مجله علمی- پژوهشی "پدافند الکترونیکی و سایبری"

ویژه‌نامه ترکیبیات، رمزنگاری و محاسبات، ص ۱۰۶ -۱۰۳

گرافهای کیلی مکعبی یال– انتقالی غیر نرمال از مرتبه $14p^2$

زهرا صادری، مهدی علائیان*

۱- دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، واحد کرج ،دانشگاه آزاد اسلامی، کرج، ایران، ۲- استاد، دانشگاه علم وصنعت ایران

(دریافت: ۱۳۹۷/۰۸/۲۵ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۷/۰۲)

چکیده

گراف کیلی اولین بار توسط آرتور کیلی در سال ۱۸۷۸تعریف شد. این تعریف دارای دو منبع اصلی تاریخی است. نظریه گراف ها و نظریه گروه ها. بعد از آن مفاهیم مختلفی در این زمینه مطرح شد، از جمله مفاهیمی چون رأس – انتقالی، یال- انتقالی،کمان - انتقالی (متقارن) و همچنین نرمال بودن گراف های کیلی، اگر گروه خودریختی های گراف روی مجموعه رأس ها ، مجموعه یال ها، مجموعه کمان های گراف به طور انتقالی عمل کند، آنگاه گراف را به ترتیب یک گراف رأس – انتقالی، یال- انتقالی و کمان انتقالی (متقارن) می نامیم. گراف کیلی $X=Cay(G,S)$ ، یک گراف نرمال نامیده می شود، اگر $R(G)$ (نمایش منظم راست G)، یک زیرگروه نرمال از گروه خود ریختی های X باشد.گراف کیلی $X=Cay(G,S)$ نرمال یال – انتقالی نامیده می شود هرگاه گروه خودریختی آن دارای یک زیرگروهی باشد که روی یال ها به صورت انتقالی عمل کندو همچنین G در آن نرمال باشد. در این مقاله امکان وجود گراف های کیلی مکعبی یال- انتقالی از مرتبه $14p^2$ را مورد بررسی قرار می دهیم. (p عدد اول است)

واژه‌های کلیدی: گراف کیلی، گروه های خود ریختی ، گراف کیلی نرمال، نرمال یال- انتقالی

۱- مقدمه

فرض کنید X یک گراف باشد، در این صورت مجموعه رأس ها ، مجموعه یال ها، مجموعه کمان ها و گروه خود ریختی های گراف X را به ترتیب با نمادهای $V(X)$ ،$E(X)$ ، $A(X)$ و $Aut(X)$ نمایش می دهیم. اگر $Aut(X)$ روی $V(X)$، $E(X)$ و $A(X)$ انتقالی باشد، آنگاه X را به ترتیب یک گراف رأس – انتقالی، یال- انتقالی و کمان انتقالی (متقارن) می نامیم.

فرض کنید G یک گروه متناهی باشدو S یک زیرگروه از G باشد به طوری که شامل عضو همانی G یعنی 1_G نباشد. گراف کیلی $X=Cay(G,S)$ ، یک گراف جهت داراست و داریم $V(X)=G$ و $E(X)=\{(g,sg) \mid g\in G, s\in S\}$. فرض کنید $g\in G$ ، در این صورت جایگشت $R(g)$ روی G به صورت $x\to xg$ ، $x\in G$ تعریف می شود که در این صورت یک نمایش $R(G)=\{R(g) \mid g\in G\}$ یک نمایش منظم راست G نامیده می شود، $R(G)$ یک گروه جایگشتی یکریخت با G می باشد. گراف کیلی $X=Cay(G,S)$ ، یک گراف نرمال نامیده می شود، اگر $R(G)$ ، یک زیرگروه نرمال از گروه خود ریختی های X باشدو همچنین X همبند است اگر و فقط اگر $G=<S>$.

فرض کنید $u,v\in V(X)$ در این صورت یک یال بین دو رأس u و v در X را به صورت uv نمایش می دهیم. تمام همسایگی های u دررا با نماد $N_X(u)$ نمایش می دهیم، به طوری که یک مجموعه شامل تمام رأسهای مجاور u در X می باشد.

گراف $\tilde{X}$ را یک پوشش برای گراف X به همراه نگاشت تصویر $\rho:\tilde{X}\to X$ میگوییم هرگاه یک دو سویی $p:V(\tilde{X})\to V(X)$ چنان موجود باشد به طوری که $p|_{N_{\tilde{X}}(\tilde{v})}:N_{\tilde{X}}(\tilde{v})\to N_X(v)$ برای هر $v\in V(X)$ و $\tilde{v}\in p^{-1}(v)$ یک نگاشت پوشا باشد.

فرض کنید N یک زیرگروه از گروه $Aut(X)$ باشد، به طوری که N روی $V(X)$ انتقالی باشد. گراف خارج قسمتی X/N گرافی است که مجموعه Σ از N - مدارها در $V(X)$مجموعه رأس های آن است و دو رأس $B,C\in\Sigma$ در X/N مجاورند اگر و تنها اگر $u\in B$ و $v\in C$ چنان موجود باشند که $\{u,v\}\in E(X)$.

یک پوشش $\tilde{X}$ برای گراف X به همراه ρ منظم (K-

---

[1] رایانامه نویسنده مسئول alaeiyan@iust.ac.ir

پوشش) نامیده می شود اگر یک زیر گروه نیم منظم مانند K از گروه خود ریختی های $Aut(\tilde{X})$ چنان موجود باشد که X با یک گروه خارج قسمتی X/N یکریخت باشد و آن را با نماد h نمایش می دهیم. نگاشت خارج قسمتی $\tilde{X} \to \tilde{X}/K$ یک ترکیب از ρ و h می باشد. اگر K یک گروه دوری یا آبلی مقدماتی باشد، آنگاه $\tilde{X}$ یک پوشش دوری یا آبلی مقدماتی از X می باشد و اگر $\tilde{X}$ روی K همبند باشد، آنگاه $\tilde{X}$ یک گروه تبدیل پوششی نامیده می شود. یک فیبر از یک رأس یا یک یال یک پیش تصویر تحت ρ می باشد.

اگر یک خود ریختی از گراف $\tilde{X}$ هر فیبر را به یک فیبر ببرد آنگاه گوییم حافظ فیبر است.یک تبدیل پوششی هر فیبر را به خودش می برد. مجموعه ی تمام خود ریختی های حافظ فیبر تشکیل یک گروه می‌دهد که آن را گروه حافظ فیبر می نامیم.

یک s – کمان از گراف X ، یک $s+1$ – تایی مرتب $(v_0, v_1, \ldots, v_s)$ از رأس های X می باشد، به طوری که v_{i-1} با v_i $(1 \le i \le s)$ مجاور است و $v_{i-1} \neq v_{i+1}$. یک زیر گروه از گروه خود ریختی های گراف X ، s- منظم نامیده می شود هرگاه روی مجموعه s – کمان ها ی X به صورت منظم عمل کند. می توان نشان داد که هر گراف X که یال –انتقالی باشد ولی رأس – انتقالی نباشد حتما دو بخشی است، به طوری که دو قسمت از بخش ها یک مدار از $A = Aut(X)$ می باشند . علاوه بر این، اگر X منظم باشد این دو قسمت دارای مرتبه مساوی هستند. یک گراف یال- انتقالی که رأس – انتقالی نباشد را یک گراف نیم – متقارن می نامیم.

درمقاله [۱]، ثابت می شود که گراف کیلی $X = Cay(G,S)$ نرمال است اگر $R(G)$ یک زیر گروه نرمال از گروه خود ریختی های X باشد. مفهوم نرمال بودن گراف های کیلی که درمقاله [۱] معرفی شد بسیار مهم است، به عنوان مثال گراف کامل K_n نرمال است اگر و تنها اگر $n < 4$. علاوه بر این هر گراف کیلی یال – انتقالی که نرمال باشد، نرمال – یال انتقالی است. در مقاله [۲] این سوال بررسی شده است که : در مورد ساختار گراف های کیلی که یال – انتقالی هستند ولی نرمال یال- انتقالی نیستند چه می توان گفت؟

دکتر علا ئیان و همکارانش درمقالات [۳-۵] جواب های خاصی برای این سوال در مورد گراف های خارج قسمتی برای گروه های آبلی از مرتبه حداکثر پنج و گروههای دووجهی ارائه داده اند. در مقاله [۶]، گراف های دوری نرمال یال – انتقالی تعیین شده است. در این مقاله ما همه گراف های کیلی مکعبی یال- انتقالی از مرتبه $14p^2$ که نرمال یال – انتقالی نیستند را تعیین می‌کنیم.

نتیجه اصلی در این مقاله به صورت زیر است:

قضیه ۱-۱. همه گرافهای کیلی مکعبی یال- انتقالی همبند $X = Cay(G,S)$ ، روی گروه G همراه مجموعه S، از مرتبه $14p^2$ نرمال هستند. (p عدد اول است)

۲-گزاره های کاربردی

گزاره زیر یک گزاره مهم است:

گزاره ۲-۱. [۲] فرض کنید $X = Cay(G,S)$ یک گراف کیلی از گروه متناهی G با مجموعه S باشد. در این صورت X یک گراف نرمال یال- انتقالی است اگر و تنها اگر $Aut(G,S)$ روی S انتقالی باشد و اگر X غیر جهت دار باشد، در این صورت X یک گراف نرمال یال – انتقالی غیر جهت دار است اگر و تنها اگر $Aut(G,S)$ یا روی S انتقالی باشد یا دارای دو مدار در S باشد به طوری که یکی معکوس دیگری باشد.

برای اثبات قضیه اصلی به گزاره های زیر نیاز داریم:

گزاره ۲-۲. [۷] فرض کنید X یک گراف مکعبی متقارن و همبند باشد به طوری که $v \in V(X)$ و $A := Aut(X)$ در این صورت یک $(1 \le s \le 5)$ موجود است و X یک گراف s – منظم است به طوری که $|A_v| = 2^{s-1}.3$ ، $|A| = 2^{s-1}.3|X|$.

گزاره ۲-۳. [۸] فرض کنید X یک گراف مکعبی متقارن، G یک زیر گروه کمان- انتقالی از $Aut(X)$ و N یک زیر گروه نرمال از G باشند. اگر N دارای بیش از دو مدار روی $V(X)$ باشد، آنگاه N روی $V(X)$ نیم منظم است و X_N یک گراف A/N – متقارن و بنابراین متقارن است.

گزاره ۲-۴. [۹] فرض کنید X یک Z_n- پوشش همبند و یال – انتقالی از گراف هیوود F_{14} باشد، آنگاه $n = 3^k p^{e_1} \ldots p^{e_t}$ که $k = 0$ یا $k = 1$ و $t \ge 1$ و اعداد p_i ، $i = 1, \ldots, t$، اعداد اول متفاوت هستند، به طوری که $p_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$ و X متقارن است و با یک گراف کیلی نرمال $Cay(G,S)$ یکریخت است. علاوه بر این اگر ۷ با n کوپرایم باشد، در این صورت $G = < a,b \mid a^2 = b^{7n} = 1, aba = b^{-1} > \cong D_{14p^2}$ و $S = \{b, ba, b^{t+1}a\}$ و $(t^2 + t + 1 = 0 (\mathrm{mod}\, 7n))$ و X ۱- منظم است.

۳- اثبات قضیه ۱-۱

همان طور که در قسمت اول دیدیم هر گراف کیلی یال- انتقالی که نرمال باشد، نرمال یال – انتقالی است. بنابراین برای اثبات قضیه اصلی، کافی است گراف های کیلی مکعبی همبند غیر نرمال از مرتبه $14p^2$ را مشخص کنیم.

فرض کنید $X=Cay(G,S)$ گراف کیلی مکعبی یال- انتقالی همبند باشد و $A:=Aut(X)$. در این صورت X متقارن است و با توجه به گزاره ۲-۲ داریم: $|A|=2^s.3.7.p^2$ برای $1\le s\le 5$. ابتدا نشان می دهیم که A یک سیلو $p-$ زیر گروه $2p^2$ نرمال دارد. با توجه به گزاره ۲-۲ ، X ، s- منظم است برای $1\le s\le 5$ و $|A_v|=2^{s-1}$. بنابراین، $|A|=2^{s-1}.3|X|=2^s.3.7.p^2$ و با توجه به لم۳-۲ در مرجع [۱۰] برای یک عدد اول $p\ge 13$ ، چون X مکعبی و همبند است، X یک $Z_{p^2}-$ پوشش یا Z_p^2- پوشش منظم از گراف هیوود است، به طوری که گروه حافظ فیبر از X روی کمان ها انتقالی است.

برای Z_p^2-پوشش ها، با توجه به قضیه ۵ از مرجع [۲] گرافی که مد نظر است وجود ندارد. برای $Z_{p^2}-$ پوشش ها، فرض کنید که $C:=\xi_A(P)$. بنابراین $P\le C$.

اگر $P=C$: در این صورت $A/P\le Aut(P)=Z_{p\times(p-1)}$ و A/P آبلی است. بنابراین A/P روی X_P انتقالی است و در نتیجه رأس- انتقالی نیز می باشد. با توجه به گزاره ۲-۴ در مرجع [۱۲] ، A/P روی $V(X)$ منظم است. اما $|A/P|=14$ در نتیجه $|A|=14p^2$ ،

که این یک تناقض است . بنابراین نتیجه می گیریم که $P<C$. فرض کنید N/P یک زیرگروه نرمال مینیمال از A/P باشد بطوری که $N/P\subseteq C/P$، در این صورت داریم $N/P=K\times K\times\ldots\times K=K^t$ که K یک گروه آبلی یا یک گروه ساده غیر آبلی است. فرض کنید K آبلی نباشد، از آنجا که هرگروه ساده غیر آبلی دارای سه عدد اول است، بنابراین N/P دارای یک فاکتور از K است. این یعنی $t=1$. بنابراین $N/P=K$ یک گروه ساده غیر آبلی است. اگر $P=7$ آنگاه $|X|=2\times 7^3$ و با توجه به قضیه ۱- ۱ در مرجع [۸] ، X نرمال است.

اگر $p\ne 7$ با توجه به لم شور $N_1\le N$ ای موجود است به طوری که $N=P\times N_1$. بنابراین N_1 در N نرمال است و در نتیجه N_1 در A نرمال است و بنابراین N_1 یک زیر گروه ساده غیر آبلی است. با توجه به لم ۳-۲ در مرجع [۱۰] داریم: $N_1=PSL(2,3)$ یا $N_1=PSL(2,7)$، به طوری که در هر دو مورد N_1 بیشتر از دو مدار دارد. چون N_1 در A نرمال است، با توجه به گزاره ۲-۳ ، N_1 روی $V(X)$ نیم منظم است که این یک تناقض است. چون N/P یک گروه آبلی مقدماتی است ، پس روی $V(X_P)$ نیم منظم است (گزاره ۲-۳) و بنابراین $N/P=Z_2$ یا $N/P=Z_7$.

اگر $N/P=Z_2$ در این صورت با توجه به گزاره ۲-۳ داریم $|X_N|=7$ که این یک تناقض است ، زیرا گراف مکعبی با ۷ رأس وجود ندارد. بنابراین $N/P=Z_7$. در این صورت $N=Z_7\times P$ و $N\le C$. فرض کنید $H:=Z_7$ در اینصورت $H\lhd N\lhd A$ بنابراین $H\lhd A$. با توجه به گزاره ۲-۳ ، X یک $H-$ پوشش از گرافی از مرتبه $2p^2$ است به طوری که A/H روی X_N کمان انتقالی است. برای مرتبه $2p^2$، با توجه به گزاره ۲-۱ درمرجع [۱۳]، دو گراف کیلی متقارن موجود است که یکی روی D_{2p^2} ۱- منظم است و نرمال نیز می باشد و دیگری یک گراف روی گروه G از مرتبه $2p^2$ می باشد بطوری که سیلو $p-$ زیر گروه های آن دوری نیستند. بنابراین داریم:

$$A/H=Aut(Cay(D_{2p^2},S))=Aut(H).$$

درنتیجه A دارای یک زیر گروه نرمال مانند G می باشد، به طوری که G/H روی $V(X_H)$ منظم است. یعنی $G/H=D_{2p^2}$. بنابراین G روی $V(X)$ منظم است و $X=Cay(G,S)$، به طوری که $|S|=3$ و S دارای دو عنصر از مرتبه ۲ است. چون G در A نرمال است، پس X نرمال است و $Aut(G,S)$ روی S انتقالی است. بنابراین همه عناصر S دارای مرتبه ۲ می باشند. چون X همبند است پس G توسط سه عنصراز S که از مرتبه ۲ هستند، تولید می شود. داریم $G/H=D_{2p^2}$، بنابراین چون $H\le C$، پس $G=D_{14p^2}$ یا $G=D_{14p^2}.H$.

اگر $G=D_{14p^2}.H$، چون توسط یک عنصر از مرتبه ۲ تولید نشده است پس یک تناقض است. بنابراین با توجه به گزاره ۲-۴ ، $X=Cay(D_{14p^2},S)$ نرمال است و همه عناصر S دارای مرتبه ۲ هستند. k یکی از ریشه های معادله $X^2+X+1=0$ در Z_{7p^2} می باشد اگر وتنها اگر k یک عنصر از $Z^*_{7p^2}$ باشد، به طوری که $o(k)=3$. اما $Z^*_{7p^2}=Z_6\times Z_{p(p-1)}$ و بنابراین، $p-1\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$. اگر $p<13$ ، با توجه به لم ۳-۱ در مرجع [۱۰] ، X ۲ - منظم است و $X\cong F56B, F686$ یا ۳ - X منظم است و $X\cong F56C$ ، که با استفاده از نرم افزار ماگما [۱۴] ، کیلی نیستند.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله ابتدا به این نکته توجه شد که هر گراف کیلی یال- انتقالی که نرمال باشد، نرمال یال – انتقالی است. بنابراین برای اثبات قضیه اصلی، کافی بود که گراف های کیلی مکعبی همبند غیر نرمال از مرتبه $14p^2$را مشخص کنیم. برای این منظور روی مقادیر مختلف p بررسی های لازم را انجام دادیم که نهایتا به این نتیجه رسیدیم که همه گرافهای کیلی مکعبی یال- انتقالی همبند $X = Cay(G,S)$ ، روی گروه G همراه مجموعه S، از مرتبه $14p^2$ نرمال هستند.

۶- مراجع

[1] M.Y. Xu, "Automorphism groups and isomorphism of Cayley digraphs," Discrete Math, vol.182, pp. 309-319, 1998.

[2] E. Praeger, "Finite normal edge-transitive Cayley graph," Bull. Aust. Math. Soc., vol. 60, pp. 207-220.۱۹۹۹ ,

[3] M. Alaeiyan, H. Tavallaeeand , AA. Talebi, "Cayley graphs of abelian groups which are not normal edge-transitive," Vietnam journal of Mathematics, vol. 33, .p309, 2008.

[4] M. Alaeiyan , AA. Talebi, and K. Paryab, "Arc-transitive Cayley graphs of valency five on abelian groups," Southeast Asian Bull. Math, vol. 32, .pp1029-1035, 2008.

[5] M. Alaeiyan, S. Firouzian, and .MGhasemi ,"Nonnormal edge-transitive cubic Cayley graphs of dihedral groups," ISRN Algebra, 2011.

[6] H. S. Sim and Y. M . Kim, "Normal edge- transitive circulant graphs," Bulletin of Korean Mathematical Society, vol. 38, pp. 317-324 ,2001.

[7] W.T. Tutte, "Connectivity in graphs," Torento University Press.

[8] A. Malnic, D. Marusic, and C. Q. Wang, "Cubic Edge-transitive Graphs of Order 2p3," Discrete Math., vol. 274, pp. 187-198, 2004.

[9] C. Q. Wang and T. S. Chen, "Semisymmetric cubic graphs as regular covers of k_ {3,3}," Acta Mathematica Sinica, vol. 24, pp. 405-416 ,2008.

[10] M. Alaeiyan and M. Lashani, "Classification of cubic edge-transitive graphs of order 14p2," Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, vol. 41, pp. 277-282, 2012.

[11] P. Lorimer, "vertex-transitive graphs: Symmetric graphs of prime valency," J. Graph Theory, vol. 8, pp. 55-68, 1984.

[12] H. Wielandant , "Finite Permutation Groups," Acadamic Press, New York, 1964.

[13] J. X. Zhou and Y. T. Li , "Cubic non-normal Cayley graphs of order 4p2 ,Discrete Math., vol. 312, pp. 1940-1946, 2012.

[14] W. Bosma, C. Cannon, and C. Playoust, "The MAGMA algebra system I: the user languge," J. Symbolic Comput., vol. 24, pp. 235-265, 1997.