مجله علمی- پژوهشی "پدافند الکترونیکی و سایبری"
ویژه‌نامه ترکیبیات، رمزنگاری و محاسبات، ص ۱۰۲ -۹۵

گراف‌های فاصله متوازن یالی ظریف

سحرناز زینلو، مهدی علائیان[2*]

۱-دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، کرج، ایران، ۲- استاد دانشکده ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران

(دریافت: ۱۳۹۷/۰۸/۲۵ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۷/۰۲)

چکیده

گراف ناتهی G را یک گراف فاصله متوازن یالی ظریف می‌نامیم، هرگاه یک عدد مثبت و صحیح مانند γ' وجود داشته باشد به‌طوری که بـرای هر یال $e = uv$ در G داشته باشیم: $m_u(e) = m_v(e) = \gamma'_G$. به‌طوری که $m_u(e)$ تعداد یال‌هایی است که بـه رأس u نزدیک‌تـر از رأس v هستند و همچنین منظور از $m_v(e)$ تعداد یال‌هایی است که به رأس v نزدیک‌تر از رأس u هستند. در ایـن مقالـه، ابتـدا گـراف‌هـای فاصـله متوازن یالی ظریف معرفی شده و سپس برخی خصوصیات آنها مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین، سعی شده تا این خانواده از گراف‌ها با توجه به عدد $\gamma'_G \leq 2$ ، رده‌بندی شوند.

واژه‌های کلیدی: فاصله در گراف، قطر گراف، گراف فاصله متوازن، گراف فاصله متوازن یالی، گراف فاصله متوازن یالی ظریف

۱- مقدمه

فرض کنیم که G یک گراف ساده و همبند با مجموعه رئوس V(G) و مجموعه یال‌های E(G) باشد. اگر u و v دو رأس از گراف G باشند، آن‌گاه فاصله بین u و v را با نماد $d_G(u, v)$ نمایش می‌دهیم که منظور تعداد رئوسی است که در کوتاه‌ترین مسیر که بین u و v، واقع شده اند [۱] . همچنین، برای هر دو یال دلخواه در G مانند $e = uv$ و $e' = u'v'$ تعریف می‌کنیم:

$$d'_G(e') = \min\{d'_G(e', u), d'_G(e', v)\}$$

به‌طوری که منظورمان از $d'_G(e', u)$ همان تعداد یال‌هایی است که در کوتاه‌ترین مسیر بین e' و u (با احتساب خود e')، قرار دارند. مقادیر $m_0(e)$، $m_u(e)$ و $m_v(e)$ به ترتیب تعداد یال‌هایی است که فاصله‌شان از u و v به یک اندازه باشد، تعداد یال‌هایی است که به رأس u نزدیک‌ترند تا به رأس v و تعداد یال‌هایی که به رأس v نزدیکتر از رأس u هستند. اگر یال $e = uv$ یک یال دلخواه از G باشد، آن‌گاه برای هر دو عدد صحیح و نا منفی مانند i , j داریم:

$$D'^{i}_{j}(e) = \{e' \in E(G) |\ d'_G(e', u) = i, d'_G(e', v) = j\}$$

با توجه به تعریف گراف فاصله متوازن یالی ظریف، $D'^{1}_{1} = \phi$ است. زیرا تمام گراف‌های مورد مطالعه در این تحقیق گراف ساده‌اند. با استفاده از نامساوی مثلثی، برای هر i، $(2 \leq i \leq d + 1)$، به‌جز مجموعه‌های $D'^{i}_{i}(u, v)$، $D'^{i-1}_{i}(u, v)$، $D'^{i}_{i-1}(u, v)$، بقیه مجموعه‌ها تهی هستند. در اینجا برخی تعاریف پایه‌ای در گراف را، یادآوری می‌کنیم:

گراف G یک گراف فاصله متوازن (DB) نامیده می‌شود، اگر برای هر یال دلخواه $e = uv$ در G، تعداد رؤسی که به u نزدیک‌ترند تا به v با تعداد رؤسی که به v نزدیک‌ترند تا u، با هم برابر باشد [۵-۲] .

گراف ناتهی G را یک گراف فاصله متوازن ظریف (NDB) گوییم، هرگاه یک عدد صحیح نامنفی مانند γ_G وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر دو رأس مجاور مانند u و v در G، تعداد γ_G رأس در G وجود دارد که به u نزدیک‌تر است تا به v و دقیقا تعداد γ_G رأس در G وجود دارد که به v نزدیک‌تر از u هستند [۶] .

گراف G را یک گراف فاصله متوازن یالی (EDB) می‌نامیم هرگاه برای هر یال دلخواه $e = uv$ ، تعداد یال‌هایی که به رأس u نزدیک‌ترند تا رأس v با تعداد یال‌هایی که به رأس v نزدیک‌ترند تا u، با هم برابرند [۸-۷] . به عبارت دیگر، گراف G را یک گراف فاصله متوازن یالی گوییم اگر و فقط اگر برای هر یال دلخواه e داشته باشیم: $m_u(e) = m_v(e)$.

در بخش بعدی این تحقیق، سعی شده تا به برخی از خصوصیات گراف‌های فاصله متوازن یالی ظریف پرداخته شود و بررسی شود که تحت چه شرایطی یک گراف فاصله متوازن یالی ظریف خواهیم داشت. همچنین، در بخش سوم، برای برخی خانواده‌ها از گراف‌ها فرمول ثابت ارایه می‌شود و در آخر، با حکم زیر اثبات شد:

[*] رایانامه نویسنده پاسخگو: alaeiyan@iust.ac .ir

توجه به عدد $\gamma'_G \leq 2$ ، گراف‌ها را رده‌بندی می‌کنیم.

۲- خصوصیات گراف‌های فاصله متوازن یالی ظریف

در این بخش، به بررسی برخی خواص گراف‌های فاصله متوازن یالی ظریف، وقتی d را به‌عنوان قطر گراف در نظر گرفته‌ایم، می‌پردازیم.

قضیه ۲-۱: اگر G یک گراف فاصله متوازن یالی ظریف با $|E(G)| \geq 3$ و قطر d باشد. آن‌گاه برای هر یال دلخواه e، داریم:

$$\sum_{i=2}^{d+1} |D'^{i}_{i}(u,v)| = |E(G)| - (2\gamma'_G + 1).$$

اثبات: اگر $|E(G)| = m$ و $e = uv$ یک یال دلخواه در G باشد و بعد از انتخاب، ثابت فرض شود. بقیه یال‌ها در گراف G به سه مجموعه تقسیم می‌شوند. تمام یال‌هایی که به رأس u نزدیک‌تر از رأس v هستند را در مجموعه $D'^{i-1}_{i}(u,v)$ قرار می‌دهیم. دومین مجموعه، یال‌هایی که به رأس v نزدیک‌تر از رأس u هستند که در $D'^{i}_{i-1}(u,v)$ قرار دارند. آخرین مجموعه یال‌هایی که از u و v به یک فاصله باشند که همه آنها در $D'^{i}_{i}(u,v)$ واقع شده‌اند، برای هر $2 \leq i \leq (d+1)$ در نظر بگیریم. از آن‌جایی که G یک گراف فاصله متوازن یالی ظریف است، پس تعداد اعضا در مجموعه اول و دوم با هم برابر بوده و این عدد ثابت همان γ'_G است و حکم ثابت شد [۹].

لازم به‌ذکر است که هر گراف فاصله متوازن یالی ظریف یک گراف فاصله متوازن یالی هم است ولی برعکس گزاره فوق برقرار نیست. برای ارایه مثال نقض، گراف‌های پترسن توسعه‌یافته GP(7,2) است که یک گراف فاصله متوازن یالی است ولی به آسانی می‌توان دید که یک گراف فاصله متوازن یالی ظریف نیست که این مساله در بخش‌های آتی مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

قضیه ۲-۲: اگر G را گراف فاصله متوازن یالی ظریف با قطر d باشد، آنگاه $d - 1 \leq \gamma'_G$.

اثبات: مسیری به‌صورت $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{d-1}, x_d$ را در گراف G در نظر می‌گیریم. همچنین دنباله‌ای از یال‌های این گراف را به‌صورت $e_1, e_2, e_3, \cdots, e_d$ در نظر می‌گیریم به‌طوری که $d'_G(e_1, e_d) = d$. اکنون اگر $e_1 = x_0\, x_1$ را یال دلخواهی در G در نظر بگیریم، آن‌گاه داریم:

$|\{e_2, \dots, e_d\}| = d - 1 \leq m_{x_1}(e) = \gamma'_G$.

قضیه۲-۳: اگر G یک گراف فاصله متوازن یالی ظریف باشد. آن‌گاه G رأس معلق ندارد.

اثبات: به برهان خلف است. اگر فرض کنیم x یک رأس معلق در G باشد، پس $deg(x)$=1. حال فرض کنیم u رأس مجاور به x باشد به‌طوری که $deg(u) > 1$. یال دلخواه $e = ux$ را در نظر می‌گیریم، آن‌گاه $m_x(e) = 0$ و $m_u(e) \neq 0$ که با تعریف گراف فاصله متوازن یالی ظریف در تناقض است.

لم۱-۲: درخت یک گراف فاصله متوازن یالی ظریف نیست.

اثبات: با توجه به قضیه ۳-۲ حکم بدیهی است.

حال، فرض کنید u و v دو رأس مجاور از گراف G باشد به‌طوری که $e = uv$، داریم:

$M_i(u) = |\{e' \in E(G) | d(e', u) = i\}|$ و

$$M_i[u] = |\{e' \in E(G) | d(e', u) \leq i\}|.$$

بدیهی است که اگر $i = 1$ آنگاه $M(u) = M[u]$.

قضیه۲-۴: گراف G با قطر d گراف فاصله متوازن یالی باشد اگر و فقط اگر برای دو رأس مجاور u , v در G داشته باشیم:

$$M[u] \backslash M[v] + \Sigma_{i=2}^{d+1} M_i(u) \backslash M_{i-1}(v) = M[v] \backslash M[u] + \Sigma_{i=2}^{d+1} M_i(v) \backslash M_{i-1}(u)$$

اثبات: فرض کنیم G یک گراف فاصله متوازن یالی باشد، پس برای هر دو رأس مجاور u , v در G، داریم:

$$m_u(e) = m_v(e)\ .$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$m_u(e) = |\{e'\}| + \Sigma_{i=1}^{d+1} D'^{i}_{i+1}(e).$$

برای هر $i \geq 1$ داریم:

$$D'^{i}_{i+1}(e) = (M_i(u) \backslash M_i(v))\ .$$

که برای هر $i \geq 2$، داریم: $M(u) \backslash M[v] = m[u] \backslash M[v]$

با محاسبات بیشتر خواهیم دید که:

$$D'^{i+1}_{i}(u,v) = (M_i(u) \backslash M_i[v]) = (M_i(u) \backslash M_{i-1}(v)) \backslash (M_i(u) \cap M_i(v)).$$

حال داریم:

$$D'^{i+1}_{i}(u,v) = (M_i(u)\backslash M_i[v]) = \big(M_i(u)\backslash M_{i-1}(v)\big)\backslash \big(M_i(u)\cap M_i(v)\big).$$

$$m_u(e) = |\{e\}| + |M[u]\backslash M[v]| + \Sigma_{i=2}^{d+1}([M_i(u)\backslash M_{i-1}(v)] \setminus [M_i(u)\cap M_i(v)]).$$

همچنین با استدلالی مشابه، نتیجه مشابهی برای $m_v(e)$، به‌دست می‌آید. از آن‌جایی که $[M_i(u)\cap M_i(v)]$ یک زیر مجموعه‌ای از $M_i(u)\backslash M_{i-1}(v)$ و $M_i(v)\backslash M_{i-1}(v)$ است، آنگاه $m_u(e) = m_v(e)$، اگر و فقط اگر

$$|M[u]\backslash M[v]| + \Sigma_{i=2}^{d+1}|M_i(u)\backslash M_{i-1}(v)| = |M[v]\backslash M[u]| + \Sigma_{i=2}^{d+1}|M_i(v)\backslash M_{i-1}(u)|.$$

حکم ثابت شد.

قضیه ۲-۵: اگر G یک گراف منتظم با قطر d باشد، آن‌گاه G یک گراف فاصله متوازن یالی است اکر و فقط اگر برای هر یال $e = uv$ در G، داریم:

$$\Sigma_{i=2}^{d+1}|M_i(u)\backslash M_{i-1}(v)| = \Sigma_{i=2}^{d+1}|M_i(v)\backslash M_{i-1}(u)|.$$

اثبات: از قضیه ۴-۲ بدیهی است.

قضیه ۲-۶: اگر G یک گراف با قطر d=2 باشد. G یک گراف فاصله متوازن یالی است اگر و فقط اگر G یک گراف منتظم باشد.

اثبات: به کمک قضیه‌های ۴-۲ و ۵-۲ حکم ثابت می‌شود.

قضیه ۲-۷: اگر G یک گراف فاصله متوازن یالی ظریف با قطر d≤2 باشد، آنگاه G یک گراف منتظم است. علاوه بر آن داریم:

$$deg(G) - 1 \le \gamma'_G.$$

اثبات: فرض می کنیم G یک گراف فاصله متوازن یالی ظریف باشد آنگاه یک G گراف فاصله متوازن یالی هست. بنا بر قضیه ۶-۲، G یک گراف منتظم است. بدون این‌که به برهان خللی وارد شود می‌توانیم حالات زیر را در نظر گرفت:

حالت اول: اگر d=1 فرض شود. به کمک تعریف، تنها مجموعه‌های ناتهی $D'^2_1(e)$ و D'^1_2 (e) هستند. از آن‌جایی که گراف G فاصله متوازن یالی ظریف است، پس:

$$\left|D'^2_1(e)\right| = \left|D'^1_2(e)\right| = deg(G) - 1,$$

تساوی رابطه برقرار است.

حالت دوم: اگر $d = 2$ باشد. پس برای هر یال $e = uv$ در G،

داریم:

$$m_u(e) = |D'^1_2(e)| + |D'^2_3(e)| = \gamma'_G$$

به‌طوری که برای هر $2 \le i \le (d+1)$، داریم $|D'^{i-1}_i(e)| > 0$ و بقیه مجموعه‌ها، تهی هستند. بدیهی است که $|D'^1_2(e)| = deg(u) - 1$، نامساوی برقرار است.

به‌طوری که برای هر $2 \le i \le (d+1)$، داریم $|D'^{i-1}_i(e)| > 0$ و بقیه مجموعه‌ها، تهی هستند. بدیهی است که $|D'^1_2(e)| = deg(u) - 1$، نامساوی برقرار است.

عکس قضیه فوق برقرار نمی‌باشد. می‌توان از گراف‌های پترسن توسعه‌یافته $GP(9,3)$ و $GP(6,2)$ به‌عنوان مثال نقض نام برد که هر دو گراف‌های منتظم بوده ولی فاصله متوازن یالی نیستند.

۳- خاصیت فاصله متوازن یالی ظریف در بعضی از خانواده‌های گراف‌ها

در این بخش، سعی شده تا در برخی از خانواده‌های گراف‌ها، فرمول دقیقی برای یافتن عدد صحیح مثبت γ'_G و نحوه محاسبه تعداد یال‌هایی که از دو رأس u و v به یک فاصله‌اند، ارایه شود.

۳-۱- خانواده گراف‌های کامل

در این بخش با کمک خواص گراف‌های کامل K_n عدد γ'_G را در این خانواده می‌یابیم.

قضیه ۳-۱: اگر G یک گراف کامل باشد، آن‌گاه G یک گراف فاصله متوازن یالی ظریف است و $\gamma'_G = n - 2$. همچنین مجموع تعداد یال‌های متساوی‌الفاصله از دو رأس u و v از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\textstyle\sum_{i=2}^{d+1} |D'^i_i(e)| = (n-3)(n-2)/2.$$

اثبات: اگر $G = K_n$ باشد، آن‌گاه $d = 1$ و

$$\deg(G) = n - 1$$

فرض کنیم $e = uv$ یال دلخواهی باشد و G یک گراف منتظم باشد، آنگاه:

$$\deg(u) - 1 = \left|D'^1_2(e)\right| = \left|D'^2_1(e)\right| = deg(v) - 1 = n - 2 = \gamma'_G.$$

با جای‌گذاری در رابطه قضیه ۱-۲، تعداد یال‌هایی که از دو رأس u و v به یک فاصله است برابر $(n-3)(n-2)/2$. حکم ثابت شد.

۳-۲- خانواده گراف‌های دوبخشی:

در قدم بعدی، ابتدا به یافتن عدد ثابت γ'_G در گراف‌های دوبخشی کامل و تعداد یال‌های متساوی‌الفاصله را در این نوع گراف مورد بررسی قرار می‌دهیم [۱۰،۱۱].

قضیه ۳-۲: اگر G یک گراف دو بخشی کامل $K_{n,n}$ باشد، آنگاه G یک گراف فاصله متوازن یالی ظریف با $\gamma'_G = n-1$ است. علاوه‌بر این،

$$\sum_{i=2}^{d+1} |D'^{i}_{i}(e)| = (n-1)^2.$$

اثبات: فرض کنیم $G = K_{n,n}$ یک گراف n- منتظم باشد با $|V(G)| = 2n,\ |E(G)| = n^2$ و قطر گراف ۲ است. اگر $e = uv$ هر یال دلخواهی در گراف G باشد، آنگاه u و v باید دو رأس یک گراف دو بخشی کامل باشند که به دو مجموعه جدا از هم متعلق‌اند. پس:

$$|D'^{1}_{2}(e)| = |D'^{2}_{1}(e)| = \gamma'_G = n-1.$$

باز هم با جای‌گذاری در قضیه ۱-۲، تعداد یال‌هایی که از دو سر یال e به یک فاصله‌اند برابر $(n-1)^2$ است. حکم ثابت شد.

با توجه به قضیه قبل، شرط کامل بودن گراف، شرط لازم است و اگر حذف شود گراف دو بخشی غیر منتظم بوده و شرایط فاصله متوازن یالی ظریف را نخواهیم داشت.

۳-۳- خانواده گراف‌های دور

اکنون خانواده گراف‌های دور روی n رأس را بررسی می‌کنیم:

قضیه ۳-۳: فرض کنیم G را یک گراف دور روی n رأس، باشد. آنگاه G یک گراف فاصله متوازن یالی ظریف با $\gamma'_G = k-1$ است. همچنین برحسب زوج بودن یا فرد بودن n، مجموع تعداد یال‌های متساوی‌الفاصله از دو رأس u و v به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Sigma_{i=2}^{d+1}|D'^{i}_{i}| = 0 \text{ یا } 1.$$

اثبات: فرض کنیم $G = C_n$ یک گراف دور روی n رأس و n یال باشد و فرض کنیم که $e = uv$ هر یال دلخواهی در G باشد. آنگاه دو حالت اتفاق می‌افتد:

حالت اول: فرض کنیم $n = 2k-1$ هر عدد فرد دلخواهی باشد. آنگاه $(2k-2)$ به‌جز e یال در G داریم که چون G یک گراف فاصله متوازن یالی ظریف است پس دقیقا $(2k-2)/2$ یال داریم که به u نزدیک‌تر است تا v و دقیقا تعداد $(2k-2)/2$ یال وجود دارد که به v نزدیک‌تر از u است.

بنابراین:

$$\Sigma_{i=2}^{d+1}|D'^{i-1}_{i}| = \Sigma_{i=2}^{d+1}|D'^{i}_{i-1}|$$
$$= \gamma'_G = k-1.$$

در نتیجه داریم: $\Sigma_{i=2}^{d+1}|D'^{i}_{i}| = 0$.

حالت دوم: فرض کنیم $n = 2k$ هر عدد زوج دلخواهی باشد. آنگاه به‌جز یال دلخواه e، تعداد $(2k-1)$ یال و جود دارد که چون گراف G یک گراف فاصله متوازن یالی ظریف است پس دقیقا $(2k-2)/2$ یال داریم که به u نزدیک‌تر است تا به v و همچنین $(2k-2)$ /2 یال داریم که به v نزدیک‌تر از u است. از طرف دیگر فقط یک یال داریم که از هر دو رأس مورد نظر به یک فاصله باشد. پس $\gamma'_G = k-1$. اثبات تمام است.

۳-۴- خانواده گراف‌های چند بخشی

در این بخش، ابتدا روی گراف‌های چند بخشی کامل که به‌صورت $K_{p\times q}$ نمایش داده می‌شود، مطالعه می‌شود. مجموعه رئوس این گراف‌ها شامل p مجموعه جدا از هم هستند که در هر مجموعه فقط q تا رأس وجود دارد و شرط مجاورت هر دو رأس در این گراف آن است که به یک مجموعه متعلق نباشند. مجددا، شرط کامل بودن شرط لازم محسوب می‌شود و در صورت حذف آن، گراف نامنتظم شده و شرایط گراف فاصله متوازن یالی ظریف را نخواهیم داشت [۱۲،۱۳].

قضیه ۳-۴-: اگر گراف $k_{p\times q}$ =G. را یک گراف چند بخشی کامل فرض کنیم. آن‌گاه G یک گراف فاصله متوازن ظریف با $\gamma'_G = q(p-1)-1$ است. علاوه‌بر آن

$$\Sigma_{i=2}^{d+1}|D'^{i}_{i}(e)| =$$
$$\Sigma_{m=2}^{\frac{pq}{2}} q(pq-2m) - 2q(p-1) - 3.$$

اثبات: حکم به استقرا روی q به‌دست می‌آید.

فرض کنیم $q = 2$. آن‌گاه $G = K_{p\times 2}$ یک گراف p بخشی $(2p-2)$- منتظم با قطر گراف ۲ خواهد بود. برای هر یال $e = uv$ داریم:

$$deg(u) - 1 = |D'^{1}_{2}(e)| = \gamma'_G = |D'^{2}_{1}(e)|$$
$$= deg(v) - 1.$$

در نتیجه گراف G یک گراف فاصله متوازن یالی ظریف است پس $\gamma'(G) = 2p-3$. چون $d = 2$ است بقیه یال‌ها از دو سر یال e به یک فاصله‌اند. از آن‌جایی که تعداد یال‌ها در گراف G برابر $2p(p-1)$ است. با قرار دادن در رابطه قضیه ۱-۲، خواهیم

داشت: $\left|D'^{i}_{i}(\mathrm{e})\right| = 2p^2 - 6p + 5$. اکنون فرض می‌کنیم $q = 3$. آنگاه $G = K_{p\times 3}$ یک گراف p بخشی کامل و $(3p-3)$ منتظم با قطر ۳ است. بنابراین، داریم: $\gamma'_G = 3p - 4$. همچنین، $|E(G)| = 9p(p-1)/2$ که با استفاده از قضیه ۱-۲، نتیجه حاصل خواهد شد. اکنون، فرض می‌کنیم که حکم برای $q-1$ برقرار باشد. حال، حکم را برای q ثابت می‌کنیم. اگر گراف $G = K_{p\times q}$ باشد بدیهی است که یک گراف $q(p-1)$- منتظم است که در هر p مجموعه جدا از هم دقیقا q تا رأس دارد. فرض می‌کنیم $e = uv$ یک یال دلخواه در G باشد. آنگاه رأس u با تمام رئوس در G، بجز $q-1$ رأس که با u در یک مجموعه هستند، مجاور است. پس $\gamma'_G = q(p-1) - 1$ است و باقی یال‌ها در G در D'^2_2 قرار دارند. حکم ثابت شد.

۳-۵- خانواده گراف‌های پترسن توسعه‌یافته

در این بخش، به معرفی گراف‌های پترسن توسعه‌یافته می‌پردازیم. فرض کنیم $n \geq 3$ عدد صحیح و مثبت و $k \in \{1,2,\cdots,n-1\} - \{n/2\}$ است. گراف پترسن توسعه‌یافته GP(n,k) به‌صورت:

$$V\big(GP(n,k)\big) = \{u_i | i \in Z_n\} \cup \{v_i | i \in Z_n\},$$

$$E(GP(n,k)) = \{u_i u_{i+1} | i \in Z_n\} \cup \{v_i v_{i+k} | i \in Z_n\} \cup \{u_i v_i | i \in Z_n\}.$$

تعریف می‌شود.

قضیه ۳-۵: گراف پترسن توسعه‌یافته GP(n,1) یک گراف فاصله متوازن یالی ظریف است اگر و فقط اگر $n \in \{3,4\}$.

اثبات: اگر $n = 3$ یا $n = 4$ فرض شود، بدیهی است که گراف مورد نظر یک گراف فاصله متوازن یالی است. برعکس، اگر $G = GP(n,1)$ در نظر می‌گیریم. با استفاده از تعریف گراف‌های پترسن توسعه‌یافته، سه نوع یال داریم: ۱) یال‌های متعلق به دور بیرونی گراف، ۲) یال‌های متعلق به دور درونی گراف، ۳) یال‌های میانی که یال‌های دور بیرونی به دور درونی را به هم وصل می‌کنند. بدیهی است در این گراف یال‌های متعلق به دسته اول و دوم با هم ایزومرف هستند. پس کافی است که برهان را با در نظر گرفتن دو حالت ادامه می دهیم.

حالت ۱: اگر $n \neq 1$ عدد فرد دلخواهی باشد و فرض می‌کنیم که $e = uv$ هر یال دلخواهی متعلق به دور بیرونی (درونی) باشد. آنگاه فقط دو یال وجود دارند که از دو رأس u و v به یک فاصله هستند که یکی از این رئوس متعلق به دور بیرونی (درونی) بوده و دیگری متعلق به یال‌های میانی است. بنابراین، همیشه $\Sigma_{i=2}^{d+1}\left|D'^{i}_{i}(e)\right| = 2$ با استفاده از قضیه ۱-۲، داریم: $\gamma'_G = (3n-3)/2$. حکم ثابت شد. حال فرض می‌کنیم $e = uv$ یک یال میانی باشد. آنگاه تمام یال‌های میانی موجود در G، به‌جز e از دو رأس u و v به یک فاصله‌اند. پس $\Sigma_{i=1}^{d+1}\left|D'^{i}_{i}\right| = n-1$. دوباره با کمک قضیه ۱-۲، خواهیم داشت: $\gamma'_G = n$. از آن‌جایی که گراف G یک گراف فاصله متوازن یالی ظریف باشد، پس باید این دو مقدار به‌دست‌آمده برای γ'_G باید باهم برابر باشند، در نتیجه $n = 3$.

حالت ۲: اگر $n \neq 2$ را هر عدد زوج دلخواهی در نظر بگیریم. اگر $e = uv$ متعلق به دور بیرونی (درونی) باشد، آنگاه دو یال وجود دارد که که یکی متعلق به دور بیرونی و دیگری متعلق به دور درونی بوده و از دو رأس u و v به یک فاصله باشد. پس همواره داریم: $\Sigma_{i=1}^{d+1}\left|D'^{i}_{i}\right| = 3$ با استفاده قضیه ۱-۲، داریم: $\gamma'_G = (3n-4)/2$. سپس یال $e = uv$ به‌عنوان یک یال میانی در نظر می‌گیریم. تمام یال‌ها به‌جز e از دو رأس u و v به یک فاصله‌اند. پس $\Sigma_{i=1}^{d+1}\left|D'^{i}_{i}\right| = n-1$. مجدد با جای‌گذاری در رابطه به‌دست‌آمده از قضیه ۱-۲، داریم: $\gamma'_G = n$. از آن‌جایی که G یک گراف فاصله متوازن یالی ظریف است، دو مقدار به‌دست‌آمده برای γ'_G، باید باهم برابر باشند، در نتیجه $n = 4$.

۴- رده‌بندی گراف‌های فاصله متوازن یالی ظریف

در این بخش، هدف اصلی رده‌بندی گراف‌ها برحسب γ'_G است. در این راستا، به تعداد زیادی از خانواده از گراف‌های مهم و مطرح پرداخته شده است [۱۴].

قضیه۴-۱: گراف G یک گراف فاصله متوازن یالی با $\gamma'_G = 1$ است اگر و فقط اگر یکی از حالات زیر رخ دهد:

۱)گراف کامل $K_3 \cong$ گراف جانسون J(3,1)

۲)گراف دور C_4

اثبات: فرض کنیم $d \neq 0$ قطر گراف G باشد. به کمک قضیه ۲-۲، رابطه $d - 1 \leq \gamma'_G = 1$. پس خواهیم داشت: d≤2. بنابراین، دو حالت رخ می‌دهد: $d = 1, d = 2$.

حالت اول: اگر $d = 1$ فرض باشد، آنگاه G یک گراف کامل است. در نتیجه $\gamma'_G = 1$ است. برای هر یال دلخواه $e = uv$ در G، داریم:

$$\left|D'^{2}_{1}(e)\right| = \left|D'^{1}_{2}(e)\right| = 1$$

پس دو یال دیگر مانند $e', e'' \in E(G)$ وجود دارند به‌طوری که این دو یال تنها اعضای دو مجموعه فوق هستند که باهم مجاور می‌باشند. پس G یک گراف دور روی سه رأس است یعنی حالت اول ثابت شد. جانسون گراف J(3,1) هم گرافی است که با K_3 ایزومرف است.

حالت دوم: فرض کنیم $d = 2$ قطر گراف G باشد در این صورت دو یال موجود باهم مجاور نخواهند بود. پس یال دیگری به نام $e_1 \in E(G)$ وجود دارد که همزمان با e', e'' مجاور است. پس یک گراف دور روی چهار رأس داریم. حکم ثابت شد.

قضیه ۴-۲: گراف G یک گراف فاصله متوازن یالی ظریف با $\gamma'_G = 2$ است اگر و فقط اگر یکی از حالات زیر رخ دهد:

۱)گراف کامل $K_4 \cong$ گراف جانسون J(4,1)

۲)گراف دور $C_5 \cong$ گراف ۵-پلی ،

۳)گراف کامل دو بخشی $K_{3,3}$،

۴)گراف دور C_6 .

اثبات: ابتدا حالات ممکن را برای حالتی که $\gamma'_G = 2$ ، مورد بررسی قرار می‌دهیم. اگر $d \neq 0$ قطر گراف G باشد آنگاه به کمک قضیه ۲-۲ داریم $d - 1 \leq \gamma'_G = 2$. بنابراین، d ≤3 باشد. اکنون، حالات ممکن را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: اگر $d = 1$ فرض شود، آنگاه G یک گراف کامل روی n رأس است. سپس بر طبق قضیه ۱-۳ داریم $\gamma'_G = n - 2$. از طرف دیگر، داریم: $\gamma'_G = 2$، با مساوی قرار دادن دو مقدار به‌دست‌آمده برای γ'_G داریم n=4. در این صورت گراف G را می‌توان $K_4 \cong J(4,1)$ در نظر گرفت.

حالت دوم: اگر $d =$ ۲ فرض شود آن‌گاه دو حالت رخ می‌دهد.

اگر $D'^2_2(\mathrm{e}) = \phi$ را در نظر بگیریم.

زیر حالت ۱: فرض می‌کنیم که $D'^3_3(e) = \phi$. آنگاه $\Sigma_{i=2}^{d+1}|D'^i_i(e)| = 0$. با جای‌گذاری در رابطه قضیه ۱-۲ تعداد یال‌ها در گراف G عدد ۵ است. از آن‌جایی که $\gamma'_G = 2$ است می‌توان دو فرضیه زیر را در نظر گرفت. اول این‌که همه مجموعه‌ها به‌جز:

$$|D'^2_1(e)| = |D'^1_2(e)| = 2$$

بقیه همه تهی هستند. آنگاه ما یک درخت روی ۶ رأس داریم و با لم 1-2 گراف G، یک گراف فاصله متوازن یالی نیست که یک تناقض است. دومین فرضیه این است که حالت‌های

$$|D'^2_1(e)| = |D'^1_2(e)| = 1 \quad \text{و}$$

$$|D'^2_3(e)| = |D'^3_2(e)| = 1$$

را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم همه یال‌ها در مجموعه‌های $D'^2_2(e)$ و $D'^2_3(e)$ باید باهم مجاور باشند. پس یک گراف دور روی ۵ رأس (C_5) که یک گراف ۵-پلی است.

زیر حالت۲: فرض کنیم $|D'^3_3(\mathrm{e})| = 1$.

آنگاه با حالات مطرح‌شده، فقط می‌توان گراف دور روی ۶ رأس (C_6) را در نظر گرفت، که $\gamma'_G = 2$ است. اما $d = 3$ که با قطر گراف $d = 2$ متناقض است.

زیر حالت ۳: فرض کنیم $|D'^3_3(\mathrm{e})| \geq 2$. آنگاه داریم:

$$|D'^2_1(\mathrm{e})| = |D'^1_2(\mathrm{e})| = 1 \text{ و}$$

$$|D'^3_2(\mathrm{e})| = |D'^2_3(\mathrm{e})| = 1.$$

تحت شرایط فوق به یک گراف با یال‌های چند گانه دارد که یک تناقض است.

حالت ۲ : $D'^2_2(\mathrm{e}) \neq \phi$.

زیر حالت ۱: فرض کنیم

$$|D'^2_2(\mathrm{e})| = 1 \text{ و } D'^3_3(\mathrm{e}) = \phi$$

فرض اول آن‌که $|D'^2_1(e)| = |D'^1_2(e)| = 2$ باشد که در این صورت گراف مورد نظر غیر منتظم است. پس تناقض رخ می‌دهد. فرض دوم آن‌که

$$|D'^2_1(e)| = |D'^1_2(e)| = 1 \text{ و}$$

$$|D'^3_2(e)| = |D'^2_3(e)| = 1$$

که باز هم گراف مورد نظر نامنتظم است.

زیر حالت ۲: فرض کنیم $|D'^2_2(e)| = 2$ و $D'^3_3(\mathrm{e}) = \phi$. اگر یال دلخواه $e = uv$ را در گراف G در نظر بگیریم به‌طوری که $|D'^2_1(e)| = |D'^1_2(e)| = 2$

آن‌گاه گراف G یک گراف غیر منتظم است. همچنین می‌توان فرض کرد:

$$|D'^3_2(\mathrm{e})| = |D'^2_3(\mathrm{e})| = 1 \quad \text{و}$$

$$|D'^2_1(e)| = |D'^1_2(e)| = 1$$

باشد. آن‌گاه به گرافی با یال‌های چندگانه می‌رسیم که متناقض با ساده بودن گراف G است .

زیر حالت ۳: فرض کنیم $|D'^2_2(e)| = 3$ و $D'^3_3(\mathrm{e}) = \phi$ باشد. اگر برای هر یال دلخواه مانند $e = uv$ داشته باشیم: $|D'^2_1(e)| = |D'^1_2(e)| = 2$، آنگاه دو یال متمایز دیگر را در G به‌صورت e_1, e_2 که با رأس u مجاور هستند و دو یال دیگر به نام‌های e_3, e_4 وجود دارند که با رأس v مجاورند، را در نظر می‌گیریم. بنابراین، $\deg(u) = \deg(v) = 3$. چون $|D'^2_2(e)| = 3$ پس نتیجه می‌گیریم سه یال e', e'', e''' وجود دارد که e' با دو یال e_1, e_3 مجاور بوده و e'' با دو یال e_2 و e_4 مجاور است و در

آخر یال e''' باید یک یال چند گانه باشد. بنابراین، منتظم بودن گراف G منتفی است که با فرض فاصله متوازن یالی بودن گراف G متناقض است.

زیر حالت ۴: فرض کنیم $\left|D'^2_2(e)\right| = 4$ و $D'^3_3(\mathrm{e}) = \phi$. آنگاه یک یال بین دو رأس e_2 و e_3 اضافه می‌کنیم. بنابراین، تمام رئوس در گراف دارای درجه ۳ هستند. پس گراف منتظم است. بنابراین، در این شرایط گرافی با ۹ رأس و ۶ یال داریم به‌طوری که برای آن‌که شرایط منتظم بودن هم رعایت شود باید $G = K_{3,3}$ باشد.

حال، فرض کنیم $D'^3_3(e) \neq \phi$ باشد. ابتدا اگر $\left|D'^3_3(e)\right| = 1$ فرض شود. تنها حالت ممکن برای چنین شرایطی گراف $GP(4,1)$ است. که در این گراف می‌توان به راحتی دید که:

$$|D'^2_1(\mathrm{e})| = |D'^1_2(\mathrm{e})| = 2 \qquad \text{و}$$

$\left|D'^3_2(e)\right| = \left|D'^2_3(e)\right| = 2$ و $\left|D'^2_2(e)\right| = 2$ است. با توجه به قضایای ۷-۲ و ۴-۳ حکم اولیه نقض می‌شود. اگر d=3 باشد، آنگاه می‌توان حالات زیر را در نظر گرفت:

حالت اول: $D'^2_2(\mathrm{e}) = \phi$.

از آن‌جایی‌که $\gamma'_G = 2$ است. می‌توانیم فرض کنیم که $D'^3_3 = \phi$. پس $\Sigma_{i=2}^{d+1}|D'^i_i(\mathrm{e})| = 0$ پس دو زیر حالت رخ می‌دهد:

زیر حالت ۱: ابتدا فرض می‌کنیم:

$|D'^2_1(\mathrm{e})| = |D'^1_2(\mathrm{e})| = 2$ باشد. پس دو یال موجود در این مجموعه باهم مجاورند. بنابراین، تحت این فرضیه، یک گراف نامنتظم وجود دارد که این یک تناقض با فرض متوازن یالی بودن گراف G است.

زیر حالت ۲: حال فرض می‌کنیم:

$$|D'^2_1(\mathrm{e})| = |D'^1_2(\mathrm{e})| = 1 \qquad \text{و}$$
$$\left|D'^3_2(e)\right| = \left|D'^2_3(e)\right| = 1$$

باشند. در این شرایط یک گراف دور روی ۶ رأس داریم. حال فرض می‌کنیم $D'^3_3(\mathrm{e}) \neq \phi$ باشد. اگر ابتدا $\left|D'^3_3(e)\right| = 1$ در نظر بگیریم. با شرایط فوق، مجددا یک گراف دور روی ۶ رأس داریم.

حالت ۲: $|D'^2_2(\mathrm{e})| = 1$ و $D'^3_3(\mathrm{e}) = \phi$. ابتدا فرض می‌کنیم که $\left|D'^2_1(e)\right| = \left|D'^1_2(e)\right| = 2$ باشد. با این شرایط یک گراف نامنتظم خواهیم داشت.

دوم آن‌که فرض کنیم:

$$\left|D'^2_1(e)\right| = \left|D'^1_2(e)\right| = 1 \qquad \text{و}$$
$$\left|D'^3_2(e)\right| = \left|D'^2_3(e)\right| = 1،$$

پس گرافی داریم که دارای دو رأس با درجه ۳ و دو رأس با درجه ۲ و دو رأس با درجه ۱ خواهیم داشت که مجددا گراف نامنتظم است که متناقض با فرض گراف فاصله متوازن یالی ظریف است. حکم ثابت شد.

۵- نتیجه‌گیری

ما پس از بیان تعریف گراف‌های فاصله متوازن یالی ظریف، متوجه شدیم که گراف‌هایی که این خاصیت را دارا هستند ویژگی‌های جالب دیگری هم دارند. در ضمن تعداد گراف‌هایی که با این تعریف مطابق بوده یا نبوده‌اند، زیاد است. به عبارت ساده‌تر، شرایط فاصله متوازن یالی ظریف در کل گراف‌های یک خانواده از گراف‌ها صادق نبود. این استثناءها باعث شد تا به بررسی بسیاری از این شرایط ترغیب شویم. ضمنا رده‌بندی برای گراف‌هایی با $\gamma'_G \geq 2$ نیاز به شرط دیگری دارد که در تحقیقات بعدی انجام شده است.

۶- مراجع

[1] D. B. West, “Introduction to Graph Theory,” Prentice Hall, Upper Saddle River, 2001.

[2] A. Ilic, S. Klavzar, and M. Milonovic, “On Distance-Balanced Graphs,” J. Aust. Math. Soc., vol. 76, pp. 39–49, 2004.

[3] J. Jerebic, M. Klavzar, and D. F. Rall, “Distance-Balanced Graphs,” University of Maribor Kroska C esta, vol. 160, 2000.

[4] M. Tavakoli and H. Yousefi-azari, “Remarks on Distance-Balanced Graphs,” Iranian Journal of Mathematical Chemistry, vol. 2, no. 2, pp. 67–71, 2011.

[5] K. Kutnar, A. Malnic, D. Marusic, and M. Miklavic, “Distance Balanced Graph, “Symmetry Conditions,” Discrete Mathematics, vol. 306, pp. 1881–1894, 2006.

[6] K. Kutnar and S. Miklavic, “Nicely Distance-Balanced Graphs,” European Journal of Combinotrics, vol. 39, pp. 57–67, 2014.

[7] M. Tavakoli, H. Yousefi-azari, and A. R. Ashrafi, “Note on Edge Distance-Balanced Graphs,” Transaction on Combinotrics, University of Isfehan, vol. 01, no. 1, pp. 1–6, 2012.

[8] K. Balakrishnan, M. Changat, I. Peterin, S. Spacapan, “Strongly Distance-Balanced Graph and Graphs Products,” European Journal of Combinotrics, vol. 30, pp. 1048–1053, 2009.

[9] K. Fukuda and K. Handa, “Antipodal graphs and oriented matroids,” Discrete Math., vol. 111, pp. 245--256, 1993.

[10] K. Handa, “Bipartite graphs with balanced (a,b)-partitions,” Ars Combin., vol. 51, pp. 113–119, 1993.

[11] S. Miklavic and P. Sparl, “On the Connectivity of Bipartite Distance- balanced Graphs,” European J. Combin., vol. 33, pp. 237–247, 2012.

[12] R. Yang, R. X. Hou, N. Li, and W. Zhong, “A Note on The Distance Balanced Property of Generalized Petersen Graphs,” Electron. J. Combin., vol. 16, no.1, Note 33, 2009.

[13] W. Imrich and S. Klavzar, “Product Graph: Structure and Recognition,” J. Wiley Sons, New York, 2000.

[14] L. Kovac, K. Kutnar, D. Marusic, and S. Wilson, “Classification of Cubic Symmetric Tricirculants,” Electron. J. Combin., vol. 1, pp. 14 –24, 2012.