مجله علمی- پژوهشی "پدافند الکترونیکی و سایبری"
ویژه‌نامه ترکیبیات، رمزنگاری و محاسبات، ص ۱۵۴ -۱۴۵

گراف های کیلی فازی شهودی راف

علی اصغر طالبی*، سمانه امیدبخش امیری[۲]

۱-گروه ریاضی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه مازندران، ایران، بابلسر،۲- گروه ریاضی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه مازندران،ایران، بابلسر.
(دریافت: ۱۳۹۷/۰۸/۲۵ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۷/۰۲)

چکیده

در این مقاله مفاهیم گراف کیلی فازی شهودی و گراف شبه کیلی فازی شهودی را روی گروه های فازی شهودی معرفی نموده و تقریب های راف آنها را مورد مطالعه قرار می دهیم. همچنین بسیاری از خواص مجموعه های راف فازی شهودی را روی آنها بررسی می کنیم.

واژه‌های کلیدی: مجموعه های فازی شهودی، گراف های کیلی فازی شهودی و گراف های شبه کیلی فازی شهودی، گروه فازی شهودی.

۱- مقدمه

در سال ۱۹۶۵، زاده [32] مفهوم زیر مجموعه های فازی از یک مجموعه را به عنوان یک روش برای نشان دادن عدم قطعیت معرفی کرد. از آن زمان نظریه مجموعه های فازی به یک زمینه مستحکم تحقیقاتی در رشته های مختلف از جمله علوم پزشکی، علوم مدیریتی، علوم اجتماعی، شبکه های کامپیوتری، تصمیم گیری و نظریه ماشینها تبدیل شده است. روزنفلد از مجموعه های فازی برای توسعه ی نظریه گروه های فازی استفاده کرد [۲۲]. او رابطه فازی را روی مجموعه های فازی در نظر گرفته و نظریه گرافهای فازی را در سال ۱۹۷۵ [۲۳] توسعه داد. مجموعه فازی شهودی توسط آتناسو [۵و ۶] به عنوان یک تعمیم از مفاهیم مجموعه فازی ارائه شد. مفاهیم اصلی زیرگروه های فازی در [۱۲و ۱۷] بررسی شده اند. در سال (۲۰۰۱)، موردرشون و نایر [۱۱] نظریه مشابهی از چندین مفاهیم پایه ای گراف را معرفی کردند.

اکرم و همکارانش [۲، ۳ و ۴] بسیاری از مفاهیم گراف های فازی شهودی از جمله ابر گراف های فازی شهودی، گراف های فازی شهودی قوی، دورهای فازی شهودی و درخت های فازی شهودی را معرفی کردند. رشمانلو و دوستانش [۲۴] نیز برخی از خواص گراف های فازی شهودی را مورد بررسی قرار دادند. پاراواتی و دوستانش بعضی از اعمال را روی گراف های فازی شهودی در [۱۶] تعریف کردند. اکرم [۷] گراف های کیلی فازی دو قطبی روی یک گروه را تعریف کرده و همچنین در [۱] مفاهیم گراف های کیلی فازی شهودی روی گروه ها را معرفی کرد. طالبی [۲۹ و ۳۰] مفهوم گراف های کیلی فازی در یک گروه فازی را معرفی کرد و بسیاری از خواص آنها را مورد بررسی قرار داد.

مجموعه های راف در اصل توسط پارک [۱۸، ۱۹، ۲۰ و ۲۱] برای نزدیک شدن ریاضی به منظور رسیدگی به عدم قطعیت در تجزیه و تحلیل داده ها پیشنهاد شده است. این نظریه نشان داده است که از آن در حل بسیاری از مشکلات برنامه های کامپیوتری می توان استفاده کرد [۲۶، ۲۷ و ۳۵]. کورکی به همراه وانگ [۹] تقریب های بالا و پایین را نسبت به زیرگروه های نرمال و همچنین او و مردسون ساختار مجموعه های راف و گروه های راف را در [۱۰] مطالعه کردند. مجموعه راف فازی توسط دانشمندان فرانسوی دوبیوس و پراد ارائه شده است [۸]. مفاهیم تقریبی گراف های کیلی و شبه کیلی مورد مطالعه قرار گرفت [۲۵]. مفاهیم مجموعه های فازی راف تعمیم یافته بررسی شده [۳۲] و مجموعه های فازی شهودی راف تعمیم یافته را مورد بررسی قرار گرفت [۲۸ و ۳۴]. در این مقاله دو تقریب های راف از گرافهای کیلی و شبه کیلی فازی شهودی معرفی شده و خواص آن ها مورد مطالعه قرار می گیرد.

۲- تعاریف مقدماتی: در این بخش مفاهیم اساسی مربوط به مجموعه های فازی شهودی، مجموعه های راف شهودی را یاد آوری می کنیم.

تعریف ۱- ۱. [۵]. فرض کنید V یک مجموعه معین باشد.

* رایانامه ی نویسنده پاسخگو: a.talebi@umz.ac.ir

یک مجموعه فازی شهودی (IFS) A در V به صورت زیر تعریف می شود.

$$A = \{< x, \mu_A(x),\ \nu_A(x) > | x \in V\},$$

به ازای $x \in U$، $\nu_A: V \to [0,1]$ درجه غیر عضویت و $\mu_A: V \to [0,1]$درجه عضویت است به طوری که $0 \le \mu_A(x) + \nu_A(x) \le 1$. خانواده همه مجموعه‌های فازی شهودی در V با IFS[V] نشان داده می شود. مکمل A را با $\sim A$ نمایش می دهیم به طوریکه

$$\sim A = \{< x,\ \nu_A(x), \mu_A(x) > | x \in V\}.$$

به روشنی می توانیم ببینیم که هر مجموعه فازی $A = \{< x, \mu_A(x) > | x \in V\}$ می تواند به صورت مجموعه فازی شهودی به‌فرم

$A = \{< x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x) > | x \in V\}$ مشخص شود.

برخی از اعمال اساسی روی IF[V] به ازای هر، $A, B \in IFS(V)$ در زیر بیان شده اند [۱، ۲]. به ازای هر $x \in V$،

۱) $A \subseteq B \leftrightarrow \mu_A(x) \le \mu_B(x),\ \nu_A(x) \ge \nu_B(x)$

۲) $A = B \leftrightarrow A \subseteq B, B \subseteq A$

$A \cap B = \{< x, \quad \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \quad \nu_A(x) \vee \nu_B(x) > | x \in V\}$

$A \cup B = \{< x, \mu_A(x) \vee \mu_B(x),\ \nu_A(x) \wedge \nu_B(x) > | x \in V\}$

تعریف ۱ -۲. فرض کنید

$$L_* = \{(\lambda, \alpha) : \lambda, \alpha \in [0,1],\ \lambda + \alpha \le 1\}.$$

برای هر

$(\lambda_1, \alpha_1), (\lambda_2, \alpha_2) \in L_*$،

رابطه ترتیبی $\le$ و $<$ به صورت زیر تعریف می شود.

$(\lambda_1, \alpha_1) \le (\lambda_2, \alpha_2) \leftrightarrow \lambda_1 \le \lambda_2$ و $\alpha_1 \ge \alpha_2$,

$(\lambda_1, \alpha_1) < (\lambda_2, \alpha_2) \leftrightarrow (\lambda_1, \alpha_1) \le (\lambda_2, \alpha_2)$

و $\lambda_1 < \lambda_2$ یا $\alpha_1 > \alpha_2$.

به وسیله‌ی تعربف بالا به آسانی می توانیم مشاهده کنیم $(L_*, \le)$ یک مشبکه کامل با عضو ماکسیمال $(1,0)$ و عضو مینیمال $(0,1)$ است.

تعریف ۱ -۳. فرض کنید $A \in IFS[V]$. برای هر $(\lambda, \alpha) \in L_*$ تعریف می کنیم

$$A_{(\lambda,\alpha)} = \{x \in V : \mu_A(x) \ge \lambda \text{ و } \nu_A(x) \le \alpha\}$$

که آن را مجموعه ی (λ, α)- برش می نامیم.

مجموعه‌ی $\{x | x \in V \text{ و } (\mu_A(x), \vartheta_A(x)) > (0,1)\}$، محمل A نامیده شده‌وآن‌را با A^* نمایش می دهیم.

تعریف ۱-۴. فرض کنید G یک گروه است.در این صورت $A \in IFS[V]$ یک زیرگروه فازی شهودی روی G نامیده می شود اگر به‌ازای هر $y \in G$ و x، شرایط زیر برقرار باشد.

$\mu_A(xy) \ge \mu_A(x) \wedge \mu_A(y),$

$\nu_A(xy) \le \nu_A(x) \vee \nu_A(y)$

۱. $\mu_A(x) = \mu_A(x^{-1}), \quad \nu_A(x) = \nu_A(x^{-1})$.

مجموعه‌ی‌متشکل از همه‌ی زیرگروه‌های فازی شهودی روی G را با $IF[G]$ نشان می دهیم.

تعریف ۱-۵. [۳۴] . یک رابطه فازی شهودی R روی V یک مجموعه فازی شهودی روی $V \times V$ است که به صورت زیر تعریف می شود

$$R = \{< (x,y), \mu_R(x,y),\ \nu_R(x,y) > | (x,y) \in V \times V\},$$

به‌طوریکه به ازای هر $(x,y) \in V \times V$،

$\mu_R = V \times V \to [0,1]$ و $\nu_R = V \times V \to [0,1]$

در شرط $0 \le \mu_R(x,y) + \nu_R(x,y) \le 1$ صدق کند.

فرض کنید R یک رابطه فازی شهودی روی V باشد.در این صورت:

- اگر برای هر $x \in V$، $\mu_R(x,x) = 1$ و $\nu_R(x,x) = 0$، R بازتابی نامیده می شود.
- اگربرای هر $(x,y) \in V \times V$،

$\mu_R(x,y) = \mu_R(y,x),$
$\nu_R(x,y) = \nu_R(y,x)$

باشد، R تقارنی نامیده می شود.

- اگر برای هر $(x,z) \in V \times V$ داشته باشیم،

$\mu_R(x,z) \ge \vee_{y \in V} [\mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,z)],$

$\nu_R(x,z) \le \wedge_{y \in V} [\nu_R(x,y) \vee \nu_R(y,z)]$

R متعدی نامیده می شود.

تعریف ۱ -۶. یک گراف فازی شهودی با مجموعه ی V به

صورت یک زوج $G = (A, B)$ تعریف می شود به طوریکه:

۱. تابع $\mu_A : V \to [0,1]$ و $\nu_A : V \to [0,1]$ به ترتیب درجه‌ی عضویت و عدم عضویت برای هر $x \in V$ است و

برای هر $x \in V$، $0 \le \mu_A(x) + \nu_A(x) \le 1$.

۲. تابع

$$\mu_B : E \subseteq V \times V \to [0,1],$$
$$\nu_B : E \subseteq V \times V \to [0,1]$$

را طوری تعریف می کنیم که:

$$\mu_B(\{x,y\}) \le \min(\mu_A(x), \mu_A(y)),$$
$$\nu_B(\{x,y\}) \ge \max\big(\nu_A(x), \nu_A(y)\big)$$

به طوریکه برای هر $\{x,y\} \in E$،

$$0 \le \mu_B(\{x,y\}) + \nu_B(\{x,y\}) \le 1.$$

تعریف ۱ -۷. [34]. فرض کنید V یک مجموعه غیر تهی باشد و $R \in IFS[V \times V]$. زوج (V, R) یک فضای تقریب فازی شهودی نامیده می‌شود. برای‌هر $A \in IFS[V]$ تقریب بالا و پایین از A را به ترتیب با $\overline{R}(A)$ و $\underline{R}(A)$ نشان می دهیم که دو IFS هستند و به صورت زیر تعریف می شوند

$$\overline{R}(A) = \{< x, \mu_{\overline{R}(A)}(x), \nu_{\overline{R}(A)}(x) > | x \in V\},$$
$$\underline{R}(A) = \{< x, \mu_{\underline{R}(A)}(x), \nu_{\underline{R}(A)}(x) > | x \in V\}$$

به طوریکه

$$\mu_{\overline{R}(A)}(x) = \vee_{y \in V} [\mu_R(x,y) \wedge \mu_A(y)],$$
$$\mu_{\underline{R}(A)}(x) = \wedge_{y \in V} [\nu_R(x,y) \vee \mu_A(y)] \quad \text{و}$$
$$\nu_{\overline{R}(A)}(x) = \wedge_{y \in V} [\nu_R(x,y) \vee \nu_A(y)],$$
$$\nu_{\underline{R}(A)}(x) = \vee_{y \in V} [\mu_R(x,y) \wedge \nu_A(y)].$$

زوج $(\overline{R}(A), \underline{R}(A))$ را مجموعه راف فازی شهودی روی A نامیده‌و $\overline{R}, \underline{R}: IFS(V) \to IFS(V)$ به ترتیب به عنوان عامل های تقریب راف بالا و پایین IF معرفی می شود.

تعریف ۱ -۸. [۲۸]. فرض کنید R یک رابطه فازی شهودی از V به V باشد. آنگاه عملگرهای تقریب بالا و پایین فازی شهودی در خواص زیر صدق می کند.

۱. $\underline{R}(A) = \sim \overline{R}(\sim A)$ و $\overline{R}(A) = \sim \underline{R}(\sim A)$

۲. (a $\overline{R}(A \cup B) = \overline{R}(A) \cup \overline{R}(B)$

(b $\underline{R}(A \cap B) = \underline{R}(A) \cap \underline{R}(B)$

۳. (a $\overline{R}(A \cap B) \subseteq \overline{R}(A) \cap \overline{R}(B)$

(b $\underline{R}(A \cup B) \supseteq \underline{R}(A) \cup \underline{R}(B)$

۴. $A \subseteq B \to \overline{R}(A) \subseteq \overline{R}(B),\ \underline{R}(A) \subseteq \underline{R}(B)$.

۲-گرافهای کیلی و شبه کیلی فازی شهودی:

تعریف ۲ -۱. فرض کنید G یک گروه باشد،$A \in IF[G]$ و $\sigma \subseteq A$ به طوریکه به ازای همه ی $x, y \in G$،

۱. $\mu_\sigma(xy^{-1}) \le \mu_A(x) \wedge \mu_A(y),$
$\nu_\sigma(xy^{-1}) \ge \nu_A(x) \vee \nu_A(y)$

۲. $\sigma(x) = \big(\mu_\sigma(x), \nu_\sigma(x)\big) \ne (0,1)$

۳. $\sigma(x) = \big(\mu_\sigma(x^{-1}), \nu_\sigma(x^{-1})\big) = \sigma(x^{-1})$.

دراین صورت گراف فازی شهودی $X = (G, A, B)$ به‌طوریکه B به ازای هر $(x, y) \in G \times G$، $x \ne y$ به صورت

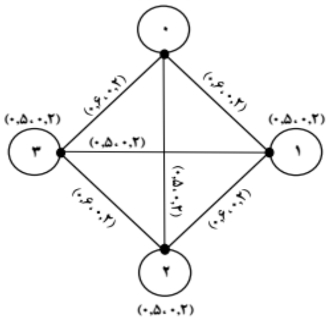
$$\mu_B(x,y) = \mu_\sigma(xy^{-1}) \wedge \mu_A(x) \wedge \mu_A(y),$$
$$\nu_B(x,y) = \nu_\sigma(xy^{-1}) \vee \nu_A(x) \vee \nu_A(y)$$

تعریف شود را گراف کیلی فازی شهودی $(CIFG)$ از A می نامیم و با نماد $CayIF(G, A, C)$ نشان می دهیم. زیر مجموعه فازی شهودی σ با خواص بالا به عنوان زیر مجموعه کیلی فازی شهودی از A در G نامیده می شود.

تعریف ۲-۲. گروه جمعی اعداد صحیح به پیمانه ی ۴، $G = Z_4 = \{0,1,2,3\}$ را در نظر می گیریم. فرض کنید $A \in IF[G]$ به طوریکه $\mu_A(0) = 1$، $\mu_A(2) = 0.9$، $\mu_A(1) = \mu_A(3) = 0.6$، و برای همه ی $x \in Z_4$، $\nu_A(x) = 0.2$. $\sigma \subseteq A$ را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\mu_\sigma(0) = \mu_\sigma(2) = 0.6, \mu_\sigma(1) = \mu_\sigma(3) = 0.5,$$
$$\nu_\sigma(0) = \nu_\sigma(2) = 0.7,\ \nu_\sigma(1) = \nu_\sigma(3) = 0.2.$$

در این صورت گراف کیلی فازی شهودی $X = CayIF(Z_4, A, \sigma)$ در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل (۱). گراف کیلی فازی شهودی $CayIF(Z_4, A, \sigma)$

تعریف ۲-۳. فرض کنید G یک گروه باشد، $A \in IF[G]$ و $\tau \subseteq A$ به طوریکه به ازای همه ی $x \in G$،

$$\tau(x) = (\mu_\tau(x), \nu_\tau(x)) = (\mu_\tau(x^{-1}), \nu_\tau(x^{-1})) = \tau(x^{-1})$$

برای یک زیر مجموعه کیلی فازی شهودی σ از A، گراف فازی شهودی $X = (G, \tau, B)$ به طوریکه B به ازای هر $(x, y) \in G \times G$ و $x \neq y$ به صورت

$$\mu_B(x,y) = \mu_\sigma(xy^{-1}) \wedge \mu_\tau(x) \wedge \mu_\tau(y),$$
$$\nu_B(x,y) = \nu_\sigma(xy^{-1}) \vee \nu_\tau(x) \vee \nu_\tau(y)$$

تعریف شود را گراف شبه کیلی فازی شهودی $(PCIFG)$ از τ در G نسبت به σ می نامیم و با نماد$PCayIF(G, \tau, \sigma)$ نشان می دهیم

تعریف ۲-۴. در مثال ۲.۲، $A \subseteq \tau$ به طوریکه

$$\mu_\tau(0) = 0.5, \mu_A(2) = 0.8, \mu_A(1) = \mu_A(3) = 0,$$
$$\nu_\tau(0) = 0.1, \nu_\tau(2) = 0.2, \nu_\tau(1) = \nu_\tau(3) = 0.1.$$

آنگاه $X = PCayIF(Z_4, \tau, \sigma)$ گراف شبه کیلی فازی شهودی می باشد.

تعریف۲-۵. اگر $X_1 = CayIF(G, A_1, \sigma_1)$ و $X_1 = CayIF(G, A_2, \sigma_2)$ گراف‌های کیلی فازی شهودی باشند، آنگاه

۱) $X_1 \cup X_2 = CayIF(G, A_1 \cup A_2, \sigma_1 \cup \sigma_2)$

وقتی که $A_1 \subseteq A_2$ یا $A_2 \subseteq A_1$،

۲) $X_1 \cap X_2 = CayIF(G, A_1 \cap A_2, \sigma_1 \cap \sigma_2)$.

اثبات: ۱) فرض کنید $A_1 \subseteq A_2$، بنابراین به ازای هر $x \in G$،

$$A_1(x) \cup A_2(x)$$
$$= (\mu_{A_1}(x) \vee \mu_{A_2}(x), \nu_{A_1}(x) \wedge \nu_{A_2}(x))$$
$$= (\mu_{A_2}(x), \nu_{A_2}(x)) = A_2(x).$$

در نتیجه

$$A_1 \cup A_2 = A_2.$$

اگر $x, y \in G$ دو عنصر متمایز G باشند، آنگاه

$$(\sigma_1 \cup \sigma_2)(xy^{-1})$$
$$= \begin{pmatrix} \mu_{\sigma_1}(xy^{-1}) \vee \mu_{\sigma_2}(xy^{-1}), \\ \nu_{\sigma_1}(xy^{-1}) \wedge \nu_{\sigma_2}(xy^{-1}) \end{pmatrix}$$

$$\leq \begin{pmatrix} (\mu_{A_1}(x) \wedge \mu_{A_1}(y)) \vee (\mu_{A_2}(x) \wedge \mu_{A_2}(y)), \\ (\nu_{A_1}(x) \vee \nu_{A_1}(y)) \wedge (\nu_{A_2}(x) \vee \nu_{A_2}(y)) \end{pmatrix}$$
$$= (\mu_{A_2}(x) \wedge \mu_{A_2}(y), \nu_{A_2}(x) \vee \nu_{A_2}(y))$$

برای هر $x \in G$.

$$(\sigma_1 \cup \sigma_2)(x) = (\mu_{\sigma_1}(x) \vee \mu_{\sigma_2}(x), \nu_{\sigma_1}(x) \wedge \nu_{\sigma_2}(x))$$
$$= (\mu_{\sigma_1}(x^{-1}) \vee \mu_{\sigma_2}(x^{-1}), \nu_{\sigma_1}(x^{-1}) \wedge \nu_{\sigma_2}(x^{-1}))$$
$$= (\sigma_1 \cup \sigma_2)(x^{-1}).$$

به طور مشابه برای حالت $A_2 \subseteq A_2$انجام می شود.

برای هر $x, y \in G$، داریم

$$(\sigma_1 \cap \sigma_2)(xy^{-1})$$
$$= (\mu_{\sigma_1}(xy^{-1}) \wedge \mu_{\sigma_2}(xy^{-1}), \nu_{\sigma_1}(xy^{-1}) \vee \nu_{\sigma_2}(xy^{-1}))$$
$$\leq (\mu_{A_1}(x) \wedge \mu_{A_1}(y)) \wedge (\mu_{A_2}(x) \wedge \mu_{A_2}(y)),$$
$$(\nu_{A_1}(x) \vee \nu_{A_1}(y)) \vee (\nu_{A_2}(x) \vee \nu_{A_2}(y))$$

$$= (\mu_{A_1}(x) \wedge \mu_{A_2}(x)) \wedge (\mu_{A_1}(y) \wedge \mu_{A_2}(y)),$$
$$(\nu_{A_1}(x) \vee \nu_{A_2}(x)) \vee (\nu_{A_1}(y) \vee \nu_{A_2}(y))$$
$$= (\mu_{A_1 \cap A_2}(x) \wedge \mu_{A_1 \cap A_2}(y), \nu_{A_1 \cap A_2}(x) \vee \nu_{A_1 \cap A_2}(y)).$$

همچنین داریم

$$(\sigma_1 \cap \sigma_2)(x) = (\mu_{\sigma_1}(x) \wedge \mu_{\sigma_2}(x), \nu_{\sigma_1}(x) \vee \nu_{\sigma_2}(x))$$
$$= (\mu_{\sigma_1}(x^{-1}) \wedge \mu_{\sigma_2}(x^{-1}), \nu_{\sigma_1}(x^{-1}) \vee \nu_{\sigma_2}(x^{-1}))$$

$$= (\sigma_1 \cap \sigma_2)(x^{-1}).$$

تعریف ۲-۶. اگر $X_1 = CayIF(G, A_1, \sigma_1)$ و $X_2 = CayIF(G, A_2, \sigma_2)$ گراف های کیلی فازی شهودی باشند،آنگاه

$$X_1 \subseteq X_2 \leftrightarrow A_1 \subseteq A_2, \sigma_1 \subseteq \sigma_2.$$

اثبات: با توجه به تعریف زیرگروه های فازی شهودی اثبات واضح می باشد.

تعریف ۲-۷. فرض کنید G یک گروه باشد و $A \in IF[G]$. اگر $X_1 = PCayIF(G, \tau_1, \sigma_1)$ و $X_2 = PCayIF(G, \tau_2, \sigma_2)$ گراف های شبه کیلی فازی شهودی باشند، آنگاه

۱) $X_1 \cup X_2 = PCayIF(G, \tau_1 \cup \tau_2, \sigma_1 \cup \sigma_2)$

۲) $X_1 \cap X_2 = PCayIF(G, \tau_1 \cap \tau_2, \sigma_1 \cap \sigma_2)$.

اثبات: ۱)چون τ_1 و $\tau_2 \subseteq A$ پس $\tau_1 \cup \tau_2 \subseteq A$. با توجه به تعریف گراف های شبه کیلی فازی شهودی داریم،

$$\begin{aligned}(\tau_1 \cup \tau_2)(x) &= (\mu_\tau(x) \vee \mu_\tau(x), \nu_\tau(x) \wedge \nu_\tau(x))\\ &= (\mu_\tau(x^{-1}) \vee \mu_\tau(x^{-1}), \nu_\tau(x^{-1}) \wedge \nu_\tau(x^{-1}))\\ &= (\tau_1 \cup \tau_2)(x^{-1})\end{aligned}$$

و همچنین داریم

$$(\sigma_1 \cup \sigma_2)(x) = (\sigma_1 \cup \sigma_2)(x^{-1}).$$

۲) مشابه (۱) اثبات می شود.

۳- گراف های کیلی فازی شهودی راف

در این بخش مفاهیمی از تقریب های بالا و پایین گراف های کیلی فازی شهودی و گراف های شبه کیلی فازی شهودی ارائه می شود.

سرتاسر این بخش فرض می کنیم G یک گروه، $A \in IF[G]$ به طوریکه

$$A(e) = (\mu_A(e), \nu_A(e)) = (1, 0)$$

و به ازای هر $x, y \in G$،

$$A(xy^{-1}) = A(x^{-1}y^{-1}).$$

فرض کنید R یک رابطه فازی شهودی از G به G باشد که به ازای هر $x, y \in G$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned}R(x,y) &= (\mu_R(x,y), \nu_R(x,y))\\ &= (\mu_A(xy^{-1}), \nu_A(xy^{-1})) = A(xy^{-1}).\end{aligned}$$

لم ۳ .۱. [۳۲]. اگر $A \in IF[G]$. آنگاه برای هر $B \in IFS[G]$ داریم

a) $\underline{R}(B) \subseteq B$

b) $B \subseteq \overline{R}(B)$.

تعریف ۳-۲. فرض کنید $A \in IF(G)$ و σ یک زیر مجموعه کیلی فازی شهودی باشد. برای هر گراف کیلی فازی شهودی $X = CayIF(G, A, \sigma)$، یک زوج تقریب پایین و بالای $\underline{X}$ و $\overline{X}$ به صورت زیر تعریف می شود،

$$\underline{X} = \mathrm{CayIF}(G, A, \underline{R}(\sigma)), \quad \overline{X} = \mathrm{CayIF}(G, A, \overline{R}(\sigma)).$$

تعریف ۳-۳. گراف های فازی شهودی $\underline{X}$ و $\overline{X}$ گراف های کیلی فازی شهودی هستند.

اثبات: نشان می دهیم که $\underline{X}$ و $\overline{X}$ در شرایط تعریف ۲ .۱ صدق می کند.

با توجه به اینکه

$$\begin{aligned}R(x,y) &= (\mu_R(x,y), \nu_R(x,y)) = (\mu_A(xy^{-1}), \nu_A(xy^{-1}))\\ &= (\mu_A(x^{-1}y^{-1}), \nu_A(x^{-1}y^{-1}))\\ &= (\mu_R(x^{-1},y), \nu_R(x^{-1},y)) = R(x^{-1},y),\end{aligned}$$

نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned}&\underline{R}(\sigma)(x)\\ &=(\wedge_{y\in V}[\nu_R(x,y) \vee \mu_\sigma(y)], \vee_{y\in V}[\mu_R(x,y) \wedge \nu_\sigma(y)])\\ &=(\wedge_{y\in V}[\nu_R(x^{-1},y) \vee \mu_\sigma(y)],\\ &\quad \vee_{y\in V}[\mu_R(x^{-1},y) \wedge \nu_\sigma(y)])\\ &= \underline{R}(\sigma)(x^{-1}).\end{aligned}$$

به صورت مشابه می توانیم اثبات کنیم $\overline{R}(\sigma)(x) = \overline{R}(\sigma)(x^{-1})$.

چون $\sigma \leq A$، به ازای هر $x \in G$،

$$\mu_\sigma(x) \leq \mu_A(x) \text{ و } \nu_A(x) \leq \nu_\sigma(x).$$

و بنابراین برای هر $x \in G$ داریم:

$$\begin{aligned}&\underline{R}(\sigma)(x)\\ &=(\wedge_{y\in V}[\nu_R(x,y) \vee \mu_\sigma(y)], \vee_{y\in V}[\mu_R(x,y) \wedge \nu_\sigma(y)])\\ &\leq (\wedge_{y\in V}[\nu_R(x,y) \vee \mu_A(y)], \wedge_{y\in V}[\nu_R(x,y) \vee \mu_A(y)])\\ &= \underline{R}(A)(x)\end{aligned}$$

اکنون با توجه به لم ۳ .۱، چون $\underline{R}(A)(x) \subseteq A(x)$، نتیجه می‌گیریم $\underline{R}(\sigma) \leq A$.

حال فرض کنید $\overline{R}(\sigma)(x) = (\alpha_0, \beta_0)$. در این صورت وجود دارد یک $y \in G$ به طوریکه

$$\mu_R(x,y) \wedge \mu_\sigma(y) \geq \alpha_0, \ \nu_R(x,y) \vee \nu_\sigma(y) \leq \beta_0.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\mu_R(x,y) &= \mu_A(xy^{-1}) \geq \alpha_0, \mu_\sigma(y) \geq \alpha_0,\\ \nu_R(x,y) &= \nu_A(xy^{-1}) \leq \beta_0, \nu_\sigma(y) \leq \beta_0.\end{aligned}$$

از طرفی چون $A \in IF[G]$ و $\mu_A(y) \geq \mu_\sigma(y) \geq \alpha_0$، $\nu_A(y) \leq \nu_\sigma(y) \leq \beta_0$، داریم

$$\begin{aligned}\mu_A(x) &= \mu_A(xy^{-1}y) \geq \mu_A(xy^{-1}) \wedge \mu_A(y) \geq \alpha_0,\\ \nu_A(x) &= \nu_A(xy^{-1}y) \leq \nu_A(xy^{-1}) \vee \nu_A(y) \leq \beta_0.\end{aligned}$$

در نتیجه

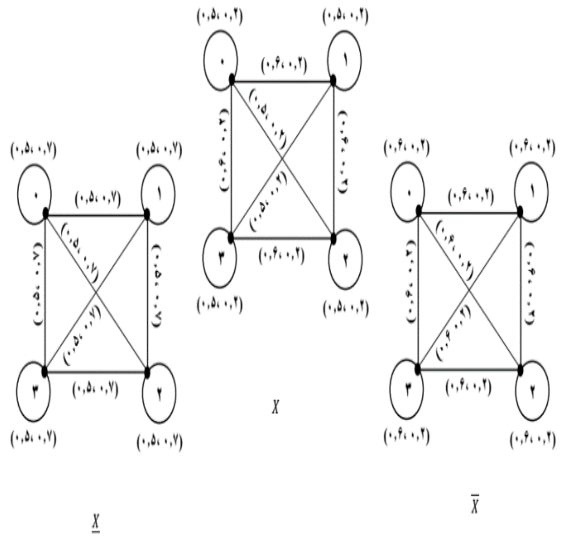
$A(x) = \left(\mu_A(x),\nu_A(x)\right) \ge (\alpha_0,\beta_0) = \overline{R}(\sigma)(x)$.

بنابراین $\overline{X}$ و $\underline{X}$ گراف های کیلی فازی شهودی هستند.

تعریف ۳-۴. فرض کنید $G = Z_4 = \{0,1,2,3\}$ گروه جمعی اعداد صحیح به پیمانه‌ی ۴ باشد و $A \in IF(Z_4)$ به طوریکه $\mu_A(0) = 1$ ،$\mu_A(2) = 0.9$ ،$\mu_A(1) = \mu_A(3) = 0.7$ و برای همه‌ی $x \in Z_4$ ،$\nu_A(x) = 0.2$. $\sigma \subseteq A$ را به صورت زیر در نظر می گیری

$$\mu_\sigma(0) = \mu_\sigma(2) = 0.5, \mu_\sigma(1) = \mu_\sigma(3) = 0.6,$$
$$\nu_\sigma(0) = \nu_\sigma(2) = 0.7,\ \nu_\sigma(1) = \nu_\sigma(3) = 0.2.$$

با یک بررسی نتیجه می گیریم برای هر $x \in G$، $\overline{R}(\sigma)(x) = (0.6,0.2)$ و $\underline{R}(\sigma) = (0.5,0.7)$. گراف‌های کیلی فازی شهودی $X = CayIF(Z_4,A,\sigma)$، $\overline{X}$ و $\underline{X}$ در شکل (۲) نشان داده‌شده‌است.



شکل (۲). گراف های کیلی فازی شهودی X با تقریب های بالا و پایین به ترتیب $\overline{X}$ و $\underline{X}$

تعریف ۳-۵: فرض کنید $A_1, A_2 \in IF[G]$. فرض کنید $X = CayIF(G,A,\sigma)$، $X_1 = CayIF(G,A_1,\sigma_1)$ و $X_2 = CayIF(G,A_2,\sigma_2)$ گراف های کیلی فازی شهودی باشند. در این صورت

۱. $\underline{X} \subseteq X \subseteq \overline{X}$

۲. الف) $\underline{X_1 \cap X_2} = \underline{X_1} \cap \underline{X_2}$

ب) اگر $A_1 \subseteq A_2$

$\underline{X_1 \cup X_2} \supseteq \underline{X_1} \cup \underline{X_2}$

.الف) اگر $A_1 \subseteq A_2$ یا $A_2 \subseteq A_1$

$\overline{X_1 \cup X_2} = \overline{X_1} \cup \overline{X_2}$

ب) $\overline{X_1 \cap X_2} \subseteq \overline{X_1} \cap \overline{X_2}$

. $X_1 \subseteq X_2 \leftrightarrow \underline{X_1} \subseteq \underline{X_2}, \overline{X_1} \subseteq \overline{X_2}$

اثبات: ۱. با توجه به قضیه ی ۲ .۶ و لم ۳ .۱، اثبات واضح است.

۲. الف) با استفاده از قضیه ۱ .۸(b-۲) و قضیه ی ۲. ۵(۲)و داریم

$$\underline{X_1} \cap \underline{X_2} = \mathrm{CayIF}\left(G, A_1, \underline{R}(\sigma_1)\right) \cap \mathrm{CayIF}\left(G, A_2, \underline{R}(\sigma_2)\right)$$
$$= \mathrm{CayIF}\left(G, A_1 \cap A_2, \underline{R}(\sigma_1) \cap \underline{R}(\sigma_2)\right).$$

از طرفی داریم

$$\underline{X_1 \cap X_2} = \mathrm{CayIF}\left(G, A_1 \cap A_2, \underline{R}(\sigma_1 \cap \sigma_2)\right).$$

چون

$$\underline{R}(\sigma_1 \cap \sigma_2) = \underline{R}(\sigma_1) \cap \underline{R}(\sigma_2),$$

بنابراین $\underline{X_1 \cap X_2} = \underline{X_1} \cap \underline{X_2}$.

ب) با توجه به قضیه ۱ .۸(b-۳) نتیجه‌می‌گیریم $\underline{R}(\sigma_1 \cup \sigma_2) \supseteq \underline{R}(\sigma_1) \cup \underline{R}(\sigma_2)$، از این رو با استفاده از قضیه۲ .۵(۱) داریم

$$\underline{X_1 \cup X_2} = \mathrm{CayIF}\left(G, A_1 \cup A_2, \underline{R}(\sigma_1 \cup \sigma_2)\right)$$
$$\supseteq \mathrm{CayIF}\left(G, A_1 \cup A_2, \underline{R}(\sigma_1) \cup \underline{R}(\sigma_2)\right)$$
$$= \mathrm{CayIF}\left(G, A_1, \underline{R}(\sigma_1)\right) \cup \mathrm{CayIF}\left(G, A_2, \underline{R}(\sigma_2)\right)$$
$$= \underline{X_1} \cup \underline{X_2}.$$

۳. با توجه به قضیه ۱ .۸ (a-۲) و (a-۳) اثبات همانند قسمت ۲ می‌باشد.

۴. فرض کنید $X_1 \subseteq X_2$، چون $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ با توجه به قضیه ۱ .۷ (۴) داریم $\underline{R}(\sigma_1) \subseteq \underline{R}(\sigma_2)$ و $\overline{R}(\sigma_1) \subseteq \overline{R}(\sigma_2)$. بنابراین $\underline{X_1} \subseteq \underline{X_2}$ و $\overline{X_1} \subseteq \overline{X_2}$.

۴-گراف‌های شبه کیلی فازی شهودی راف

تعریف ۴-۱. فرض کنید $A \in IF[G]$ و τ یک زیر مجموعه فازی شهودی از A باشد به طوریکه $\tau(x) = \tau(x^{-1})$. برای هر گراف شبه کیلی فازی شهودی $X = PCayIF(G,\tau,\sigma)$، یک زوج تقریب پایین و بالای $\underline{X}'$ و $\overline{X}'$

به صورت زیر تعریف می شود

$$\underline{X}' = PCayIF(G,\underline{R}(\tau),\sigma),\quad \overline{X}' = \mathrm{PCayIF}(G,\overline{R}(\tau)\cap A,\sigma)$$

تعریف ۴ -۲. گراف های فازی شهودی $\underline{X}'$و $\overline{X}'$ گراف های شبه کیلی فازی شهودی هستند.

اثبات: برای هر $x \in G$، داریم

$\underline{R}(\tau)(x)$
$=(\wedge_{y\in V}[\nu_R(x,y)\vee\mu_\tau(y)],\vee_{y\in V}[\mu_R(x,y)\wedge\nu_\tau(y)])$
$=(\wedge_{y\in V}[\nu_R(x^{-1},y)\vee\mu_\tau(y)],$
$\vee_{y\in V}[\mu_R(x^{-1},y)\wedge\nu_\tau(y)])$
$=\underline{R}(\tau)(x^{-1})$

به صورت مشابه می توانیم اثبات کنیم $\overline{R}(\tau)(x) = \overline{R}(\tau)(x^{-1})$.

بنابراین

$$(\overline{R}(\tau)\cap A)(x) = \overline{R}(\tau)(x)\cap A(x) = \overline{R}(\tau)(x^{-1})\cap A(x^{-1}) = (\overline{R}(\tau)\cap A)(x^{-1}).$$

از طرف دیگر چون $\overline{R}(\tau)\cap A \subseteq A$ و $\underline{R}(\tau) \subseteq \tau \subseteq A$، بنابراین $\underline{X}'$و $\overline{X}'$ گراف های شبه کیلی فازی شهودی هستند.

تعریف ۴-۳. گروه جمعی اعداد صحیح به پیمانه ی ۵، $Z_5 = \{0,1,2,3$ و $4\}$ را در نظر می گیریم. فرض کنیم $A = IF(G)$، به طوریکه $\mu_A(0) = 1$، $\mu_A(1) = \mu_A(2) =$ و $\mu_A(3) = \mu_A(4) = 0$ و برای همه ی $x \in Z_5$، $\nu_A(x) = 0.2$. $\sigma \subseteq A$ را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\mu_\sigma(0) = \mu_\sigma(1) = \mu_\sigma(2) = \mu_\sigma(3) = \mu_\sigma(4) = 0.5,$$
$$\nu_\sigma(0) = 0.7,\ \nu_\sigma(1) = \nu_\sigma(4) = 0.4,\ \nu_\sigma(2) = \nu_\sigma(3) = 0.7,$$

و همچنین

$$\mu_\tau(0) = 0.7, \mu_\tau(2) = \mu_\tau(3) = 0.5,$$
$$\mu_\tau(1) = \mu_\tau(4) = 0.6,$$
$$\nu_\tau(0) = \nu_\tau(1) = \nu_\tau(2) = \nu_\tau(3) = \nu_\tau(4) = 0.3,$$

اکنون با یک بررسی مستقیم بدست می آوریم که برای هر $x \in G$، $\overline{R}(\tau)(x) = (0.7,0.3)$ و $\underline{R}(\tau) = (0.5,0.3)$، بنابراین

$$\underline{X}' = PCayIF(Z_5,\underline{R}(\tau),\sigma),$$
$$\overline{X}' = \mathrm{PCayIF}(Z_5,\overline{R}(\tau)\cap A,\sigma)$$

شبه کیلی فازی شهودی‌اند.

تعریف ۴- ۴. فرض کنید

$A \in IF[G]$، $X = PCayIF(G,\tau,\sigma)$، $X_1 = PCayIF(G,\tau_1,\sigma_1)$ و $X_2 = PCayIF(G,\tau_2,\sigma_2)$ گراف های شبه کیلی فازی شهودی باشند. در این صورت داریم

۱. $\underline{X}' \subseteq X \subseteq \overline{X}'$

۲. الف) $\underline{(X_1 \cap X_2)}' = \underline{X_1}' \cap \underline{X_2}'$

ب) اگر $\tau_1 \subseteq \tau_2$

$\underline{(X_1 \cup X_2)}' \supseteq \underline{X_1}' \cup \underline{X_2}'$

۳. الف) اگر $\tau_1 \subseteq \tau_2$ یا $\tau_2 \subseteq \tau_1$

$\overline{(X_1 \cup X_2)}' = \overline{X_1}' \cup \overline{X_2}'$

ب) $\overline{(X_1 \cap X_2)}' \subseteq \overline{X_1}' \cap \overline{X_2}'$

۴. $X_1 \subseteq X_2 \leftrightarrow \underline{X_1}' \subseteq \underline{X_2}',\ \overline{X_1}' \subseteq \overline{X_2}'$.

اثبات: ۱. چون $\underline{R}(\tau) \subseteq \tau$، $\tau \subseteq \overline{R}(\tau)$ و $\tau \subseteq A$، پس $\underline{R}(\tau) \subseteq \tau \subseteq \overline{R}(\tau)\cap A$. حال با استفاده از قضیه ۲ .۶ به سادگی دیده می شود که $\underline{X}' \subseteq X \subseteq \overline{X}'$.

۲. الف) داریم

$$\underline{(X_1 \cap X_2)}' = PCayIF(G,\underline{R}(\tau_1\cap\tau_2),\sigma_1\cap\sigma_2)$$
$$= PCayIF(G,\underline{R}(\tau_1)\cap\underline{R}(\tau_2),\sigma_1\cap\sigma_2)$$
$$= PCayIF(G,\underline{R}(\tau_1),\sigma_1)\cap PCayIF(G,\underline{R}(\tau_2),\sigma_2)$$
$$= \underline{X_1}'\cap\underline{X_2}'.$$

ب)با توجه به قضیه ۱ .۸(b-۳) نتیجه می‌گیریم $\underline{R}(\tau_1\cup\tau_2) \supseteq \underline{R}(\tau_1)\cup\underline{R}(\tau_2)$. اکنون با استفاده از قضیه۲ .۷(۱) داریم

$$\underline{(X_1 \cup X_2)}' = PCayIF(G,\underline{R}(\tau_1\cup\tau_2),\sigma_1\cup\sigma_2)$$
$$\supseteq PCayIF(G,\underline{R}(\tau_1)\cup\underline{R}(\tau_2),\sigma_1\cup\sigma_2)$$
$$= PCayIF(G,\underline{R}(\tau_1),\sigma_1)\cup CayIF(G,\underline{R}(\tau_2),\sigma_2)$$
$$= \underline{X_1}'\cup\underline{X_2}'.$$

۳. الف) داریم

$$\overline{(X_1 \cup X_2)}' = PCayIF(G,\overline{R}(\tau_1\cup\tau_2)\cap A,\sigma_1\cup\sigma_2)$$
$$= PCayIF(G,(\overline{R}(\tau_1)\cap A)\cup(\overline{R}(\tau_2)\cap A),\sigma_1\cup\sigma_2)$$
$$= PCayIF(G,\overline{R}(\tau_1)\cap A,\sigma_1)\cup PCayIF(G,\overline{R}(\tau_2)\cap A,\sigma_2)$$
$$= \overline{X_1}'\cup\overline{X_2}'.$$

ب)

$$\overline{(X_1 \cap X_2)}' = PCayIF\big(G, \overline{R}(\tau_1 \cap \tau_2) \cap A, \sigma_1 \cap \sigma_2\big)$$

$$\subseteq PCayIF\big(G, (\overline{R}(\tau_1) \cap A) \cap (\overline{R}(\tau_2) \cap A), \sigma_1 \cap \sigma_2\big)$$

$$= PCayIF\big(G, \overline{R}(\tau_1) \cap A, \sigma_1\big) \cap PCayIF\big(G, \overline{R}(\tau_2) \cap A, \sigma_2\big)$$

$$= \overline{X_1}' \cap \overline{X_2}'.$$

۴. اگر که $X_1 \subseteq X_2$ آنگاه $\tau_1 \subseteq \tau_2$ و $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$. بنابراین $\underline{R}(\tau_1) \subseteq \underline{R}(\tau_2)$ و $\overline{R}(\tau_1) \cap A \subseteq \overline{R}(\tau_2) \cap A$، پس نتیجه می گیریم $\underline{X_1}' \subseteq \underline{X_2}'$, $\overline{X_1}' \subseteq \overline{X_2}'$.

تعریف ۴-۵. برای هر گراف شبه کیلی فازی شهودی $X = PCayIF(G, \tau, \sigma)$، یک زوج تقریب پایین و بالای $\underline{X}''$ و $\overline{X}''$ به صورت زیر تعریف می شود،

$$\underline{X}'' = PCayIF\left(G, \underline{R}(\tau), \underline{R}(\sigma)\right),$$

$$\overline{X}'' = PCayIF\big(G, \overline{R}(\tau) \cap A, \overline{R}(\sigma)\big).$$

تعریف ۴ -۶. گراف های فازی شهودی $\underline{X}''$و $\overline{X}''$ گراف های شبه کیلی فازی شهودی هستند.

اثبات: با توجه به قضیه‌ی ۴ .۲، $\underline{R}(\tau) \subseteq \overline{R}(\tau) \cap A \subseteq A$، $\tau \subseteq A$، $\underline{R}(\tau)(x) = \underline{R}(\tau)(x^{-1})$ و $(\overline{R}(\tau) \cap A)(x) = (\overline{R}(\tau) \cap A)(x^{-1})$.

نشان می دهیم که $\underline{X}''$ و $\overline{X}''$ در شرایط تعریف ۲ .۳ صدق می کند. به ازای هر $x \in G$ داریم

$$\overline{R}(\sigma)(x)$$
$$=(\vee_{y \in V}[\mu_R(x,y) \wedge \mu_A(y)], \wedge_{y \in V}[\nu_R(x,y) \vee \nu_A(y)])$$
$$=(\vee_{y \in V}[\mu_R(x^{-1},y) \wedge \mu_A(y)], \wedge_{y \in V}[\nu_R(x^{-1},y) \vee \nu_A(y)])$$
$$= \overline{R}(\sigma)(x^{-1}).$$

به صورت مشابه می توانیم اثبات کنیم $\overline{R}(\sigma)(x) = \overline{R}(\sigma)(x^{-1})$.

تعریف ۴ -۷. گروه جمعی اعداد صحیح به پیمانه‌ی ۳، $G = Z_3 = \{0,1,2\}$ را در نظر می گیریم. فرض کنید $A \in IF(G)$ به طوریکه $\mu_A(0) = 1$، $\mu_A(1) = \mu_A(2) = 0.9$ و $\nu_A(0) = 0.3, \nu_A(1) = \nu_A(2) = 0.2$. $\sigma \subseteq A$ را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\mu_\sigma(0) = 0.4, \mu_\sigma(1) = \mu_\sigma(2) = 0.5,$$
$$\nu_\sigma(0) = \nu_\sigma(1) = \nu_\sigma(2) = 0.7,$$

و هچنین فرض کنید $\tau \subseteq A$ به طوریکه

$$\mu_\tau(0) = 0.8, \mu_\tau(1) = \mu_\tau(2) = 0.6,$$
$$\nu_\tau(0) = 0.4, \nu_\tau(1) = \nu_\tau(2) = 0.3.$$

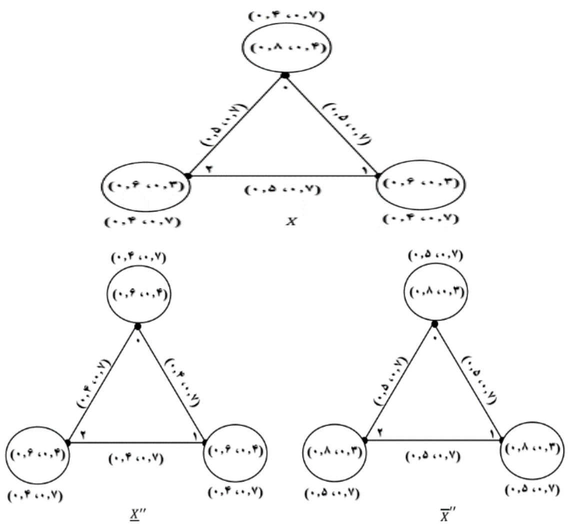
بنابراین برای هر $x \in G$،

$$\underline{R}(\tau) = (0.6, 0.4) \text{ و } \overline{R}(\tau)(x) = (0.8, 0.3).$$

همچنین

$$\underline{R}(\sigma) = (0.4, 0.7) \text{ و } \overline{R}(\sigma)(x) = (0.5, 0.7).$$

پس نتیجه می گیریم که گراف شبه کیلی فازی شهودی $X = PCayIF(Z_3, A, \sigma)$ و تقریب های بالا و پایین آن $\overline{X}''$ و $\underline{X}''$ در شکل (۳) نشان داده شده است.



شکل (۳). گراف شبه کیلی فازی شهودی $X = PCayIF(Z_3, A, \sigma)$ و تقریب های بالا و پایین آن به ترتیب $\overline{X}''$ و $\underline{X}''$.

تعریف ۴ -۸. فرض کنید G یک گروه و $A \in IF[G]$. فرض کنید $X = PCayIF(G, \tau, \sigma)$، $X_1 = PCayIF(G, \tau_1, \sigma_1)$ و $X_2 = PCayIF(G, \tau_2, \sigma_2)$ گراف های شبه کیلی فازی شهودی باشند. دراین صورت

۱. $\underline{X}'' \subseteq X \subseteq \overline{X}''$

۲. $\underline{(X_1 \cap X_2)}'' = \underline{X_1}'' \cap \underline{X_2}''$

۳. $\overline{(X_1 \cap X_2)}'' \subseteq \overline{X_1}'' \cap \overline{X_2}''$

۴. $X_1 \subseteq X_2 \leftrightarrow \underline{X_1}'' \subseteq \underline{X_2}'', \overline{X_1}'' \subseteq \overline{X_2}''$

اثبات: ۱. چون $\underline{R}(\tau) \subseteq \tau$، $\tau \subseteq \overline{R}(\tau)$ و $\tau \subseteq A$، داریم $\underline{R}(\tau) \subseteq \tau \subseteq \overline{R}(\tau) \cap A$. همچنین از $\underline{R}(\sigma) \subseteq \sigma \subseteq \overline{R}(\sigma)$ نتیجه می گیریم

$$\underline{X}'' = PCayIF\left(G, \underline{R}(\tau), \underline{R}(\sigma)\right)$$
$$\subseteq X = PCayIF(G, \tau, \sigma)$$
$$\subseteq \overline{X}'' = PCayIF\left(G, \overline{R}(\tau) \cap A, \overline{R}(\sigma)\right).$$

۲. با بررسی مستقیم داریم:

$$\underline{(X_1 \cap X_2)}'' = PCayIF\left(G, \underline{R}(\tau_1 \cap \tau_2), \underline{R}(\sigma_1 \cap \sigma_2)\right)$$
$$= PCayIF\left(G, \underline{R}(\tau_1) \cap \underline{R}(\tau_2), \underline{R}(\sigma_1) \cap \underline{R}(\sigma_2)\right)$$
$$= PCayIF\left(G, \underline{R}(\tau_1), \underline{R}(\sigma_1)\right) \cap PCayIF\left(G, \underline{R}(\tau_2), \underline{R}(\sigma_2)\right)$$
$$= \underline{X_1}'' \cap \underline{X_2}''.$$

۳.داریم:

$$\overline{(X_1 \cap X_2)}''$$
$$= PCayIF\left(G, \overline{R}(\tau_1 \cap \tau_2) \cap A, \overline{R}(\sigma_1 \cap \sigma_2)\right)$$
$$\subseteq PCayIF\left(G, (\overline{R}(\tau_1) \cap \overline{R}(\tau_2)) \cap A, \overline{R}(\sigma_1) \cap\right.$$
$$= PCayIF\left(G, \overline{R}(\tau_1) \cap A, \overline{R}(\sigma_1)\right) \cap \quad \left.\overline{R}(\sigma_2)\right)$$
$$\left. PCayIF(G, \overline{R}(\tau_2) \cap A, \overline{R}(\sigma_2)\right)$$
$$= \overline{X_1}'' \cap \overline{X_2}''.$$

۴. با یک بررسی ساده به سادگی اثبات می شود.

۵-مراجع

[1] M. Akram, M. G. Karunambigal and O.K. Kaluivani, “Cayley intutionistic fuzzy graphs,” J. Appl. Math. Informationes, vol. 32 No. 5-6, pp. 827-842, 2014.

[2] M. Akram, B. Davvaz, “Strong intuitionistic fuzzygraph, ”Filomat 26, 177-196, 2012.

[3] M. Akram, W. A. Dudek, “Intuitionistic fuzzy hypergraphs with applications,” Information Science, 218, 182-193, 2013.

[4] M. Akram and N. O. Alyshehrie, “Intuitionistic fuzzy cycles and Intuitionistic fuzzy trees,” The Scientific Word Journal, vol. 2014, Article ID 305-836, 11 Pages, 2014.

[5] K. T. Atanassov, “Intuitionistic fuzzy sets”, Fuzzy Set and Systems, 20, 87-96, 1986.

[6] K. T. Atanassov, H. Prade, “New operations defined over the intuitionistic fuzzy sets”, Fuzzy Set and Systems, 61, 137-142, 1994.

[7] N.O. Alshehri, M. Akram, “Cayley bipolar fuzzy graphs,” The scientific world journal, Vo Article 156786, 8 pages, 2013.

[8] D. Dubois, H. Prade, “Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets,” International Journal of General Systems 17, 191-208, 1990.

[9] N. Kuroki, P. P. Wang, “The lower and upper approximations in a fuzzy group,” Inform. Sci. 90,203-220, 1996.

[10] N. Kuroki, J. N. Modeson, “Structures of rough sets and rough groups,” J. Fuzzy Math. 5(1), 183-191, 1997.

[11] J. N. Mordeson, P. S. Nair, “Fuzzy graphs and fuzzy hypergraphs,” 2nd edition eidelberg, Germany, Phisica, 2001.

[12] O.M. Mourad, “Structure Properties of Intuitionistic Anti-Fuzzy M-Subgroups,” Journal of Applied Computer Science and Mathematics,761, 137-142, 1994.

[13] R. Parvathi, N. G. Karunambigai, T. Atanassov, “Operations on intuitionistic fuzzy graphs,” Fuzzy systems, Fuzzy-IEEE 2009, IEEE International Conference 1396-1401, 2009.

[14] N. Palaniappan, K. Arjunan, M. S. Anitha, “The Homomorphism and Anti homomorphism of Lower Level Subgroups of an Intuitionistic Anti-Fuzzy Subgroups,” NIFS 15, 14-19, 2009.

[15] Z. Pawlak, “Rough sets,” International Journal of Computer and Information Sciences, 11, 341-356, 1982.

[16] Z. Pawlak, “Rough Sets”, Kluwer Publications, 1991.

[17] Z. Pawlak, “Rough Set,” approach knowledge-based decision support European Journal of operational research, 99, 48-57, 1997.

[18] Z. Pawlak, “Rough Sets and Flow Graphs, Rough Sets, Fuzzy Sets,” Data Mining and Granular Computing, Springer, 3641, 1-11, 2005.

[19] A. Rosenfeld, “Fuzzy groups”, J. Math. Anal. Appl. 35, 512-517, 1911.

[20] A. Rosenfeld, “Fuzzy graphs in: L. A. Zadeh, Fu, M. Shimura (Eds) Fuzzy sets and their Applications,” Academic Press, NewYork, 77-95, 1975.

[21] H. Rashmanlou, S. Samanta, M. Pal, R. A. Borzooei, “Intuitionistic Fuzzy Graphs With Categorical Properties,” Fuzzy Inf. Eng., 7, 317-334, 2015.

[22] M. H. Shahzamanian, M. Shirmohammadi, B. Davvaz, “Roughness in cayley graphs,” Information Sciences 180, 3362-3372, 2010.

[23] A. Skowron and L. Polkowski, ”Rough Sets in Knowledge Discovery. Berlin, Germany”: Springer-Verlag, 1, 2, 1998.

[24] R. Slowinski, Ed. Kluwer, “Intelligent Decision Support:” Handbook of Applications and Advances of the Rough Sets Theory, Norwell, MA, 1992.

[25] B Sun, W Ma and Q Liu, “An approach to decision making based on intuitionistic fuzzy rough sets over two universes,” Journal of the Operational Research Society 64, 1079-1089, 2013..

[26] A. A. Talebi, “Cayley fuzzy graphs on the fuzzy groups,” Computational and Applied Mathematics 37, 4611-4632, 2018.

[27] A. A. Talebi, S. Omidbakhsh, “Cayley bipolar fuzzy graphs associated with bipolar fuzzy graphs” accepted.

[28] Wei-Zhi Wu. Ju-Sheng Mi, Zhang Wen-Xiu, “Generalized fuzzy rough sets,” Inform. Sci. 151,263-282, 2003.

[29] L. A. Zadeh, “Fuzzy sets,” Inform and control 8, 338-353, 1965.

[30] L. Zhou, W. Zhi Wu and Zhang Wen-Xiu, "On intuitionistic fuzzy rough sets and their topological structures," International Journal of General Systems, 589-616, 2009.

[31] Bing Zhou, Xiaohong Zhang, Peng Li, A general frame for intuitionistic fuzzy rough set. Information sciences 21,634-49, 2012.

[32] W. P. Ziarko, "Rough sets, fuzzy sets and knowledge discovery," in Workshop in Com. uting,Ed. London, U. K., 1994.