مجله علمی- پژوهشی "پدافند الکترونیکی و سایبری"
ویژه‌نامه ترکیبیات، رمزنگاری و محاسبات، ص ۱۴۴-۱۳۹

# محاسبات پایدار برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری با مشتق کاپوتو- فابریزیو با به کار بردن توابع پایه شعاعی مسطح و تقریب‌های منطقی برداری مقدار

حسین جعفری[1*]، بهشید فخرکاظمی[2]

۱- استاد، ۲- دانشجوی دکتری، دانشگاه مازندران

(دریافت: ۱۳۹۷/۰۸/۲۵ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۷/۰۲)

## چکیده

هدف از این مقاله یافتن جواب عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری با دقت بالا به کمک توابع پایه شعاعی می‌باشد. واضح است که روش عددی مستقیم با استفاده از توابع پایه شعاعی مسطح به طور شدیدی بدوضع می‌باشد. تاکنون روش‌های زیادی برای غلبه بر این بد وضعی بیان شده است. در اینجا روش توابع پایه شعاعی مبتنی بر تقریب‌های منطقی برداری مقدار را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری با مشتق کاپوتو- فابریزیو به‌کار می‌بریم. این الگوریتم پایدار به راحتی و با دقت برای همه انواع توابع پایه شعاعی به کار می‌رود.

**کلید واژه‌ها:** معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری، مشتق مرتبه کسری کاپوتو- فابریزیو، تقریب منطقی برداری مقدار، توابع پایه شعاعی، روش RBF_RA

## ۱- مقدمه

امروزه پیدا کردن یک روش دقیق و کارآمد برای حل معادلات دیفرانسیل و انتگرال از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، زیرا بدست آوردن جواب دقیق برای بیشتر مسائل امکان‌پذیر نمی‌باشد و یا به سادگی قابل محاسبه نیست. بنابراین، دانشمندان همواره در پی یافتن روش‌های مناسب تحلیلی و عددی برای حل این مسائل می‌باشند. یکی از روش‌هایی که برای تقریب توابع و حل معادلات مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد و در دهه‌های اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است، روش تقریب به کمک توابع پایه شعاعی[1] می‌باشد. در این روش نقاط درون‌یاب می‌توانند پراکنده اختیار شوند و در ابعاد بالاتر از پیچیدگی محاسباتی کمتری نسبت به روش‌های دیگر برخوردار است. یکی از ویژگی‌های توابع پایه شعاعی، وجود پارامتر شکل[2] ($\varepsilon$) در این توابع می‌باشد. این پارامتر علاوه بر کنترل تاثیرگذاری توابع و میزان خطا، در میزان پایداری مسئله نیز نقش اساسی دارد.
به‌کار بردن روش مستقیم توابع پایه شعاعی به کمک هسته‌های مسطح[3]، که در آن‌ها پارامتر شکل به صورت خیلی کوچک در نظر گرفته می‌شود، اگر چه باعث یافتن جواب‌هایی با خطای کمتر خواهد شد اما ماتریس درون‌یاب در آن‌ها دارای عدد حالت بسیار بزرگ خواهد شد. بر این اساس انتخاب یک پارامتر شکل بهینه همواره نظر دانشمندان زیادی را به خود جلب کرده است. همچنین الگوریتم‌های پایداری برای غلبه بر این بد-وضعی بیان شده‌اند که از آن جمله می‌توان به روش RBF_GA [۱] و الگوریتم RBF_QR [۲] اشاره نمود. روش جدیدتری که در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است، بر مبنای تقریب‌های منطقی از توابع برداری مقدار بدست‌آمده است و به طور خلاصه روش RBF-RA نامیده می‌شود. این روش اولین بار توسط رایت[4] و فورنبرگ[5] در سال ۲۰۱۷ مطرح شد و ویژگی های آن مورد بررسی قرار گرفت [۳]. این روش بر خلاف روش‌های ذکر شده برای همه توابع هموار قابل استفاده است. همچنین می‌توان آن را برای دامنه وسیعی از روش‌های مبتنی بر توابع شعاعی به کار برد. کاربرد معادلات دیغرانسیل مرتبه کسری در زمینه‌های مختلف

[*]رایانامه نویسنده مسئول: jafari@umz.ac.ir

1-Radial basis function
2-Shape parameter
3-Flat
4-Wright
5-Fornberg

فیزیک، شیمی، اقتصاد و نظریه کنترل، سبب اهمیت ویژه این مسائل و به کار بردن روش‌های گوناگون برای حل آن‌ها شده است[۶-۴].

تاکنون برای مشتقات مرتبه کسری تعاریف گوناگونی ارائه شده است که از جمله مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به تعریف ریمان-لیویل و کاپوتو اشاره نمود. اما در سال ۲۰۱۵، کاپوتو[1] و فابریزیو[2] تعریف دیگری از مشتق مرتبه کسری ارائه نمودند که بر خلاف بیشتر تعاریف گذشته شامل هسته نامنفرد می‌باشد [۷]. این کلاس از سیستم‌های غیر محلی[3] توانایی این را دارند که برای توصیف نا همگن مواد و نوسانات با مقیاس‌های مختلف که نمی تواند به خوبی توسط نظریه‌های کلاسیک محلی یا مدل‌های کسری با هسته منفرد شرح داده شود، مورد استفاده قرار بگیرد.

این دسته از مشتقات کسری به‌صورت زیر تعریف می‌شود: فرض کنید که $0<\alpha<1$ و $a<b$ مشتق مرتبه کسری کاپوتو- فابریزو تابع $u\in H^1(a,b)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}^{CF}_{\;0}D^{\alpha}u(x)=\frac{\mu(\alpha)}{1-\alpha}\int_0^x \exp\left(\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right)u'(t)dt,$$

که درآن، $\mu(\alpha)$ یک تابع نرمال شده[4] می‌باشد، به‌طوری که: $\mu(0)=\mu(1)=1.$

پس از آن لوسادا[5] و نیتو[6] مقدار تابع فوق را با معرفی انتگرال مرتبط با آن به‌صورت $\mu(\alpha)=\frac{2}{2-\alpha}$ تعریف نمودند [۸] و صورت نهایی مشتق کسری با هسته نامنفرد به شکل زیر به‌دست آمد:

$${}^{CF}_{\;0}D^{\alpha}u(x)=\frac{1}{1-\alpha}\int_0^x \exp\left(\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right)u'(t)dt.$$

## ۲- توابع پایه شعاعی

در این قسمت به تعاریف اولیه و مقدماتی توابع پایه شعاعی می‌پردازیم. برای مطالعه بیشتر در این زمینه و کاربردهای آن‌ها می‌توان به [۱۰، ۹] رجوع کرد.

فرض کنید $X=\{t_1,t_2,\dots,t_N\}$ مجموعه ای از نقاط پراکنده (یا مرکزها) در $\mathbb{R}^d$ باشد. تقریب تابع $g(t)$ با روش درون‌یابی توابع پایه شعاعی به صورت

$$\rho_\varepsilon(t)=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\varphi_\varepsilon(\|t-t_j\|),$$

بیان می‌شود، که در آن $\|\cdot\|$ نرم اقلیدسی در $\mathbb{R}^d$ است. تابع $\varphi_\varepsilon$ یک تابع پایه شعاعی است که مثال‌هایی از این توابع تحلیلی که بیشتر مورد بحث ما می‌باشد در جدول (۱) بیان شده است. با توجه به تعریف فورنبرگ، به غیر از تابع چند مربعی که به طور مشروط معین منفی است بقیه، توابعی مین مثبت هستند.

با کمک گرفتن از شروط درون‌یابی $\rho_\varepsilon(t_j)=g(t_j)$، $j=1,\cdots,N$ ضرایب مجهول $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N}$ از حل دستگاه

$$\varphi_\varepsilon\bar{\lambda}=G,$$

به دست می‌آیند، که درآن

$$(\phi)_{ji}=\varphi_\varepsilon(\|t_j-t_i\|),\ i,j=1,\cdots,N,$$

$$G=[g_1,\cdots,g_N]^T,\qquad \bar{\lambda}=[\lambda_1,\cdots,\lambda_N]^T.$$

**جدول (۱)**. مثال‌هایی از توابع پایه شعاعی هموار[7] پرکاربرد

| عنوان تابع | علامت اختصاری | تعریف |
|---|---|---|
| گوسی | GA | $\varphi_\varepsilon(r)=e^{-(r\varepsilon)^2}$ |
| مربعی معکوس | IQ | $\varphi_\varepsilon(r)=1+(r\varepsilon)^2$ |
| جند مریعی | MQ | $\varphi_\varepsilon(r)=\sqrt{1+(r\varepsilon)^2}$ |
| چند مربعی معکوس | IMQ | $\varphi_\varepsilon(r)=1/\sqrt{1+(r\varepsilon)^2}$ |

## ۳- تقریب‌های منطقی برداری مقدار[8]

حال به بررسی روش تقریب منطقی توابع برداری مقدار می‌پردازیم، که در واقع پایه و اساس الگوریتم RBF-RA می‌باشد.

فرض کنید $\Omega$ ناحیه‌ای در اطراف مبدا صفحه مختلط باشد و $u(\varepsilon)=(u_1(\varepsilon),\cdots,u_\eta(\varepsilon))$ تابعی برداری باشد که توابع $u_j$, $j=1,\cdots,\eta$ در همه نقاط ناحیه $\Omega$ به جز احتمالا در

1-Caputo
2-Fabrizio
3-Nonlocal
4-Normalization function
5-Losada
6-Nieto

7- Smooth
8- Vector-valued rational approximationd

تعداد نقاط متناهی نقطه تکین تنها[1] (قطب‌ها) تحلیلی هستند. قصد داریم تقریب تابع $u(\varepsilon)$ را برای $\varepsilon < \varepsilon_r$ محاسبه کنیم. $\varepsilon_r$مرز ارزیابی نامیده می‌شود و با توجه به تابع پایه شعاعی مقدار آن به دست می‌آید [۳].

در این روش توابع $u_j,\ j=1,\cdots,\eta$ به وسیله‌ی توابع $r_j$ تقریب‌زده می‌شوند.

$$r_j(\varepsilon)=\frac{p_{0j}+p_{1j}\varepsilon^2+\cdots+p_{mj}\varepsilon^{2m}}{1+q_1\varepsilon^2+\cdots+q_n\varepsilon^{2n}},\ j=1,\cdots,\eta.$$

بنابراین، برای یافتن $(m+1)\eta+n$ مجهول این رابطه باید دستگاه فرامعین[2] زیر حل شود.

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_1^2 & \cdots & \varepsilon_1^{2m} \\ 1 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \varepsilon_2^{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varepsilon_\eta^2 & \cdots & \varepsilon_\eta^{2m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{0j} \\ p_{1j} \\ \vdots \\ p_{mj} \end{pmatrix}-$$
$$\begin{pmatrix} u_j(\varepsilon_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_j(\varepsilon_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_j(\varepsilon_\eta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_1^2 & \cdots & \varepsilon_1^{2n} \\ \varepsilon_2^2 & \cdots & \varepsilon_2^{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_\eta^2 & \cdots & \varepsilon_\eta^{2n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} u_j(\varepsilon_1) \\ u_j(\varepsilon_2) \\ \vdots \\ u_j(\varepsilon_\eta) \end{pmatrix}$$

در اینجا خلاصه‌ای از روش حل دستگاه خطی فوق با استفاده از روش تقریب منطقی توابع برداری مقدار بیان می‌شود. شایان ذکر است که مطالب بیان شده در این بخش را به‌طور کامل‌تر می‌توان در [۳] ملاحظه نمود.

۱- ضرب کردن ردیف‌هایی از ماتریس ضرایب که دارای مقادیر بزرگ می‌باشد در یک عدد ثابت و متعادل کردن آن.

۲- محاسبه روش تجزیه $QR$ و ضرب کردن بلوک به‌وسیله $Q^*$.

۳- مرتب کردن ردیف‌های ماتریس به‌طوری که ردیف‌های صفر $R$ در پایین سیستم خطی قرار بگیرند.

۴- حل سیستم به کمک روش حداقل مربعات برای تعیین مقادیر $q_i$ها.

۵- به‌دست آوردن بقیه مجهولات با استفاده از مجهولات تعیین شده و حل دستگاه.

## ۴- محاسبه روش مذکور

فرض کنید $t_1,t_2,\ldots,t_N$ مجموعه داده‌های پراکنده باشد. معادله دیفرانسیل خطی با مشتق مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$ {}_0^{CF}D^{\alpha}g(t)+kg(t)=f(t), \qquad (1)$$
$$g(0)=g_0,$$

که در آن ${}_0^{CF}D^{\alpha}g(t)$ مشتق مرتبه کسری کاپوتو- فابریزیو می‌باشد و $k$ مقادیری ثابت است. هدف حل معادله و به‌دست آوردن تقریبی دقیق از جواب معادله فوق به کمک الگوریتم پایدار RBF-RA می‌باشد.

مشتق مرتبه کسری ${}_0^{CF}D^{\alpha}g(t)$ را در نظر بگیرید. به جای تابع مجهول $\varphi_{j,\varepsilon}(t)=\varphi_\varepsilon(\|t-t_j\|),\ j=1,\cdots,N$ را قرار می‌دهیم، $\varphi_{j,\varepsilon}(t)$ یکی از توابع پایه شعاعی جدول (۱) را قرار می‌دهیم.

$$ {}_0^{CF}D^{\alpha}\varphi_{j,\varepsilon}(t)=$$
$$\frac{1}{1-\alpha}\int_0^t \exp\left(\frac{-\alpha\ \ t-\xi}{1-\alpha}\right)\varphi'_{j,\varepsilon}(\xi)d\xi, \qquad (2)$$

را در معادله (۲) سپس نقاط کالوکیشن $t_1,t_2,\ldots,t_N$ جایگزین می‌نماییم. برای حل انتگرال فوق روش انتگرال‌گیری عددی گوس-لژاندر را به کار می‌بریم. بنابراین به تغییر متغیر

$$\xi(t,c)=(\frac{t}{2}c+\frac{t}{2}), \qquad -1\le c\le 1,$$

نیاز داریم. پس برای هر $k=1,\cdots,N$

$$ {}_0^{CF}D^{\alpha}\varphi_{j,\varepsilon}(t_k)=$$
$$\frac{1}{1-\alpha}\int_{-1}^{1}\frac{t_k}{2}H(t_k,\xi(t_k,c))dc, \qquad (4)$$

که در آن $H(t,\xi)=\exp\left(\frac{-\alpha(t-\xi)}{1-\alpha}\right)\varphi'_{j,\varepsilon}(\xi)$.

اکنون روش انتگرال‌گیری عددی را به‌کار می‌بریم. فرض کنید $c_i\ {}_{i=0}^{M}$ نقاط گوس-لژاندر و $\omega_i\ {}_{i=0}^{M}$ وزن‌های مرتبط با آن‌ها باشد.

1-Isolated singular points
2-Overdetermined system

$$
{}^{CF}_{\circ}D^{\alpha}\varphi_{j,\varepsilon}(t_k) = \frac{۱}{۱-\alpha}\sum_{i=\circ}^{M}\frac{t_k}{۲}H(t_k,\xi(t_k,c_i))\omega_i, \qquad (۵)
$$

در آخر و با توجه به معادلات (۱) و (۵) نقاط کالوکیشن $t_۱,t_۲,\ldots,t_N$ رابطه زیر را داریم:

$$
\sum_{j=۱}^{N}\lambda_j[{}^{CF}_{\circ}D^{\alpha}\varphi_{j,\varepsilon}(t_i)+k\,\varphi_{j,\varepsilon}(t_i)] = f(t_i),
$$
$$
i=۱,\cdots,N. \qquad (۶)
$$

رابطه (۶) را می‌توان به صورت دستگاه معادلات خطی زیر نمایش داد:

$$
R_{\varepsilon}\lambda = F,
$$

که در آن

$$
F=[f(t_۱),\cdots,f(t_N)]^T,
$$
$$
\lambda=[\lambda_۱,\cdots,\lambda_N]^T,
$$
$$
R_{j,\varepsilon}(t_i) = {}^{CF}_{\circ}D^{\alpha}\varphi_{j,\varepsilon}(t_i)+k\,\varphi_{j,\varepsilon}(t_i),
$$
$$
i,j=۱,\cdots N.
$$

مجموعه نقاط $\{x_i\}_{i=۱}^{L}$ را در نظر بگیرد. با توجه به روش تقریب منطقی برداری مقدار، هر تقریب حاصل از روش پایه شعاعی، یعنی $\rho_{\varepsilon}(x_i)$ که در بخش‌های قبل معرفی شد، را می‌توان به صورت یک مولفه از تابعی برداری مقدار بر حسب $\varepsilon$ در نظر گرفت. بنابراین می توان با استفاده از دستگاه زیر این توابع را تقریب زد. این الگوریتم، روشی پایدار است و باعث افزایش پایداری روش توابع پایه شعاعی خواهد شد.

$$
\begin{pmatrix} \rho_{\varepsilon}(x_۱) \\ \rho_{\varepsilon}(x_۲) \\ \vdots \\ \rho_{\varepsilon}(x_L) \end{pmatrix} =
$$
$$
\begin{pmatrix}
\varphi_{\varepsilon}(\|x_۱-t_۱\|) & \varphi_{\varepsilon}(\|x_۱-t_۲\|) & \cdots & \varphi_{\varepsilon}(\|x_۱-t_N\|) \\
\varphi_{\varepsilon}(\|x_۲-t_۱\|) & \varphi_{\varepsilon}(\|x_۲-t_۲\|) & \cdots & \varphi_{\varepsilon}(\|x_۲-t_N\|) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\varphi_{\varepsilon}(\|x_L-t_۱\|) & \varphi_{\varepsilon}(\|x_L-t_۲\|) & \cdots & \varphi_{\varepsilon}(\|x_L-t_N\|)
\end{pmatrix}
$$
$$
R_{\varepsilon}^{-۱}\begin{pmatrix} f(t_۱) \\ f(t_۲) \\ \vdots \\ f(t_N) \end{pmatrix}.
$$

## ۵- نتایج عددی

در این بخش مثال‌هایی از معلات دیفرانسیل مرتبه کسری ارائه می‌شود که به کمک روش RBF-RA حل شده‌اند. در این روش از هسته‌های گوسی و چندمربعی استفاده شده است. همچنین جواب‌ها با جواب‌های حاصل از روش RBF-Direct مقایسه خواهند شد. در حل مسائل، $\varepsilon_R$ بر اساس محاسبات رایت و فورنبرگ به دست آمده است [۳].

### مثال۱.

معادله دیفرانسیل مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید:

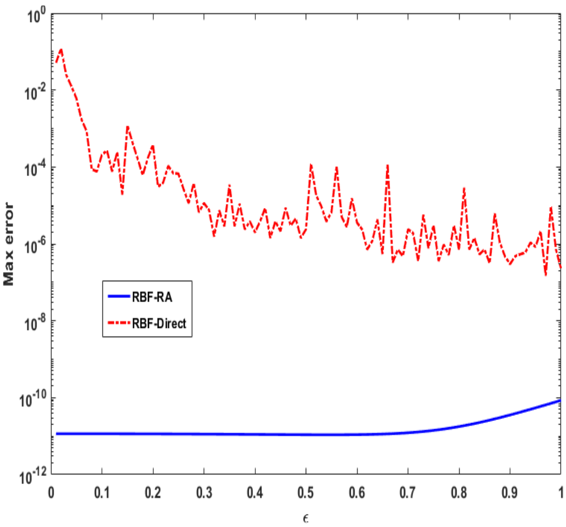
$$
{}^{CF}_{\circ}D^{\alpha}g(t)+۲g(t)=f(t), \qquad \alpha=\circ.۳۵,
$$
$$
g(\circ)=\circ,
$$

که تابع

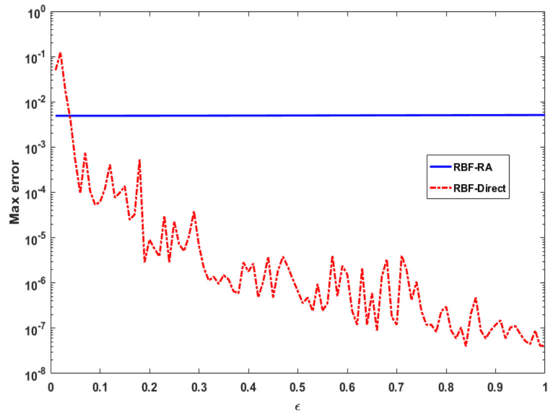
$$
f(t)=\frac{۸۱۸۰۶t}{۳۴۳}+\frac{۱۰۴۷۷۰۰}{۲۴۰۱}\exp(\frac{-۷t}{۱۳})
-\frac{۳۱۲۰t^۲}{۴۹}+\frac{۸۰t^۳}{۷}+۲t^۴-\frac{۱۰۴۷۷۰۰}{۲۴۰۱}.
$$

جواب واقعی مسئله برابر است با $g(t)=t^۴+t$ .

در حل مسئله با هسته تابع چندمربعی کمترین مقدار خطا در $\varepsilon=\circ.\circ۱$ رخ می‌دهد و برابر با مقدار $۴.۹۱۴۶e^{-۳}$ می‌باشد. اما در هسته گوسی جواب با دقت بالای $۹.۴۵۳e^{-۱۲}$ و در $\varepsilon=\circ.۵۳$ به دست می‌آید.




**شکل (۱):** مقایسه دو روش RBF-RA و RBF-Direct برای معادله مثال۱ به کمک هسته گوسی برای مقادیر مختلف $\circ\le\varepsilon\le۱$




**شکل (۲):** مقایسه دو روش RBF-RA و RBF-Direct برای معادله مثال ۱ به کمک هسته چندمربعی برای مقادیر مختلف $۰ \le \varepsilon \le ۱$

نتایج حاصل از تقریب دو روش با دو هسته متفاوت در شکل‌های (۱-۲) آمده است. در همه شکل‌ها پایداری روش پیشنهاد شده به‌طور واضح از روش RBF-Direct بهتر است.

همان‌طور که از شکل(۱) و (۲) مشخص است، روش RBF-RA بسیار پایدارتر از روش مستقیم می‌باشد که انتظارات ما را برآورده می‌کند. همچنین هسته گوسی برای حل این مسائل بسیار کارآمد تر از هسته چند مربعی است و جواب‌های حاصل از آن بسیار دقیق‌تر می‌باشند.

**مثال ۲.**

معادله دیفرانسیل مرتبه کسری زیر را د رنظر بگیرید:

$$ {}^{CF}_{\;\,۰}D^{\alpha} g(t) - g(t) = f(t), \qquad \alpha = ۰.۸۵, \quad g(۰)=۰, $$

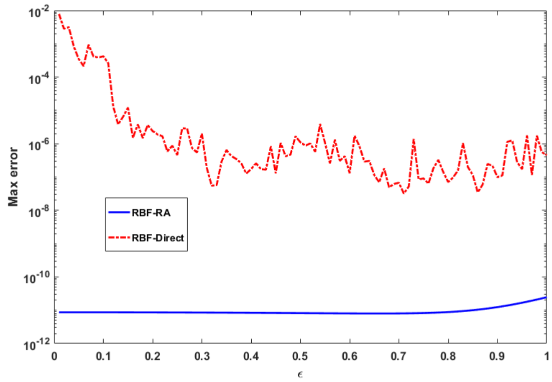
که در آن

$$ f(t) = \frac{۴۰t}{۱۷} - \frac{۳۱۲۵۰}{۴۳۰۶۱}\exp\left(\frac{-۱۷t}{۳}\right) + \frac{۱۷۰\cos(t)}{۱۴۹} - \frac{۱۱۹\sin(t)}{۱۴۹} - t^{۲} - \frac{۱۲۰}{۲۸۹}. $$

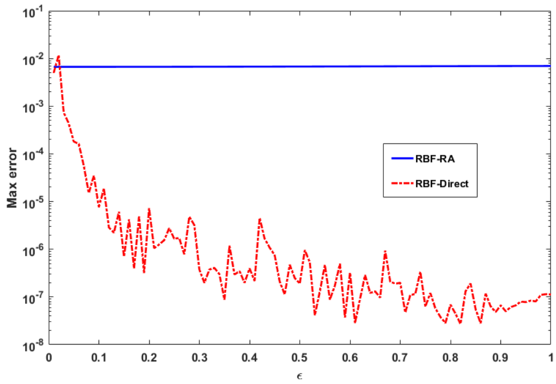
جواب واقعی مسئله برابر است با $g(t) = \sin(t) + t^2$

در حل مسئله با هسته‌ی تابع چندمربعی کمترین مقدار خطا در $\varepsilon = ۰.۰۱$ رخ می‌دهد برابر با مقدار $۶.۶۶۰۴e^{-۳}$ می‌باشد. اما در هسته گوسی جواب با دقت بالای $۸.۷۶۴۵e^{-۱۲}$ و در $\varepsilon = ۰.۷۱$ به دست می‌آید.

نتایج حاصل از تقریب دو روش با دو هسته متفاوت در شکل‌های (۳) و (۴) آمده است.




**شکل (۳):** مقایسه دو روش RBF-RA و RBF-Direct برای معادله مثال۲ به کمک هسته گوسی برای مقادیر مختلف $۰ \le \varepsilon \le ۱$




**شکل (۴):** مقایسه دو روش RBF-RA و RBF-Direct برای معادله مثال ۲ به کمک هسته چندمربعی برای مقادیر مختلف $۰ \le \varepsilon \le ۱$

نتایج مانند مثال قبل می‌باشد و آن‌ها را تایید می‌کند.

**مثال ۳:**

معادله دیفرانسیل مرتبه کسری زیر را د رنظر بگیرید:

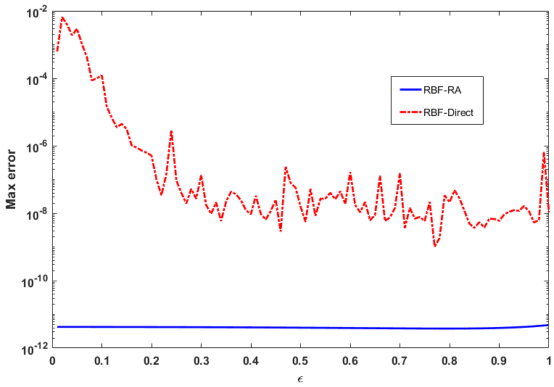
$$ {}^{CF}_{\;\,۰}D^{\alpha} g(t) = f(t) - g(t), \qquad \alpha = ۰.۵, \quad g(۰)=۱, $$

که در آن:

$$ f(t) = \cos(t) - \exp(-t) + \sqrt{۲}\cos\left(t + \frac{\pi}{۴}\right). $$

جواب واقعی مسئله برابر است با $g(t) = \cos(t)$

در حل مسئله با هسته‌ی تابع چندمربعی کمترین مقدار خطا در $\varepsilon = ۱$ رخ می‌دهد برابر با مقدار $۹.۵۵۷۴e^{-۳}$ می‌باشد. اما در هسته گوسی جواب با دقت بالای $۳.۶۴۸۶e^{-۱۲}$ و در $\varepsilon = ۰.۷۹$ به دست می‌آید.

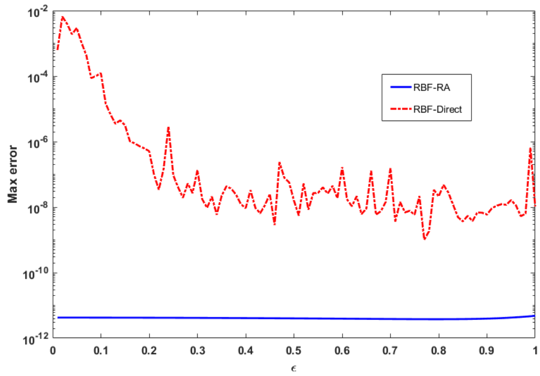



**شکل (۵)**: مقایسه دو روش RBF-RA و RBF-Direct برای معادله مثال۳ به کمک هسته گوسی برای مقادیر مختلف

$0 \leq \varepsilon \leq 1$

نتایج حاصل از تقریب دو روش با دو هسته متفاوت در شکل‌های (۵-۶) آمده است.

نتایج مانند مثال‌های قبل و در تایید دقت و پایداری روش می‌باشند.




**شکل (۶)**: مقایسه دو روش RBF-RA و RBF-Direct برای معادله مثال ۳ به کمک هسته چندمربعی برای مقادیر مختلف

$0 \leq \varepsilon \leq 1$

## ۶- نتیجه‌گیری

از آن جا که نقش پارامتر شکل در هسته‌های توابع شعاعی بسیار قابل اهمیت و پیچیده است. بر آن شدیم تا با روش RBF-RA که بر اساس تقریب‌های برداری مقدار به دست آمده است، روشی پایدار برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری با مشتق کاپوتو- فابریزو به‌دست آوریم. در این روش تابع پایه شعاعی به‌صورت یک تابع برداری بر حسب پارامتر شکل $\varepsilon$ در نظر گرفته می‌شود، استفاده از این روش برای غلبه بر بدوضعی ناشی از آن‌هاست. نتایج عددی بیان شده صحت گفته‌ها را تایید می‌کنند. قابل ذکر است که هسته‌های گوسی برای محاسبه جواب این معادلات بسیار دقیق تر و کارآمدتر می‌باشند.

## ۷- مراجع


[1] B. Fornberg, E. Lehto, and C. Powell, "Stable calculation of Gaussian-based RBF-FD stencils," Computers & Mathematics with Applications, vol. 65, pp. 627-637, 2013.

[2] B. Fornberg and C. Piret, "A stable algorithm for flat radial basis functions on a sphere," SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 30, pp. 60-80, 2007.

[3] G. B. Wright and B. Fornberg, "Stable computations with flat radial basis functions using vector-valued rational approximations," Journal of Computational Physics, vol. 331, pp. 137-156, 2017.

[4] K. B. Oldham, "Fractional differential equations in electrochemistry," Advances in Engineering Software, vol. 41, pp. 9-12, 2010.

[5] I. Podlubny, "Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and some of their Applications," Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1999.

[6] H.H. Sun, N. Onaral, and Y. Tsao, "Application of positive reality principle to metal electrode linear polarization phenomena," IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 31, pp. 664-674, 1984.

[7] M. Caputo and M. Fabrizio, "A new definition of fractional derivative without singular kernel," Progress in Fractional Differentiation and Applications, vol. 1, pp. 73–85, 2015.

[8] J. Losada and J. J. Nieto, "Properties of a new fractional derivative without singular kernel," Progress in Fractional Differentiation and Applications, vol. 1, pp. 87–92, 2015.

[9] G. E. Fasshauer, "Meshfree Approximation Methods with MATLAB," Interdisciplinary Mathematical Sciences, World Scientific Publishing Company, Singapore, 2007.

[10] M. R. Mosavi and M. Khishe, "The use of radial basis function networks based on leader mass gravitational search algorithm for sonar dataset classification," Journal of Electronical & Cyber Defence, vol. 4, pp. 39-52, 2016. (In Persian)