^0 = d_{32}^0 = d_{24}^0 = 0,$$
$$d_{13}^0 = \frac{17}{18} = 0.944\,, d_{23}^0 = \frac{17}{18} = 0.944\ ,$$
$$d_{14}^0 = \frac{35}{18} = 1.944,$$

با مقدار $z^* = \frac{55}{18} = 3.06$ است. بنابراین، این جواب ایمنی سه یال (1,4)، (2,3)، (1,3) را به 3.06 تغییر می‌دهد و ایمنی بقیه یال‌ها بدون تغییر باقی می‌ماند. قابل ذکر است که یال (2,4) با این که روی برش قرار دارد مقدار ایمنی آن تغییر نخواهد کرد. زیرا این یال در شرط $c_{24} > c_l$ صدق نمی‌کند.

۶- الگوریتم کارا

در این بخش یک الگوریتم زمان چندجمله‌ای برای حل مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر ارایه می‌شود. این الگوریتم شامل سه مرحله (سه فاز) است. الگوریتم در فاز اول یک بازه را جستجو می‌کند که مقدار تابع هدف بهینه در آن واقع شده است. در فاز دوم با استفاده از روش نیوتن مقدار بهینه دقیق را می‌یابد. در نهایت در سومین فاز، جواب بهینه را از روی مقدار بهینه حاصل از فاز دوم به‌دست می‌آورد. در جدول (۳) شمای کلی الگوریتم پیشنهادی به اختصار آورده شده است.

جدول (۳): شمای کلی الگوریتم پیشنهادی

✓ فاز اول: یافتن یک بازه که شامل مقدار بهینه تابع هدف

است.

- ✓ فاز دوم: استفاده از روش نیوتن برای به‌دست آوردن مقدار بهینه.
- ✓ فاز سوم: محاسبه جواب بهینه از روی مقدار بهینه.

برای تشریح فاز اول، ابتدا نیاز به بیان برخی نتایج در مورد جواب‌های شدنی مسأله است. فرض کنید z_{max} مقدار بهینه مسأله

$$\min_{C\in\mathcal{C}} \max_{(i,j)\in C} c_{ij} \tag{۷}$$

باشد که $\mathcal{C}$ مجموعه همه برش‌هایی در G است که نقطه شروع را از نقطه هدف جدا می‌کند. مسأله (۷) را مسأله برشی با کمترین تنگنا نامیده و الگوریتم‌های زمان چندجمله‌ای برای حل آن موجود است. توجه کنید که z_{max} مقدار تابع هدف جواب شدنی $d = 0$ (یعنی بدترین جواب شدنی ممکن) است. بنابراین، مقدار تابع هدف هر جواب شدنی بایستی در بازه‌ی $[0, z_{max}]$ قرار گیرد.

فرض کنید عناصر مجموعه $(\{c_{ij}: (i,j) \in A\} \cup \{0\}) \cap [0, z_{max}]$ به‌طور غیر نزولی مرتب شده و فرض کنید

$$(0 =)c_0 \le c_1 \le c_2 \le c_3 \le \cdots \le c_k(= z_{max})$$

نشان‌دهنده این لیست مرتب شده باشد. از این پس این لیست با بردار $L = [c_0, \dots, c_k]$ نمایش داده می‌شود. قضایای زیر در مورد وجود جواب‌های شدنی مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر است.

لم ۴: به‌ازای اندیس ثابت $l = 0, \dots, k$، اگر مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر فاقد جواب شدنی با مقدار تابع هدف $z_l \in (c_{l-1}, c_l]$ باشد، آن‌گاه فاقد جواب شدنی با مقدار تابع هدف $z' \in [c_{l-1}, z_l)$ است.

اثبات: به برهان خلف فرض کنید مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر دارای جواب شدنی d' با مقدار تابع هدف $z' \in [c_{l-1}, z_l]$ است. همچنین فرض کنید C' نشان‌دهنده مجموعه یال‌هایی است که مقدار ایمنی آن‌ها در این جواب تغییر کرده است. بدون از دست دادن کلیت می‌توان دو فرض اضافی بر جواب d' و مجموعه C' تحمیل کرد. اول این که فرض می‌شود فقط یال‌هایی متعلق به C' هستند که مقدار ایمنی c_{ij} آن‌ها بیشتر از z' است زیرا تغییر ایمنی سایر یال‌ها نه تنها مقدار تابع هدف را تغییر نمی‌دهد بلکه باعث هزینه اضافی نیز می‌گردد. دومین فرض این است که برای هر یال $(i,j) \in C'$ نامساوی $c_{ij} - d'_{ij} \le z'$ برقرار است. این فرض نیز محدودکننده نیست زیرا اگر این فرض برای یک یال برقرار نباشد می‌توان با عدم تغییر ایمنی آن یال باز هم به جوابی شدنی با همین مقدار تابع هدف دست یافت. پس به‌ازای هر یال $(i,j) \in C'$، نامساوی‌های زیر برقرار است:

الف- $d'_{ij} > 0$.

ب- $z' < c_{ij}$.

پ- $c_{ij} - d'_{ij} \le z'$.

حال جواب شدنی d^l را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$d^l_{ij} = \begin{cases} 0 & (i,j) \notin C', \\ d'_{ij} - \epsilon & (i,j) \in C', \end{cases} \tag{۸}$$

که $\epsilon = z_l - z' > 0$.

با توجه به این که به‌ازای هر یال $(i,j) \in A$ نامساوی $d^l_{ij} \le d'_{ij}$ برقرار است و d' یک جواب شدنی است، پس لزوما به‌ازای هر یال $(i,j) \in A$ نامساوی $d^l_{ij} \le c_{ij}$ نیز برقرار بوده و حتی d^l در قید بودجه نیز صدق می‌کند. پس اگر ثابت شود که به‌ازای هر یال $(i,j) \in A$ ، $d^l_{ij} \ge 0$، آن‌گاه d^l یک جواب شدنی از مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر خواهد بود. نامنفی بودن d^l_{ij} به‌ازای $(i,j) \notin C'$ واضح است. برای هر $(i,j) \in C'$ می‌توان نوشت:

$$d^l_{ij} = d'_{ij} - \epsilon = d'_{ij} + z' - z_l \ge c_{ij} - z_l \ge 0,$$

که نامساوی اول همان نامساوی (پ) است و سومین نامساوی از (ب) و $c_{l-1} \le z' < z \le c_l$ نتیجه می‌شود. بنابراین، نتیجه می‌شود که d^l یک جواب شدنی است.
برای رسیدن به تناقض، کافی است نشان داده شود که مقدار تابع هدف جواب شدنی d^l برابر z_l است. از آن‌جا که مقدار تابع هدف d' برابر z' است، می‌توان نوشت:

$$c_{ij} - d'_{ij} \le z', \quad \forall P \in \mathcal{P}, \exists (i,j) \in P, \tag{۹}$$

$$\text{-}\ d'_{ij} = z', \quad \exists P_0 \in \mathcal{P}, \exists (i,j) \in P_0 \cap C', \tag{۱۰}$$

که در این‌جا، $\mathcal{P}$ مجموعه همه مسیرهای جهت‌دار در G از نقطه شروع به نقطه هدف است. توجه کنید که در تساوی (۱۰) فرض اضافی $(i,j) \in C'$ تحمیل شده است. طبق نامساوی (پ) اگر تساوی (۱۰) برای هیچ یالی از C' رخ ندهد، به‌ازای هر $(i,j) \in C'$ نامساوی $c_{ij} - d'_{ij} < z'$ برقرار خواهد بود. پس می‌توان با کاهش مقادیر d'_{ij} ها به‌اندازه یک مقدار مثبت کوچک به یک جواب شدنی رسید که تساوی (۱۰) حداقل برای یک یال رخ دهد. با جمع کردن طرفین نامساوی (۹) و (۱۰) با عدد ϵ، روابط زیر حاصل می‌شود:

$$c_{ij} - d^l_{ij} \le c_{ij} - (d'_{ij} - \epsilon) \le z' + \epsilon = z_l,$$

$$\forall P \in \mathrm{P}, \exists (i,j) \in P,$$

$$c_{ij} - d_{ij}^{l} = c_{ij} - (d'_{ij} - \epsilon) = z' + \epsilon = z_l,$$
$$\exists P_0 \in \mathrm{P}, \exists (i,j) \in P_0 \cap C',$$

بنابراین، مقدار تابع هدف جواب شدنی d^l برابر z_l است که منجر به تناقض می‌شود.

قضیه ۵: اگر مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر فاقد جواب شدنی با مقدار تابع هدف $z \in [0, z_{max}]$ باشد، آن‌گاه فاقد جواب شدنی با مقدار تابع هدف کمتر از z است.

اثبات: اگر $z \in (c_{l-1}, c_l]$ آن‌گاه طبق لم قبل مسأله فاقد جواب شدنی در بازه $[c_{l-1}, z]$ است. حال قرار دهید: $z_{l-1} = c_{l-1}$. باز هم طبق لم قبل چون مسأله فاقد جواب شدنی با مقدار هدف z_{l-1} است پس همچنین، فاقد جواب شدنی با مقدار هدف $z \in (c_{l-2}, z_{l-1}]$ خواهد بود. با تکرار این روند حکم ثابت می‌شود.

نتیجه ۶: اگر مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر فاقد جواب شدنی با مقدار تابع هدف z_{max} باشد، آن‌گاه مسأله نشدنی است.

اثبات. از آن‌جا که هر مقدار تابع هدف متعلق به بازه $[0, z_{max}]$ است، این نتیجه یک حکم فوری از قضیه ۵ است.

فرض کنید $z \in [0, z_{max}]$ یک عدد حقیقی نامنفی دلخواه باشد. در ادامه به این سوال پاسخ داده خواهد شد که آیا می‌شود یک جواب شدنی d را به‌دست آورد که مقدار تابع هدفش برابر z باشد (از دیدگاهی دیگر، ایمنی هر مسیر حداکثر برابر z گردد). در این خصوص، برای هر یال $(i,j) \in A$، یک وزن u_{ij}^{z} را در نظر بگیرید که هزینه تغییر ایمنی این یال را نشان می‌دهد. اگر $c_{ij} \leq z$ باشد، نیازی به تغییر ایمنی یال نیست. پس برای این یال‌ها هزینه $u_{ij}^{z} = 0$ در نظر گرفته می‌شود. اما اگر $c_{ij} > z$ باشد، باید ایمنی به‌اندازه $d_{ij} = c_{ij} - z$ کاهش یابد تا به مقدار z برسد. این تغییر، هزینه $u_{ij}^{z} = w_{ij}(c_{ij} - z)$ را در بر خواهد داشت. فرض کنید C کمترین برش شبکه $G(V, A, u^{z})$ باشد. اکنون اگر ظرفیت کمترین برش C از W کمتر باشد، جواب شدنی d^{z} که به‌صورت

$$d_{ij}^{z} = \begin{cases} 0 & (i,j) \notin C, \\ 0 & (i,j) \in C \wedge u_{ij}^{z} = 0, \\ c_{ij} - z & (i,j) \in C \wedge u_{ij}^{z} > 0, \end{cases} \qquad (۱۱)$$

تعریف می‌شود، حاصل می‌گردد. اما در غیر این‌صورت قید بودجه برقرار نبوده، پس نمی‌تواند d^{z} یک جوابی شدنی باشد. نتیجه حاصل در قضیه زیر به طور رسمی بیان شده است.

قضیه ۷. به‌ازای هر $z \in [0, z_{max}]$، بردار d^{z} یک جواب شدنی از مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر است اگر و تنها اگر ظرفیت کمترین برش شبکه $G(V, A, u^{z})$ کمتر یا مساوی W باشد.

اثبات: اثبات واضح است.

قضیه ۸: اگر مسأله دارای جواب شدنی d' با مقدار تابع هدف z باشد، آن‌گاه بردار d^{z} تعریف شده به‌وسیله (11) نیز یک جواب شدنی است.

اثبات: مجموعه $S = \{(i,j) \in A : c_{ij} - d'_{ij} \leq z\}$ را در نظر بگیرید. این مجموعه از یال‌ها حداقل شامل یال‌های یک برش مانند C می‌شوند، زیرا در غیر این‌صورت می‌توان مسیری یافت که ایمنی‌اش بیشتر از z باشد که نتیجه می‌دهد مقدار تابع هدف d' از z بیشتر است. اکنون جواب d^{z} تعریف‌شده به‌وسیله (۶) متناظر با این برش C را در نظر بگیرید. به سادگی می‌توان دید که به‌ازای هر $(i,j) \in A$ نامساوی $d_{ij}^{z} \leq d'_{ij}$ برقرار است. پس با استفاده از این نامساوی d^{z} در قید بودجه و در محدودیت $d^{z} \leq c$ صدق می‌کند. بنابراین، d^{z} یک جواب شدنی از مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر است.

یک نتیجه مورد توجه از قضیه فوق، این است که برای یافتن مقدار بهینه مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر می‌توان جستجوی خود را محدود به جواب‌های d^{z} تعریف‌شده به‌وسیله (۶) کرد و کوچکترین مقدار $z \in [0, z_{max}]$ را یافت به‌طوری که d^{z} شدنی باشد و یا معادلات ظرفیت کمترین برش شبکه $G(V, A, u^{z})$ کمتر یا مساوی W باشد. اکنون می‌توان فاز اول الگوریتم را به طور دقیق تشریح کرد. فاز اول در جستجوی بازه‌ای مانند $(c_{l-1}, c_l]$ است که شامل مقدار بهینه z^{*} مسأله شود. بدین منظور اندیسی مانند $l \in \{1, \ldots, k\}$ را جستجو می‌کند که به‌ازای آن، مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر دارای جوابی شدنی با مقدار تابع هدف $z = c_l$ بوده اما فاقد جواب شدنی با مقدار تابع هدف $z = c_{l-1}$ باشد. بنابراین، فاز اول اندیسی مانند $l \in \{1, \ldots, k\}$ را جستجو می کند به‌طوری که ظرفیت کمترین برش در شبکه $G(V, A, u^{c_l})$ کمتر یا مساوی W بوده در حالی که در شبکه $G(V, A, u^{c_{l-1}})$ بیشتر از W باشد. برای یافتن اندیس l با این خاصیت کافی است از روش جستجوی دودویی استفاده شود.

اکنون در مورد جزییات فاز دوم الگوریتم بحث می‌شود. در این فاز، ابتدا نشان داده می‌شود که مسأله به یک مسأله کمترین نسبت برش کاهش می‌یابد. سپس مسأله حاصل به روش نیوتن حل می‌گردد.

توجه نمایید که فاز اول الگوریتم بازه $[c_{l-1}, c_l]$ را به‌دست آورده است که مقدار بهینه z^* متعلق به آن است. با توجه به قضیه ۸ واضح است که مسأله ایمن‌ترین مسیر دارای یک جواب بهینه d^{z^*} تعریف‌شده به‌وسیله (۶) به‌ازای $z = z^* \in (c_{l-1}, c_l]$ می‌باشد. پس کافی است الگوریتم جستجوی خود را برای یافتن جواب بهینه محدود به جواب‌هایی کند که به‌صورت (۶) تعریف‌شده و مقدار تابع هدفشان در بازه $[c_{l-1}, c_l]$ قرار گیرد. مجموعه

$$L = \{(i,j) \in A: c_{ij} \geq c_l\}$$

را در نظر بگیرید. این مجموعه شامل همه یال‌هایی است که می‌توان ایمنی آن‌ها را برای به‌دست آوردن یک جواب شدنی با مقدار تابع هدف $z \in (c_{l-1}, c_l]$ تغییر داد. پس با توجه به فاز اول، مجموعه‌ی L به‌طور منحصربه‌فرد مشخص شده و در اجرای فاز دوم ثابت می‌ماند. یک جواب دلخواه d^z متناظر با برش C را در نظر بگیرید. به‌وسیله تعریف مجموعه L می‌توان این جواب را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$d_{ij}^z = \begin{cases} 0 & (i,j) \notin C, \\ 0 & (i,j) \in C \backslash L, \\ c_{ij} - z & (i,j) \in C \cap L, \end{cases} \quad (۱۲)$$

که در آن، z مقداری است که به‌ازای آن محدودیت بودجه به شکل تساوی برقرار باشد. پس مقدار z به‌طور یکتا به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sum_{(i,j)\in A} w_{ij} d_{ij}^z = W \Longrightarrow$$
$$\sum_{(i,j)\in C\cap L} w_{ij}\left(c_{ij} - z\right) = W \Longrightarrow$$
$$z = \frac{\sum_{(i,j)\in C\cap L} w_{ij} c_{ij} - W}{\sum_{(i,j)\in C\cap L} w_{ij}}.$$

با توجه به این که هدف کمینه‌سازی مقدار z است، می‌توان مسأله ممانعت ایمن‌ترین توان مسیر را به شکل زیر کاهش داد:

$$\min_{C\in \mathcal{C}} z = \frac{\sum_{(i,j)\in C\cap L} w_{ij} c_{ij} - W}{\sum_{(i,j)\in C\cap L} w_{ij}}, \quad (۱۳)$$

که مشابه با قبل، $\mathcal{C}$ نشان‌دهنده مجموعه برش‌هایی از شبکه‌ی G است که نقاط شروع و هدف را از هم جدا می‌کند. برای حذف مجموعهِ L در فرمول‌بندی مسأله، شبکه $G^L(V, A, c^L, w^L)$ را در نظر بگیرید که در آن:

$$c_{ij}^L = \begin{cases} c_{ij} & (i,j) \in L, \\ 0 & (i,j) \notin L, \end{cases} \qquad \forall (i,j) \in A,$$

$$w_{ij}^L = \begin{cases} w_{ij} & (i,j) \in L, \\ 0 & (i,j) \notin L, \end{cases} \qquad \forall (i,j) \in A.$$

با این تعریف می‌توان مسأله را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\min_{C\in \mathcal{C}^L} z = \frac{\sum_{(i,j)\in C} w_{ij} c_{ij} - W}{\sum_{(i,j)\in C} w_{ij}}, \quad (۱۴)$$

که $\mathcal{C}^L$ نشان‌دهنده مجموعه همه برش‌هایی از شبکه G^L است که نقاط شروع و هدف را از هم جدا می‌کند. در این مسأله هدف یافتن برشی از شبکه G^L است که مقدار کسر $\frac{\sum_{(i,j)\in C} w_{ij} c_{ij} - W}{\sum_{(i,j)\in C} w_{ij}}$ را کمینه کند. این مسأله یک نوع خاص از مسایل بهینه‌سازی ترکیبیاتی کسری است که آن را مسأله کمترین برش کسری نامند. برای حل این مسأله از روش نیوتن که توسط رادزیک برای حل مسأله مینیمم برش کسری پیشنهاد شد، استفاده می‌گردد [۲۱].

مسأله بهینه‌سازی پارامتری

$$h(z) = \min\left\{\sum_{(i,j)\in C} w_{ij}(c_{ij} - z) : \ C \in \mathcal{C}^L\right\}$$

را در نظر بگیرید. این مسأله ارتباط نزدیکی با مسأله (۱۴) دارد که در قضیه زیر آمده است.

قضیه ۹. فرض کنید C_{z^*} جواب بهینه مسأله پارامتری به‌ازای پارامتر z^* باشد. اگر $h(z^*) = W$، آن‌گاه z^* مقدار بهینه مسأله (۱۴) و C_{z^*} جواب بهینه آن است.

اثبات: با توجه به بهینگی C_{z^*}، به‌ازای هر $C \in \mathcal{C}^L$ می‌توان نوشت:

$$\sum_{(i,j)\in C} w_{ij}(c_{ij} - z^*) \geq W = \sum_{(i,j)\in C_{z^*}} w_{ij}(c_{ij} - z^*) \Longrightarrow$$
$$\sum_{(i,j)\in C} w_{ij}(c_{ij} - z^*) - W \geq 0$$
$$= \sum_{(i,j)\in C_{z^*}} w_{ij}(c_{ij} - z^*) - W \Longrightarrow$$
$$\frac{\sum_{(i,j)\in C} w_{ij} c_{ij} - W}{\sum_{(i,j)\in C} w_{ij}} \geq z^* = \frac{\sum_{(i,j)\in C_{z^*}} w_{ij} c_{ij} - W}{\sum_{(i,j)\in C_{z^*}} w_{ij}}$$

که نشان می‌دهد C_{z^*} جواب بهینه مسأله (۱۴) با مقدار تابع هدف z^* است.

از قضیه فوق می‌توان به‌جای حل مسأله (۱۴) معادله $h(z) = W$ را حل کرد که برای این کار از روش نیوتن استفاده می‌شود.

فرض کنید z_0 یک تقریب اولیه از مقدار تابع هدف z^* از مسأله (۱۴) باشد به‌طوری که $z^* \leq z_0$. با توجه به این که

$z^* \in (c_{l-1}, c_l]$ می‌توان $z_0 = c_l$ را اختیار کرد. الگوریتم با شروع از نقطه z_0 یک دنباله اعداد مانند $z_0 > z_1 > z_2 > \cdots$ را می‌یابد که همگرا به z^* است. چنانچه z_k محاسبه شده باشد و $h(z_k) = W$ آن‌گاه جواب بهینه را یافته‌ایم. در غیر این‌صورت لزوما روابط زیر حاصل می‌شود:

$$h(z_k) < W \Rightarrow$$
$$\sum_{(i,j)\in C_k} w_{ij}(c_{ij} - z_k) < W \Rightarrow$$
$$\frac{\sum_{(i,j)\in C_k} w_{ij}c_{ij} - W}{\sum_{(i,j)\in C_k} w_{ij}} < z_k$$

که عبارت سمت چپ نامساوی اخیر را برابر z_{k+1} در نظر گرفته و $h(z_{k+1})$ محاسبه می‌گردد. مراحل تا رسیدن به بهینگی ادامه می‌یابد. واضح است که $z_{k+1} < z_k$. توجه کنید حالتی که $h(z_k) > W$ هیچ‌گاه رخ نمی‌دهد.

رادزیک ثابت کرد که در حداکثر n تکرار از روش نیوتن، مسأله کمترین برش کسری به جواب بهینه می‌رسد[۲۱]. پس فاز دوم حداکثر نیاز به $O(n)$ تکرار دارد که در هر تکرار بایستی یک مسأله کمترین برش $h(z_k)$ را حل کرد. به‌جای حل مسأله کمترین برش می‌توان مسأله دوگان آن را یعنی مسأله ماکزیمم جریان را حل کرد که در زمان $O(n^2m)$ قابل حل است. بنابراین، فاز دوم الگوریتم در زمان $O(n^3m)$ اجرا می‌شود. قابل توجه است که فاز اول الگوریتم از جستجوی دودویی استفاده می‌کند و در هر مرحله باز هم نیاز به حل یک مسأله کمترین برش دارد. بنابراین، پیچیدگی فاز اول برابر $O(n^2m \log m) = O(n^2m\log n)$ است.

در پایان فاز دوم یک جواب بهینه C^* با مقدار بهینه z^* از حل مسأله کمترین برش کسری حاصل می‌شود. پس از آن، در سومین فاز بایستی جواب بهینه مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر محاسبه گردد. جواب بهینه مسأله همان d^{z^*} که به‌وسیله‌ی (۱۱) به‌ازای $z = z^*$ و $C = C^*$ به دست می‌آید. بنابراین، فاز سوم فقط نیاز به $O(m)$ زمان دارد. با این توضیحات قضیه زیر اثبات شده است.

قضیه ۱۰: مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر در زمان $O(n^3m)$ قابل حل است.

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک نوع خاص از مسایل ممانعت شبکه با نام مسأله ممانعت ایمن‌ترین مسیر مورد بررسی قرار گرفت. این مسأله کاربردهای نظامی زیادی را شامل می‌شود. مسأله به‌صورت یک مدل بهینه‌سازی دو سطحی فرمول‌بندی شد. همچنین الگوریتمی زمان چندجمله‌ای برای حل آن پیشنهاد شد. امید است که بتوان از نتایج حاصل از این مقاله در طراحی سامانه‌های نظامی مربوط به مباحث مدیریت راهبردی بهره گرفت.

با توجه به این که مسأله مطرح‌شده تنها در این مقاله و [۱] (مقاله دیگر نویسندگان) معرفی شده است، می‌توان مسأله را به حالت‌های متعددی نظیر شبکه‌های پویا، مسایل چندهدفه و ... گسترش داد.

۸- مراجع

[1] A. Mohammadi and J. Tayyebi, "Maximum capacity path interdiction problem with fixed costs," Asia-Pacific Journal of Operational Research, vol. 36, no. 4, 1950018, (21 pages), 2019.

[2] H. V. Stackelberg, "The theory of the market economy," William Hodge and Co., London, U.K., 1952.

[3] J. C. Smith, M. Prince, and J. Geunes, "Modern network interdiction problems and algorithms," In Handbook of combinatorial optimization, New York: Springer, pp. 1949–1987, 2013.

[4] B. Golden, "A problem in network interdiction," Naval Research Logistics (NRL), vol. 25, no. 4, pp. 711-713, 1978.

[5] E. Israeli and R. K. Wood, "Shortest-path network interdiction," Networks, vol. 40, no. 2, pp. 97-111, 2002.

[6] J. E. Ramirez-Marquez, "A bi-objective approach for shortest-path network interdiction," Computers & Industrial Engineering, vol. 59, no. 2, pp. 232-240, 2010.

[7] S. Sadeghi, A. Seifi, and E. Azizi, "Trilevel shortest path network interdiction with partial fortification," Computers & Industrial Engineering, vol. 106, pp. 400-411, 2017.

[8] J. A. Sefair and C. Smith, "Dynamic shortest- path interdiction," Networks, vol. 68, no. 4, pp. 315-330, 2016.

[9] A. Washburn and K. C. Wood, "Two-Person Zero-Sum Games for Network Interdiction," Operations Research, vol. 43, no. 2, pp. 243-251, 1994.

[10] J. Zhang, J. Zhuang, and B. Behlendorf, "Stochastic shortest path network interdiction with a case study of Arizona–Mexico border," Reliability Engineering & System Safety, vol. 179, pp. 62-73, 2017.

[11] R. K. Wood, "Deterministic network interdiction," Mathematical and Computer Modelling, vol. 17, no. 2, pp. 1-18, 1993.

[12] R. Zenklusen, "Network flow interdiction on planar graphs," Discrete Applied Mathematics, vol. 158, no. 13, pp. 1441-1455, 2010.

[13] M. Afshari Rad and H. T. Kakhki, "Two extended formulations for cardinality maximum flow network interdiction problem," Networks, vol. 69, no 4, pp. 367-377, 2017.

[14] X. Lei, S. Shen, and Y. Song, "Stochastic maximum flow interdiction problems under heterogeneous risk preferences," Computers & Operations Research, vol. 90, pp. 97-109, 2018.

[15] J. Naoum-Sawaya and B. Ghaddar, "Cutting plane approach for the maximum flow interdiction problem," Journal of the Operational Research Society, vol. 68, no. 12, pp. 1553-1569, 2017.

[16] K. M. Sullivan and C. Smith, "Exact algorithms for solving a Euclidean maximum flow network interdiction problem," Networks, vol. 64, no. 2, pp. 109-124, 2014.

[17] V. Stozhkov, V. Boginski, O. A. Prokopyev, and E. L. Pasiliao, "A simple greedy heuristic for linear assignment interdiction," Annals of Operations Research, vol. 249, no. 1, pp. 39-53, 2017.

[18] R. Zenklusen, "Matching interdiction," Discrete Applied Mathematics, vol. 158, no. 16, pp. 1676-1690, 2010.

[19] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin, "Network flows," Pearson Education, 2011.

[20] E. W. Dijkstra, "A note on two problems in connexion with graphs," Numerische mathematik, vol. 1, no. 1, pp. 269-271, 1959.

[21] T. Radzik, "Fractional combinatorial optimization," in Handbook of combinatorial optimization, New York, Springer, pp. 1311-1355, 2013.