مجله علمی- پژوهشی "پدافند الکترونیکی و سایبری"
ویژه‌نامه ترکیبیات، رمزنگاری و محاسبات، ص ۲۱۶-۲۱۳

گراف‌های دوری صحیح چندبخشی

ژیلا عباسی[۱]، غلامرضا صفاکیش همدانی[۲*]

۱ – دانشجوی کارشناسی ارشد، ۲ – استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم، گروه ریاضی، دانشگاه بوعلی همدان

(دریافت: ۱۳۹۷/۰۸/۲۵ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۷/۰۲)

چکیده

در این مقاله، گراف‌های دوری صحیح چندبخشی ICG (n, D) از مرتبه دلخواه n، که n عدد صحیح مثبتی است را مشخص می‌کنیم. در این‌جا ICG (n, D) گرافی است که رئوس آن اعضای گروه $\mathbf{Z_n}$ است و یال‌های آن مجموعه $\{\{\mathbf{a}\,,\mathbf{b}\}\colon \mathbf{a}\,,\mathbf{b}\ \in\ \mathbf{Z_n}\ ,\ \mathbf{gcd}(\mathbf{a}-\mathbf{b}\,,\mathbf{n}) \in \mathbf{D}\}$ می‌باشد و D مجموعه‌ای از مقسوم علیه‌های مثبت عدد صحیح n است. این دسته از گراف‌ها را به دلیل فرم مجموعه یال‌های آن، گراف‌های ب.م.م می‌نامیم. گراف دوبخشی G گرافی است که مجموعه رئوس آن را بتوان به دو زیر مجموعه X,Y طوری افراز کرد که هیچ دو رأسی در X و هیچ دو رأسی در Y مجاور نباشند. گراف دوبخشی را کامل گوییم هرگاه هر رأس در X، به تمام رئوس Y متصل باشد. این گراف را با $\mathbf{K_{m,n}}$ نمایش می‌دهیم، اگر $|\mathbf{X}| = \mathbf{m}$ و $|\mathbf{Y}| = \mathbf{n}$. گراف‌های چندبخشی، نیز مانند گراف دوبخشی تعریف می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: گراف کیلی، گراف صحیح، گراف دوری، گراف چندبخشی

۱- مقدمه

در سال ۲۰۰۷ کلوتز[۱] و تی ساندر[۲] با توسیع مفهوم گراف کیلی یکه، گراف ب.م.م را با مجموعه رئوس $\mathbf{Z_n}$ و مجموعه یال‌های $\{\{a\,,b\}\colon a\,,b\ \in\ Z_n, \gcd(a-b\,,n) \in D\}$، تعریف کردند. سو[۳] در سال ۲۰۰۵ نشان داد که هر گراف دوری صحیح با یک گراف ب.م.م، متناظر است.

گراف G را صحیح گوییم، هرگاه مقادیر ویژه ماتریس مجاورت آن، A(G) صحیح باشد به عبارتی تمام مقادیر ویژه، صحیح باشد. به‌عنوان مثال گراف کامل K_n با طیف (n-1, -1, …, -1)، یک گراف صحیح است. گراف G را دوری گویند هرگاه A(G) دوری باشد.

۲ – گراف‌های کیلی

گراف‌های کیلی اولین بار توسط آرتور کیلی[۴] مطرح شد. این گراف‌ها در واقع نمایش شهودی ساختار یک گروه هستند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف ۲-۱: فرض کنیم G گروهی با عضو همانی ۱ باشد و زیرمجموعه $S \subseteq G$ را در نظر بگیرید که $1 \notin S$ و در ضمن نسبت به وارون‌گیری بسته باشد، در این صورت گراف کیلی
X=Cay (G,S)
گرافی است که مجموعه رئوس آن V(X) = G و مجموعه یال‌های آن:

$$E(X) = \left\{\{\mathbf{a}\,,\mathbf{b}\}\colon \mathbf{a}\,\mathbf{b}^{-1}\ \in\ S\right\}$$

باشد.

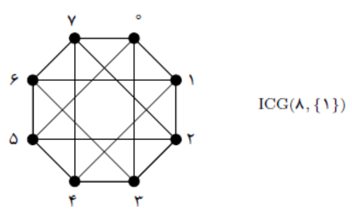
گراف‌های ب.م.م دسته‌ای خاص از گراف‌های کیلی هستند که به‌ازای $\mathbf{G} = \mathbf{Z_n}$ و زیرمجموعه:

$$S = \{x\colon x\ \in \mathbf{Z_n}, \gcd(x,n) \in D\}$$

به‌دست می‌آیند. توجه داشته باشید که گراف ICG (n,D) در حالتی که $n \in D$، طوقه دارد، از این‌رو، فرض می‌کنیم:

$$D \subseteq D^*(n) \coloneqq \{d > 0 \colon d|n, d\ < n\}$$

مثال ۲-۲: گراف‌های ICG (8,{1}) در شکل (۱) و گراف‌های ICG (6,{1,3}) و ICG (6,{2,3}) در شکل (۲) رسم شده‌اند:



شکل (۱): ساختار گراف ICG (8,{1}).

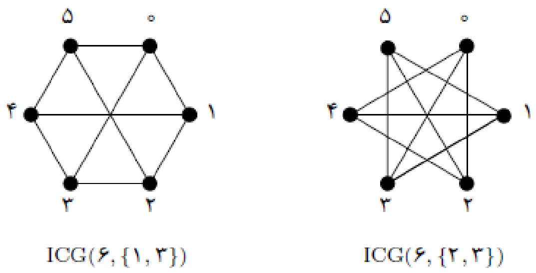
قضیه ۲-۳: گراف ICG (n,D) منظم از درجه $\sum_{d\in D} \varphi(\frac{n}{d})$

*رایانامه نویسنده پاسخگو: safakish@basu.ac.ir

[1] W. Klotz
[2] T. Sander
[3] W. So
[4] A. Cayley

است که در آن، φ تابع اویلر است.

برهان: رجوع شود به [۳].



شکل (۲): گراف‌های ICG (6,{1,3}) و ICG (6,{2,3})

قضیه ۲-۴: مقادیر ویژه گراف ICG (n,D) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\lambda_k(n,D)=\sum_{d\in D}\mu\left(\frac{n}{\gcd(kd,n)}\right)\frac{\varphi(n/d)}{\varphi\left(\frac{n}{\gcd(kd,n)}\right)}$$

که در آن، φ و μ به ترتیب توابع اویلر و موبیوس می‌باشند.

برهان. به مرجع[۲] مراجعه شود.

قضیه ۲-۵: گراف ICG (n,D) که $D=\{d_1,\dots,d_r\}$، همبند است اگر و تنها اگر:

$\gcd(n,d_1,\dots,d_r)=1.$

برهان: می‌دانیم که ICG (n,D) گراف کیلی است که در آن:

$S=\{x:\gcd(x,n)\in D\}$.

گراف همبند است اگر و تنها اگر مجموعه S مولد گروه G باشد؛ از طرفی می‌دانیم که مجموعه $\langle m\rangle$ مولد Z_n است اگر و تنها اگر gcd (m,n)=1. در نتیجه S مولد Z_n است اگر و تنها اگر اعضای S نسبت به n اول باشند که معادل با تساوی $\gcd(n,d_1,\dots,d_r)=1$ است.

تعریف ۲-۶: فرض کنیم G گرافی دوری با ماتریس مجاورت $A(G)=[a_{ij}]$ و مجموعه رئوس {0, …, n-1} باشد. نماد یا مجموعه دوری گراف G را با S(G) نمایش داده و به‌صورت $S(G)=\{k: a_{0,k}=1\}$ تعریف می‌کنیم.

حال بررسی می‌کنیم که گراف ICG (n,D) در صورتی که همبند نباشد به چه صورت خواهد بود. در اثبات قضیه زیر از این نکته استفاده می‌کنیم که مؤلفه‌های همبندی در گراف‌های کیلی، یک‌ریخت اند.

قضیه ۲-۷: گراف ICG (n,D) برابر اجتماعی از گراف‌های کامل است اگر و تنها اگر n =ct و

$D=\{rc: r\ge 1, rc\,|n\}$.

برهان. اگر n=ct و $D=\{rc: r\ge 1, rc\,|n\}$، آنگاه:

$S(G)=\{x:\gcd(x,n)\in D\}=\{c,2c,\dots,ct\}$

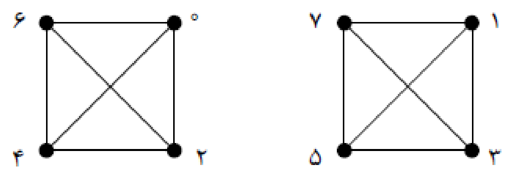
مشاهده می‌کنیم که $|S(G)|=t$ و هر دو عضو از S(G) مجاورند. بنابراین، زیرگراف شامل رأس ۰ گرافی کامل است؛ چون ICG (n,D) گرافی منتظم است، در نتیجه سایر مؤلفه‌های همبندی هم زیر گرافی کامل هستند.

برعکس فرض کنید ICG (n,D) و H مؤلفه شامل رأس ۰ باشد که $D=\{d_1,\dots,d_l\}$ و $d_1\le d_2\le\cdots\le d_l$. چون H گراف کامل است، صفر به تمام d_iها در H متصل است. از این‌رو، تمام d_iها رأسی از H هستند. از طرفی $d_2\sim d_1$، بنابراین: $\gcd(d_2-d_1,n)\in D$. چون $d_2-d_1<d_2$، لازم است که $\gcd(d_2-d_1)=d_1$ و درنتیجه $d_1|\ d_2$. مشابهاً $\gcd(d_3-d_2,n)$ که لازم است

$\gcd(d_3-d_2,n)\in\{d_1,d_2\}$.

که در هر صورت نتیجه می‌دهد $d_1|\ d_3$. به‌طور مشابه و با ادامه این روند دیده می‌شود که $d_1|\ d_i$ برای $1\le i\le l$. حال نشان می‌دهیم تمام مضارب d_1 که n را عاد می‌کنند، به D تعلق دارند. به برهان فرض کنید ad_1 کوچک‌ترین عددی باشد که $d_1|\ n$ و $d_1\notin D$. در این‌صورت $\gcd(ad_1-d_1,n)=kd_1$ که $1\le k\le a-1$. بنابر انتخاب a، لازم است که $kd_1\in D$ و این نتیجه می‌دهد که $ad_1\sim d_1$ و درنتیجه $ad_1\in V(H)$ و از آنجا $ad_1\sim 0$ و درنتیجه $ad_1\in D$ که تناقض است. بنابراین، $D=\{rd_1: r\ge 1, rd_1|n\}$. همچنین دیده می‌شود که V(H) از تمام مضارب d_1 تشکیل شده است. درنتیجه $|V(H)|=t$ که $n=td_1$. چون گراف ICG (n,D) منتظم است، لازم است که سایر مؤلفه‌های H نیز گراف کامل K_t باشند.

مثال ۱-۸: به‌ازای n=8 و D = {2 , 4} گراف ICG (n,D) اجتماع دو گراف کامل همچنین رأسی است:



شکل (۳): گراف‌هایی که اجتماعشان ICG (n,D) به‌ازای n=8 و D = {2 , 4} است.

۳- گراف‌های دوری صحیح چندبخشی

قضیه ۳-۱: گراف ICG (n,D) دو بخشی است اگر و تنها اگر به‌ازای k_0 ای که $1\le k_0<n$، n زوج و $\frac{2k_0d}{n}$ عددی فرد برای هر $d\in D$ باشد.

برهان: فرض کنیم گراف چرخشی صحیح ICG (n,D) دوبخشی باشد. در این صورت با توجه به این‌که $\lambda_n = \sum_{d|n}\varphi(\frac{n}{d})$ بزرگترین مقدار ویژه است، از این‌رو، باید برای k ای داشته باشیم. $\lambda_k = -\sum_{d|n}\varphi(\frac{n}{d})$، اما می‌دانیم که:

$$\lambda_k(n,D) = \sum_{d\in D}\mu\left(\frac{n}{gcd(n,kd)}\right)\cdot\frac{\varphi(n/d)}{\varphi\left(\frac{n}{gcd(n,kd)}\right)}\ .$$

از این رو باید:

$$\mu\left(\frac{n}{gcd(n,kd)}\right) = \pm 1 \qquad \forall d\in D.$$

بنابراین:

$$a = \frac{n}{gcd(n,kd)} \in \{1,2\}$$

اما $a\neq 1$، زیرا $\varphi(1)=\mu(1)\neq -1$ در نتیجه داریم:

$$:\frac{n}{gcd(n,kd)} = 2 \Rightarrow gcd(n,kd)=\frac{n}{2} \quad \forall d\in D$$

که نشان می‌دهد باید n زوج باشد. از طرفی رابطه $gcd\left(2,\frac{2kd}{n}\right)=1$ نشان می‌دهد باید برای $d\in D$ فرد و مجموعه D تک عضوی باشد؛ زیرا اگر k=ab، به‌طوری که gcd (k,n)=a برای هر $d\in D$، داریم gcd(n,kd)=ad و درنتیجه $ad=\frac{n}{2}$ و از آنجا $d=\frac{an}{2}$. بنابراین، اگر $D=\{d_0\}$، آن‌گاه تعدادهایی که در شرط قضیه صدق می‌کنند برابر با مجموعه

$$A=\left\{l.\frac{n}{2d_0} : gcd(l,n)=1\ , l<2d_0\right\}$$

است.

برعکس، فرض کنیم برای k_0، $\frac{2k_0 d}{n}$ برای هر $d\in D$ فرد است. بنابراین:

$$\lambda_{k_0} = \sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{gcd(n,k_0d)}\right)\cdot\frac{\varphi(n/d)}{\varphi\left(\frac{n}{gcd(n,k_0d)}\right)}$$
$$= \sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{\frac{n}{2}gcd(2,\frac{2k_0d}{n})}\right)\frac{\varphi(n/d)}{\varphi\left(\frac{n}{\frac{n}{2}gcd(2,\frac{2k_0d}{n})}\right)}$$
$$= \sum_{d|n}\mu(2)\frac{\varphi(n/d)}{\varphi(2)}$$
$$= -\sum_{d|n}\varphi(n/d)$$

درنتیجه، حکم ثابت می‌شود.

توجه کنید که در حالت کلی هر گراف ICG (n,D) به‌جز گراف کامل، می‌تواند گراف چندبخشی باشد. زیرا اگر:

$S(G)=\{a_1,\dots,a_k\}$ مجموعه رئوس مجاور صفر و $\overline{S(G)}=\{b_1,\dots,b_m\}$ مجموعه رئوس غیر مجاور با صفر باشند، آنگاه رأس صفر و رئوس $b_{i1},\dots,b_{im}\in\overline{S(G)}$ را چنان در نظر می‌گیریم که هیچ دو رأسی باهم مجاور نباشند و از آنجا که گراف دوری و منتظم است، برای سایر رئوس، به‌جز $b_{i1},\dots,b_{im}$ و صفر این روند را در نظر می‌گیریم. در این صورت توانسته‌ایم مجموعه رئوس {0, 1, …, n-1} را به چند بخش افراز کنیم.

قضیه ۳-۲: اگر گراف ICG (n,D) چندبخشی کامل باشد آنگاه n=rt و

$$D=\left\{\frac{n}{d_i}: \sum\varphi(d_i)=n-r\right\}$$

برهان: فرض کنید ICG (n,D) گراف چندبخشی کامل باشد و $X_1,\dots,X_t$، افرازهای مجموعه رئوس باشند. چون گراف چندبخشی منتظم است، لذا لازم است که $|X_1|=\dots=|X_t|$ و بنابراین:

$$n=\sum_{i=1}^{t}|X_i| = t|X_i|$$

فرض کنید $|X_1|=r$ و $0\in X_1$؛ چون گراف ICG (n,D) چندبخشی کامل است لذا رأس صفر با تمام t-1 رأس سایر افرازها، مجاور است. بنابراین:

$$|S(G)|=\sum_{i=2}^{t}|X_i|=(t-1)r$$

و $n-|S(G)|=r$ مجموعه D را چنان می‌سازیم که در شرط قضیه صدق کند. مجموعه A را به‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$A=\varphi(D(n)\setminus\{1\}) : \{\varphi(d_i): d_i \in D(n)\setminus\{1\}\}$$

حال اعضایی از مجموعه A را در نظر می‌گیریم که در شرط:

$$n-|S(G)|=r$$

صدق کند و مجموعه D را چنین می‌سازیم:

$$D=\left\{\frac{n}{d_i}: \sum\varphi(d_i)=n-r\right\}$$

در این صورت D مجموعه مطلوب است.

مثال ۳-۳: فرض کنید nl=18، در این صورت داریم:

$$\varphi(18)=6\quad,\quad \varphi(9)=6\quad,\quad \varphi(6)=2\ ,\quad \varphi(3)=2\quad \varphi(2)=1 \qquad (1.1)$$

اما با توجه به قضیه قبل چون باید $|X|$||۱۸ ، چند حالت زیر را داریم:

(۱) $|X|=1$. در این حالت $|S(G)|=18-1$؛ یعنی گراف باید کامل باشد که در این صورت D = {1, 2, 3, 6, 9}.

(۲) $|X| = 2$. در این صورت باید با توجه به قضیه قبل،

(۳) $18 - |S(G)| = 2$، اما با توجه به رابطه (۱,۱) داریم:

$$\varphi(18) + \varphi(9) + \varphi(6) + \varphi(3) = 16$$

پس $\{1 , 2 , 3\} = \left\{\frac{18}{18}, \frac{18}{9}, \frac{18}{6}, \frac{18}{3}\right\}$.

(۴) $|X| = 3$. داریم $|S(G)| = 15$، لذا با توجه به رابطه (۱.۱) و قضیه قبل، باید داشته باشیم D = {1 , 2 , 6 , 9} یا D = {1 , 2 , 3 , 9}.

(۵) $|X| = 6$. آن‌گاه $|S(G)| = 12$، بنابراین، باید D = {1 , 2}.

(۶) $|X| = 9$. در این صورت $|S(G)| = 9$، درنتیجه باید D={1 , 6 , 9} یا D = {2 , 3 , 9}.

۲- مراجع

[1] N. L. Biggs, "Algebraic Graph Theory," Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[2] T. A. Le and J. W. Sander, "Extermal energies of integral circulant graphs via multiplicativity," Linear Algebra Appl. vol. 437, pp. 1408-1421, 2012.

[3] W. So, "Integral circulant graphs," Discrete Math., vol. 306, pp. 153–158, 2005.

[4] C. Godsil and G. Royal, "Algebraic Graph Theory," Graduate Texts in Mathematics, vol. 207, Springer- Verlag, New York, 2001.

[5] N. Saxena, S. Severini, and I. E. Shparlinski, "Parameters of integral circulant graphs and periodic quantum dynamics," Int. J. Quantum Inf., vol. 5, pp. 417–430, 2007.