مجله علمی- پژوهشی "پدافند الکترونیکی و سایبری"
ویژه‌نامه ترکیبیات، رمزنگاری و محاسبات، ص ۱۹۵ -۱۹۳

روش تفاضلات متناهی برای معادله غیرخطی فیشر کسری-زمان

الهبخش یزدانی چراتی[1*]، زهره عظیمی[2]، محمود بدر[3]

۱- استادیار دانشگاه مازندران، ۲- کارشناس ارشد دانشگاه مازندران، ۳- دکتری دانشگاه مازندران
(دریافت: ۱۳۹۷/۰۸/۲۵ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۷/۰۲)

چکیده

در این مقاله، یک طرح تفاضلی برای حل یک معادله غیر خطی فیشر کسری-زمان با مشتق کسری کاپاتو را ارائه می‌دهیم. این طرح، پایدار مشروط و همگرا است و یک مثال عددی با دانستن جواب دقیق نیز ارائه شده است. نتایج تحلیلی بر اساس طرح پیشنهادی ارائه شده تائید می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: روش تفاضلات متناهی، معادله فیشر کسری-زمان، مشتق کاپاتو، پایداری، همگرایی.

۱- مقدمه

اغلب مسائل در علوم و مهندسی مانند الکترونیک، مکانیک، انتقال حرارت و ... به صورت معادلات دیفرانسیل جزئی کسری مدل می‌شود. استفاده از مدل‌های ریاضی و بهینه‌سازی در مسائل نظامی اثر قابل توجهی در مسائل تصمیم‌گیری و مکان‌یابی دارد [۵]. در سال‌های ۱۶۶۷، نیوتن و لایب نیتز، کاربردهای زیادی از حسابان کسری را بررسی کرده‌اند. آبل، در سال ۱۸۶۸، مسئله‌ی فیزیکی خود را که حل آن به حل یک معادله دیفرانسیل کسری می‌رسد، حل کرد و امروزه به دلیل کاربرد زیاد معادلات دیفرانسیل کسری، توجه ویژه‌ای را به خود جلب کرده است [۲]. برخی از این معادلات دیفرانسیل را می‌توان با روش‌های تحلیلی حل کرد و جواب دقیق آن‌ها را یافت ولی در عمل، تعداد زیادی از این معادلات را نمی‌توان به روش‌های تحلیلی حل کرد. از این رو از روش‌های عددی برای محاسبه جواب تقریبی آن‌ها استفاده می‌کنیم [۱]. برای به دست آوردن طرحی عددی، مشتقات کسری موجود در معادله با استفاده از مفهوم مشتق و انتگرال، مانند گرانوالد-لتنیکف، ریمان-لیوویل و کاپاتو جایگزین می‌شوند و سپس طرح تفاضلی را گسسته‌سازی می‌کنیم. در این مقاله، با استفاده از روش تفاضل متناهی و با جایگزینی مشتق کسری کاپاتو ، یک طرح تفاضلی برای معادله دیفرانسیل کسری زیر پیشنهاد می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+u(x,t)(1-u(x,t))+F(x,t), \qquad 0<x<L, 0<t<T,\\
&u(x,0)=f(x), \qquad 0\le x\le L, \qquad\qquad (1)\\
&u(0,t)=g_1(t), \qquad u(L,t)=g_2(t), \qquad 0<t\le T.
\end{aligned}
$$

که در آن $0<\alpha<1$ و $\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha}$ مشتق مرتبه کسری کاپاتو می‌باشد و به صورت زیر است [۳]:

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-\eta)^{-\alpha}\,\frac{\partial u(x,\eta)}{\partial \eta}\,d\eta$$

۲-طرح تفاضلی پیشنهادی

برای بدست آوردن تقریب عددی، فرض می‌کنیم که $t_k=k\tau(k=0,1,\ldots,n)$ و $0<t_k\le T$ و $\tau=\frac{T}{n}$ و همچنین فرض می‌کنیم $x_i=ih(i=0,1,\ldots,m)$ که $h=\frac{L}{m}>0$. گسسته‌سازی برای معادله (۱) به صورت زیر خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
\partial^\alpha u(x_i,t_{k+1})&=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{j=0}^{k}\frac{u(x_i,t_{j+1})-u(x_i,t_j)}{\tau}\int_{j\tau}^{(j+1)\tau}\frac{d\zeta}{(t_{k+1}-\zeta)^\alpha}+O(\tau) \qquad (۲)\\
&=\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{j=0}^{k}\frac{u(x_i,t_{k-j+1})-u(x_i,t_{k-j})}{\tau}[(j+1)^{1-\alpha}-j^{1-\alpha}]+O(\tau)
\end{aligned}
$$

[1] رایانامه نویسنده مسئول: yazdani@umz.ac.ir

$$\frac{\partial^2 u(x_i,t_{k+1})}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i-1},t_{k+1})-2u(x_i,t_{k+1})+u(x_{i+1},t_{k+1})}{h^2}+O(h^2)$$

(۳)

با جایگذاری معادله‌ی (۲) و (۳) در (۱) داریم:

$$\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{j=0}^{k}\frac{u(x_i,t_{k-j+1})-u(x_i,t_{k-j})}{\tau}[(j+1)^{1-\alpha}-j^{1-\alpha}] = \frac{u(x_{i-1},t_{k+1})-2u(x_i,t_{k+1})+u(x_{i+1},t_{k+1})}{h^2} + u(x_i,t_{k+1})(1-u(x_i,t_{k+1}))$$

حال با در نظر گرفتن $\sigma_j=(j+1)^{1-\alpha}-j^{1-\alpha}$ برای هر $j=0,1,...,n$ قرار می‌دهیم $r=\frac{\tau^{\alpha}}{h^2}\Gamma(2-\alpha)$ و $p=\tau^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)$، پس از گسسته سازی به معادله زیر خواهیم رسید که در آن $u_i^k := u(x_i,t_k)$ جواب تقریبی معادله (۱) می‌باشد:

$$\sum_{j=0}^{k}\sigma_j(u_i^{k+1-j}-u_i^{k-j})-ru_{i-1}^{k+1}+2u_i^{k+1} - ru_{i+1}^{k+1}-pu_i^{k+1}+p(u_i^{k+1})^2=0 \quad (۴)$$

معادله‌ی (۴) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

برای $k=0$:

$$-ru_{i-1}^1+(1+2r-p+pu_i^1)u_i^1-ru_{i+1}^1 = f_i^1+u_i^0 \quad (۵)$$

و برای $k>0$:

$$-ru_{i-1}^{k+1}+(1+2r-p+pu_i^{k+1})u_i^{k+1}-ru_{i+1}^{k+1} = \sum_{j=1}^{k}d_j u_i^{k-j+1}+\sigma_k u_i^0 \quad (۶)$$

حال چون معادلات (۵) و (۶) دارای یک عبارت غیرخطی هستند، می‌توان از روش نیوتن برای حل این معادلات و بدست آوردن جواب تقریبی استفاده کرد.

۳-پایداری و همگرایی طرح پیشنهادی

در این بخش، به بررسی شرط پایداری طرح تفاضلی و همگرایی آن می‌پردازیم.

قضیه: طرح تفاضلی (۵) و (۶) همگرا و به صورت مشروط پایدار است.

اثبات: با توجه به معادله (۵) داریم:

$$-ru_{i-1}^1+(1+2r-p+pu_i^1)u_i^1-ru_{i+1}^1 = f_i^1+u_i^0$$

حال با جایگزینی $u_i^m=\upsilon e^{im\rho}\,(i:=\sqrt{-1})$ در معادله فوق به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$\begin{aligned}
&-r\upsilon e^{i(m-1)\rho}+(1+2r-p+p\upsilon e^{im\rho})\upsilon e^{im\rho}-r\upsilon e^{i(m+1)\rho}=re^0\\
&\Rightarrow -\frac{1}{h^2}(e^{-i\rho}+e^{+i\rho})\upsilon+(r+\frac{2}{h^2}-1+\sigma)\upsilon=r\\
&\Rightarrow \upsilon[-\frac{1}{h^2}(2\cos\rho)+(r+\frac{2}{h^2}-1+\sigma)]=r\\
&\Rightarrow \upsilon=\frac{r}{r+\frac{2}{h^2}-1+\sigma-\frac{2}{h^2}(\cos\rho)}
\end{aligned}$$

چون برای پایداری باید $|\upsilon|\le 1$ براحتی می‌توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned}
&|\upsilon|=|\frac{r}{r+\frac{2}{h^2}-1+\sigma-\frac{2}{h^2}\cos\rho)}|\le 1\\
&\Rightarrow \frac{4}{h^2}-1+\sigma>0 \Rightarrow \sigma>1-\frac{4}{h^2}
\end{aligned}$$

بنابراین روش تقریبی (۵) و (۶) برای حل معادله (۱) پایدار مشروط است. برای همگرایی فرض می‌کنیم u_i^k و $\tilde{u}_i^k$ برای $i=1,2,...,m, k=1,2,...n$ به ترتیب جواب دقیق و جواب تقریبی معادله (۱) باشند. با در نظر گرفتن $e_i^k=\tilde{u}_i^k-u_i^k$ و $u_i^k=u(x_i,t_k)$، یک ثابت M مستقل از h و τ وجود دارد به طوری که برای هر $k=1,2,...,n$ داریم [۴]:

$$\| e^k \|_\infty \le M(\tau + h),$$

که در آن

$$\| e^k \|_\infty = \max_{1\le i\le m}|e_i^k|$$

این رابطه نشان می‌دهد که طرح پیشنهاد شده دارای دقتی از مرتبه یک نسبت به زمان و مکان است.

۳-۲-مثال عددی

معادله فیشر کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial^{\alpha}u(x,t)}{\partial t^{\alpha}}=\frac{\partial^{2}u(x,t)}{\partial x^{2}}+u(x,t)(1-u(x,t))$$
$$+f(x,t) \qquad ,0<x<L, \qquad 0<t<T,$$
$$u(x,0)=0, \qquad 0\le x\le L$$
$$u(0,t)=0, \qquad u(L,t)=0, \qquad 0<t\le T$$

جواب دقیق این مسئله به صورت $u(x,t)=tx(1-x)$ و

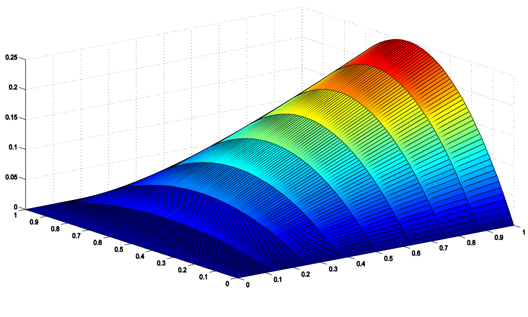
$$f(x,t)=\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}xt(1-x)$$
$$+t^{2}x^{4}-2t^{2}x^{3}+t^{2}x^{2}+tx^{2}-tx+2t$$

در این مثال، در جدول (۱)، $h=0.001$ و $\alpha=0.05$ در نظر گرفته شده است:

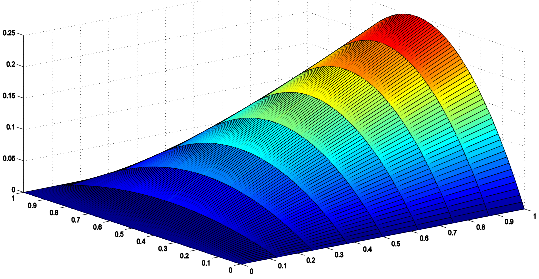
جدول (۱). خطای نرم-۲ و مرتبه همگرایی

ردیف	τ	خطای نرم-۲	مرتبه همگرایی
۱	0.5	0.14477×10^{-1}	-
۲	0.25	0.45047×10^{-2}	1.71
۳	0.125	0.160149×10^{-1}	1.83
۴	0.0625	0.59301×10^{-1}	1.89

از پیاده‌سازی طرح تفاضلی پیشنهادی روی معادله‌ی (۱)، جواب عددی قابل قبولی حاصل می‌شود. برای درک بهتر این نتیجه، در شکل (۱) و (۲)، جواب تقریبی و جواب دقیق را آورده‌ایم.



شکل (۱). جواب تقریبی برای $m=n=100$.



شکل (۲). جواب دقیق

در شکل (۱) و (۲) مشاهده می‌شود که جواب تقریبی و دقیق در حالت $m=n=100$، بسیار به هم نزدیک‌اند.

۴- نتیجه گیری

در این مقاله، برای حل معادلات دیفرانسیل کسری جزئی با شرایط اولیه و مرزی، یک روش جدید با استفاده از روش تفاضلات متناهی پیشنهاد شد که دارای پایداری مشروط و همگرا است. در این طرح تفاضلی مشتق کسری نسبت به زمان، کاپاتو در نظر گرفته شد. در نهایت، مثالی ارائه کردیم که مرتبه همگرایی را تائید می‌کند. نتایج عددی به دست آمده از حل معادله دیفرانسیل کسری (۱) نشان از مفید بودن طرح پیشنهادی و کارائی این طرح برای حل این دسته از معادلات است.

۵- مراجع

[1] A. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, “Theory and applications of fractional differential equations,” vol. 204, Elsevier Science Limited, 2006.

[2] K. S. Miller and B. Ross, “An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations,” 1993.

[3] I. Podlubny, “Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications,” Elsevier, vol. 198, 1998.

[4] Y. Zhang, “A finite difference method for fractional partial differential equation,” Applied Mathematics and Computation, vol. 215, no. 2, pp. 524-529, 2009.

[5] M. Peymankar, M. Ranjbar, A. Izadipour, and S. Balouchian, “Modelling and Solving the Location Problem of Fire Launching Sites,” Ferdowsi University of Mashhad, vol. 6, no. 3, 2017. (In Persian)