مجله علمی- پژوهشی "پدافند الکترونیکی و سایبری"

ویژه‌نامه ترکیبیات، رمزنگاری و محاسبات، ص ۲۳۷ -۲۲۹

مطالعه‌ای نوین بر ارتباط بافه‌ها و کوهمولوژی در دیفئولوژی

اکبر دهقان‌نژاد[۱*]، علیرضا احمدی[۲]، حسین خورشیدی[۳]

۱- دانشیار، دانشگاه علم و صنعت ایران، ۲- دانشجوی دکتری، دانشگاه یزد، ۳- استادیار، دانشگاه یزد

(دریافت: ۹۷/۰۸/۲۵، پذیرش: ۹۸/۰۷/۰۲)

چکیده

بافه‌ها روی فضاهای وابرشناختی (دیفئولوژی) به‌عنوان ابزاری برای بررسی ارتباط بین داده‌های روی نقشینه‌های یک فضای وابرشناختی و اطلاعات سرتاسری در مورد آن فضا مطرح می‌شوند. در واقع، بافه‌ها روی فضاهای وابرشناختی به‌وسیله بافه‌ها روی مقر نقشینه‌ها تعریف می‌شوند. به‌عنوان کاربردهایی، این مفاهیم یک چهارچوب برای توضیح اشیا و ساختارهای وابرشناختی مانند فرم‌های دیفرانسیلی در اختیار قرار می‌دهند. علاوه‌براین، می‌توان نظریه‌های همانستگی مانند دورام و تکین حجره‌ای و چخ را بر این اساس سازماندهی کرد.

واژه‌های کلیدی: فضاهای وابرشناختی، بافه‌ها، مقر نقشینه‌ها، نظریه‌های همانستگی

۱- مقدمه

خمینه‌ها، مدارینه‌ها[۲] فضاهای شناخته شده‌ای در هندسه هستند که در تعریف آنها بازهای فضاهای اقلیدسی و نگاشت‌های هموار بین‌شان نقش مهمی ایفا می‌کنند. این فضاها علی‌رغم مزیت‌هایشان، محدودیت‌هایی نیز دارند. برای مثال، خارج قسمتی‌های خمینه‌ها یا فضاهای تابعی خمینه‌ها ($C^\infty(M,N)$) لزوماً خمینه نیستند. همچنین ارائه مفهوم مناسبی برای ریختارهای بین مدارینه‌ها جهت تشکیل یک رسته، یک مسئله چالش برانگیز در این حوزه بوده است (رجوع کنید به [۱]). در این میان، فضاهای وابرشناختی این قابلیت را دارند که مشکلات مذکور را به نوعی پاسخگو باشند. این مفهوم با تمرکز روی خصوصیات ذاتی نگاشت‌های هموار شکل گرفته است. یک ویژگی مشخصه برای نگاشت‌های هموار $f: M \to N$ بین خمینه‌ها بدین صورت است که ترکیب f با همه پرمایش‌های هموار $P: U \to M$، یعنی $f \circ P$ هموار است. اما برای تعمیم این ویژگی به نگاشت‌های بین مجموعه‌ها، صرف نظر از ساختاری که دارند، چه می‌توان کرد؟ یک پاسخ، آن است که بررسی کنیم در این حالت، مقصود از پرمایش‌های هموار چیست.

«وابرشناسی» که تعریف آن در بخش بعد می‌آید، این کار را با تعیین یک مجموعه از پرمایش‌های متمایز به نام «نقشینه‌ها[۳]» انجام می‌دهد که جایگاه پرمایش‌های هموار را دارند و در اصول موضوعه «پوشش»، «سازگاری هموار» و «چسباندن» صدق می‌کنند. به این ترتیب، همواری برای نگاشت‌های بین فضاهای وابرشناختی معنی پیدا می‌کند و سازوکاری برای پیدایش هندسه دیفرانسیل روی فضاهای وابرشناختی فراهم می‌گردد. خمینه‌ها و دیگر فضاهای تکین نظیر مدارینه‌ها، چنبره گنگ و حتی فضاهای با بعد نامتناهی به‌طور طبیعی فضاهایی وابرشناختی هستند. علاوه‌براین، مفاهیم هندسی مانند فرم‌های دیفرانسیلی و همانستگی دورام همچنان روی فضاهای وابرشناختی قابل تعریف هستند. از این گذشته، فضاهای وابرشناختی و نگاشت‌های هموار بین‌شان تشکیل یک شبه مقوله[۴] کامل، هم‌کامل و بسته دکارتی[۵] می‌دهند که تحت زیرفضاها و خارج قسمتی‌ها بسته است. در حقیقت، این ساختار از نظر رسته‌ای بسیار مطلوب است و به همین دلیل مورد توجه فیزیک‌دانان نظری نیز قرار گرفته است ([۲، ۳ و ۴] را ببینید).

این نظریه توسط ژان-ماری سوریو[۶] [۵] در آغاز دهه هشتاد میلادی برای درک بهتر گروه های با بعد نامتناهی که در کوانتش هندسی[۷] پدیدار می شوند، معرفی گردید. پس از وی، بسیاری از جنبه‌های آن مانند هموتوپی هموار و ساختار مدل، کلاف‌ها، همانستگی حجره‌ای و همانستگی دورام توسط افراد دیگر توسعه یافته است. برخی از این مطالب در کتاب [۶]، گردآوری شده و مرجع اصلی ما برای این نظریه است.

از سوی دیگر، بافه‌ها ابزاری قدرتمند برای واکاوی داده‌های

[۱] رایانامه نویسنده مسئول: dehghannezhad@iust.ac.ir

[2] Orbifolds
[3] Plots
[4] Quasitopos
[5] Cartesian closed
[6] Jean-Marie Souriau
[7] Geometric quantization

موضعی جهت دستیابی به اطلاعات سرتاسری هستند (برای نمونه، [۷، ۸، ۹ و ۱۰] را ببینید). همچنین، بافه‌ها کاربردهای فراوانی در مهندسی و علوم دیگر نظیر تحلیل ریختی داده‌ها[1]، کدگذاری شبکه[2] و شبکه‌های حسگر[3] نیز دارند (رجوع کنید به [۱۱]).

بافه‌ها روی فضاهای وابرشناختی به‌صورت بافه‌ها روی مقر نقشینه‌ها معرفی می‌شوند ([۱۲] را ببینید). برش‌های (پیش)بافه‌ها که توسط حد (پیش)بافه‌ها تعریف می‌شوند، داده‌های نهفته در پس (پیش)بافه‌ها را رمزگشایی می‌کنند. فرم‌های دیفرانسیلی مثالی از برش‌های یک بافه است. از این‌رو، این ابزار اهمیت زیادی در ساده‌سازی ماهیت اشیای رسته فضاهای وابرشناختی دارند. به‌علاوه، (پیش)بافه‌ها با مقادیر گروه‌های آبلی یک چهارچوب برای توضیح نظریه‌های همانستگی روی فضاهای وابرشناختی فراهم می‌آورند. در مقاله حاضر نشان داده می‌شود که چگونه همانستگی‌هایی مانند دورام[4] و تکین حجره‌ای به‌طور طبیعی در این چهار چوب قرار می‌گیرند. بر این اساس می‌توان سایر نظریه‌های همانستگی سنتی هم‌چون همانستگی چخ[5] را برای برای فضاهای وابرشناختی تعریف نمود.

ترتیب مقاله به این صورت است: در بخش دوم، به مرور مطالب مورد نیاز از وابرشناسی می‌پردازیم و فضاهای وابرشناختی را از برخی جهات بیشتر مورد مطالعه قرار می‌دهیم. بخش سوم به بافه‌ها روی فضاهای وابرشناختی، نتایج و کاربردهای آن به‌ویژه در بحث (پیش)بافه‌های با مقادیر گروه‌های آبلی و همانستگی‌ها اختصاص دارد.

۲- مقدماتی از وابرشناسی

این بخش به مرور مفاهیمی از نظریه وابرشناسی اختصاص دارد و تعاریف از مرجع [۶] اقتباس شده‌اند. در ادامه خواهید دید که نحوه تعریف با چنان ظرافتی انجام شده است که بسیاری از مفاهیم شناخته شده برای خمینه‌ها، به مفاهیم کلی‌تر مانند فرم‌های دیفرانسیلی روی فضاهای وابرشناختی تعمیم می‌یابند.

تعریف ۲,۱: فرض کنید n یک عدد صحیح نامنفی است. یک $n-$دامنه یک زیرمجموعه باز از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ مجهز به توپولوژی استاندارد است. هر نگاشت از یک دامنه به توی یک مجموعه X یک **پرمایش** در X نامیده می‌شود که $\mathrm{Param}(X)$ مجموعه همه پرمایش‌های در X را نشان می‌دهد. اگر دامنه تعریف یک پرمایش P که با $\mathrm{dom}(\mathrm{P})$ نشان داده می‌شود یک $n-$دامنه باشد، P را یک $n-$پرمایش گویند. یک خانواده $\{P_i: U_i \to \mathrm{X}\}_{i\in J}$ از $n-$پرمایش‌ها **سازگار** است، هرگاه به‌ازای هر $\mathrm{i, j} \in \mathrm{J}$، تساوی $P_i|_{U_i\cap U_j} = P_j|_{U_i\cap U_j}$ برقرار باشد. با داشتن چنین خانواده‌ای، پرمایش $\mathrm{P}: \bigcup_{i\in J} U_i \to \mathrm{X}$ که توسط $P(r) = P_i(r)$ برای $\mathrm{r} \in \mathrm{U_i}$ تعریف می‌شود، **بیشینه** این خانواده نامیده می‌شود.

تعریف ۲,۲: فرض کنید X یک مجموعه است. یک **وابرشناسی(دیفئولوژی)** $\mathcal{D}$ روی X عبارت است از یک مجموعه از پرمایش‌ها در X که اصول موضوعه زیر برای آنها برقرار است:

۱- پوشش: اجتماع تصاویر اعضای $\mathcal{D}$ مجموعه X را می‌پوشاند.

۲- سازگاری هموار: به‌ازای هر عضو $P: U \to X$ از $\mathcal{D}$ و هر نگاشت هموار بین دامنه‌ها $F: V \to U$، پرمایش $P \circ F$ به $\mathcal{D}$ تعلق دارد.

۳- چسباندن: بیشینه هر خانواده سازگار از اعضای $\mathcal{D}$ نیز عضوی از $\mathcal{D}$ است.

تعریف ۲,۳: یک **فضای وابرشناختی** $(\mathrm{X}, \mathcal{D})$ متشکل از یک مجموعه زیرینه X و یک وابرشناسی $\mathcal{D}$ روی آن است. به هر پرمایش متعلق به وابرشناسی $\mathcal{D}$ یک **نقشینه** در X گفته می‌شود.

یکی از موضوعات بسیار مهم که کمتر به آن پرداخته شده است، مستقل بودن اصول موضوعه وابرشناسی است که در اینجا آن را بررسی می‌کنیم.

مثال ۲,۴: مجموعه $\mathbb{R}$ از اعداد حقیقی را در نظر بگیرید. گردایه متشکل از پرمایش‌های هموار و کراندار $\mathrm{P}: \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ تعریف شده روی دامنه‌ها، شرایط پوشش و سازگاری هموار را برقرار می‌سازد اما در شرط چسباندن صدق نمی‌کند.

مثال ۲,۵: گردایه خم‌های هموار $\mathrm{P}: \mathrm{U} \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ تعریف‌شده روی زیرمجموعه‌های باز U از $\mathbb{R}$ به‌توی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ در شرط پوشش و چسباندن صادق است در حالی‌که شرط سازگاری هموار را ندارد.

مثال ۲,۶: فرض کنید X یک مجموعه با بیش از دو عضو است و $x \in X$. برای مجموعه تمام پرمایش‌های ثابت با مقدار x شرایط سازگاری هموار و چسباندن برقرار است ولی شرط پوشش را ندارد.

تعریف ۲,۷: پرمایش‌های موضعاً ثابت در یک مجموعه X تشکیل یک وابرشناسی به نام **وابرشناسی گسسته** روی X می‌دهند و فضای حاصل، یک **فضای وابرشناختی گسسته** نامیده می شود. همین‌طور، مجموعه تمام پرمایش‌های در X تشکیل یک وابرشناسی به نام **وابرشناسی ناگسسته** می دهند.

تعریف ۲,۸: فرض کنید X و Y دو فضای وابرشناختی هستند. نگاشت $\mathrm{f}: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ **هموار** است هرگاه به‌ازای هر نقشینه P در X

---
[1] Topological data analysis
[2] Network coding
[3] Sensor networks
[4] De Rham
[5] Čech

ترکیب $f \circ P$ یک نقشینه در Y باشد. مجموعه نگاشت‌های هموار بین فضاهای وابرشناختی X و Y با $C^{\infty}(X, Y)$ نشان داده می‌شود. به‌طور طبیعی، می‌توان یک **وابرشناسی تابعی** روی $C^{\infty}(X, Y)$ تعریف نمود. این وابرشناسی توسط مجموعه پرمایش‌های

$Q: V \to C^{\infty}(X, Y)$

که به ازای هر نقشینه$P: U \to X$، پرمایش

$Q.P: V \times U \to Y$

با تعریف $(Q.P)(r, s) = Q(r)(P(s))$ یک نقشینه در Y باشد، داده می‌شود.

چون ترکیب‌های نگاشت‌های هموار همچنان هموار هستند، فضاهای وابرشناختی همراه با نگاشت‌های هموارپی شان تشکیل یک رسته $\mathfrak{Diff}$ می‌دهند [۶, ۱,۱۵]. یکریختی‌های $\mathfrak{Diff}$ **وابرسان**[1] نامیده می‌شوند. به عبارت دیگر، یک وابرسان نگاشتی هموار و دوسویی با وارون هموار است.

به‌عنوان یک مثال از یک نگاشت دوسویی هموار که وابرسان نباشد، می‌توان نگاشت همانی $\mathrm{id}: X_{\circ} \to X_{\bullet}$ بین فضاهای وابرشناختی $X_{\circ}$ و $X_{\bullet}$ به ترتیب با وابرشناسی گسسته و ناگسسته روی یک مجموعه X در نظر گرفت.

گــزاره ۲,۹: ([۶, ۱,۵۹]). بــرای فضــاهای وابرشــناختی X, Y, Z، نگاشت ترکیب

$$\circ: C^{\infty}(X, Y) \times C^{\infty}(Y, Z) \to C^{\infty}(X, Z), \ \circ(f, g) = g \circ f$$

هموار است.

تعریف ۲,۱۰: فرض کنید X یک فضـای وابرشـناختی اسـت. یـک **زیرفضای وابرشناختی** از X عبـارت اسـت از یـک زیرمجموعـه $X' \subseteq X$ مجهز بـه **وابرشناسی زیرفضایی** کـه توسـط مجموعـه همه نقشـینه‌هـا در X بـا مقـادیر درX' تعریـف مـی‌شـود. در ایـن وضعیت، نگاشت شمول $X' \hookrightarrow X$ هموار است.

تعریف ۲,۱۱: نگاشت $f: X \to Y$ بین فضاهای وابرشناختی X و Y یک **فرورانش**[2] است هرگاه هموار و پوشا بوده و به ازای هرنقشینه $P: U \to Y$، برای هر $r \in U$، یک همسایگی V از r و یک نقشینه $Q: V \to X$ یافت شود چنان‌که $P|_V = f \circ Q$.

تعریف ۲,۱۲: هر فضای وابرشناختی X دارای یک ریخت شناسـی (توپولوژی) موسوم بهD **ریخت** است که در آن یـک زیرمجموعـه $U \subseteq X$باز است اگر به ازای تمام نقشینه‌های P در X، $P^{-1}(U)$باز باشد. بازهای این ریخـت ذاتـیD **بــاز** نامیـده مـی‌شـوند. در ایـن وضعیت، نگاشت‌های هموار پیوسته هستند.

[1] Diffeomorphism
[2] Subduction

مثال ۲,۱۳: خمینه‌های هموار: هر خمینه هموار از بعد متناهی با در نظر گرفتن پرمایش‌های هموار به‌عنوان نقشینه‌ها، به‌طور طبیعی یک فضای وابرشناختی است. در همواری نگاشت‌های بین خمینه‌ها، چه به مفهوم معمول آن و چه مفهوم وابرشناختی آن، تفاوتی وجود ندارد ([۶, ۴,۳] را ببینید). از این کلی‌تر، هر مدارینه با وابرشناسی تولید شده به‌وسیله کارت‌های مدارینه یک فضای وابرشناختی است (رجوع کنید به [۱]).

همان‌گونه که در[۶, ۲,۱۶] نشان داده شد، فرورانش‌های بین دامنه‌ها دقیقاً پوشاننده‌های[3] پوشای بین دامنه‌ها هستند. همچنین، در [۱۳] اشاره می‌شود که هر پوشاننده پوشا بین خمینه‌ها یک فرورانش است. در اینجا این نتایج را به‌صورت زیر تکمیل و اثبات می‌کنیم.

گزاره ۲,۱۴: نگاشت $f: M \to N$ بین خمینه‌های هموار یک فرورانش است اگر و تنها اگر یک پوشاننده پوشا باشد.

برهان: برای اثبات این حکم از قضیه بـرش موضـعی [۱۴, قضـیه ۴,۲۶]. اسـتفاده مـی‌کنـیم. ابتـدا فـرض کنیـد $f: M \to N$ یـک فرورانش و $x \in M$ و $\phi: U \to V$ یک کارت حول$f(x)$ است. در ایـن صورت به ازای یک همسایگی باز $\phi(f(x)) \in V' \subseteq V$ و نقشینه $P: V' \to M$ داریم $f \circ P = \phi_{V'}^{-1|}$. پس اگر قرار دهیم

$U' := \phi^{-1}(V')$،

نگاشت $P \circ \phi|_{U'}$ یک برش موضعی هموار از f بوده و از این‌رو f یک پوشاننده است.

برعکس، فرض کنید $f: M \to N$ یک پوشاننده پوشا اسـت. فـرض کنید $P: V \to N$ یک نقشینه است، $r \in V$ و $x = P(r)$ در این صورت نگاشت هموار $s: U \to M$ تعریف شده روی یک همسـایگی باز x چنان موجود است که $f \circ s = \mathrm{id}$. قرار دهید

$V' := P^{-1}(U)$

که زیرمجموعه‌ای باز از V اسـت و $Q := s \circ P|_{V'}$ کـه نقشـینه‌ای درM است. بنابراین می‌توان نوشت $P|_{V'} = f \circ Q$. اکنون با توجه به فرض پوشایی، f یک فرورانش است. □

یکی از مهم‌ترین مثال‌ها از فضاهای وابرشناختی چنبره گنگ است:

مثال ۲,۱۵: چنبره گنگ: فرض کنید α عددی گنگ و $T\alpha$ خارج قسمتی $\mathbb{R}/(\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z})$ اسـت؛ یعنـی $T\alpha$، خـارج قسـمت $\mathbb{R}$ تحـت رابطه هم‌ارزی $\sim$ به‌صورت زیر است:

$x \sim x'$ اگر و تنها اگر $m, n \in \mathbb{Z}$ وجود داشته باشند به‌طوری که $x' = x + n + \alpha m$.

[3] Submersion

ساختار وابرشناسی روی Tα بدین صورت تعریف می‌شود که یک پرمایش $P: U \to T\alpha$، یک نقشینه در Tα است اگر و تنها اگر به ازای هر$r \in U$، یک همسایگی باز $V \subseteq U$ از r و همچنین نگاشت هموار $F: V \to \mathbb{R}$ بین دامنه‌ها چنان یافت شوند که$P|_V = \pi \circ F$، جایی‌که $\pi: \mathbb{R} \to T\alpha$ نگاشت خارج‌قسمتی را نشان می‌دهد. چنبره گنگ مثالی از یک فضای وابرشناختی است که خمینه[1] نیست ([۶, تمرین ۷۴] را ببینید). البته یک دلیل ساده‌تر وجود دارد: طبق [۶, تمرین ۵۵]، D ریخت چنبره گنگ ریخت بدیهی (ناگسسته) است. بنابراین اگر فرض کنیم چنبره گنگ یک خمینه است، آنگاه یک فضای وابرشناختی صفر بعدی خواهد بود که این مطلب با [۶, تمرین ۴۹] در تناقض است. با همین استدلال، این فضای وابرشناختی مدارینه هم نیست.

۲-۱- همانستگی حجره‌ای

در این بخش، مانستگی و همانستگی حجره ای روی فضاهای وابرشناختی را مرور می کنیم.

تعریف ۲,۱۶: ([۶, ۶,۵۸]). فرض کنید X یک فضای وابرشناختی است. هر نگاشت هموار از $\mathbb{R}^k$ به X، یک $k-$**حجره** در X گفته می‌شود. مجموعه همه $k-$حجره‌های در X با $\mathrm{Cub}_k(X)$ نشان داده می‌شود. $\mathcal{C}_k(X)$ به‌عنوان گروه آبلی آزاد تولیدشده توسط $\mathrm{Cub}_k(X)$ در نظر گرفته شده و عناصر آن $k-$**زنجیرهای حجره‌ای** در X با ضرایب در $\mathbb{Z}$ نامیده می‌شوند. در واقع، یک $k-$زنجیر حجره‌ای c به‌صورت یک ترکیب $\mathbb{Z}-$خطی متناهی

$$c = \sum\nolimits_\sigma n_\sigma \sigma$$

با $\sigma \in \mathrm{Cub}_k(X)$ و $n_\sigma \in \mathbb{Z}$ است.

توابع درون‌ریز $J_i(a): \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k+1}$[2]، $i = 1, \dots, k+1$، $a \in \mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$J_1(a): (t_1, \cdots, t_k) \mapsto (a, t_1, \cdots, t_k)$$
$$1 < i \le k, J_i(a): (t_1, \cdots, t_k) \mapsto (t_1, \cdots, t_{i-1}, a, t_i, \cdots, t_k),$$
$$J_{k+1}(a): (t_1, \cdots, t_k) \mapsto (t_1, \cdots, t_k, a).$$

طبق [۶, ۶,۵۹] عملگر $\partial: \mathcal{C}_k(X) \longrightarrow \mathcal{C}_{k-1}(X)$ داده شده توسط

$$\partial c = \sum\nolimits_\sigma n_\sigma \sum\nolimits_{i=1}^k (-1)^i [\sigma \circ J_i(0) - \sigma \circ J_i(1)]$$

برای $c = \sum_\sigma n_\sigma \sigma \in \mathcal{C}_k(X)$ یک عملگر مرزی است؛ یعنی:

$$\partial \circ \partial = ۰.$$

[1] در این بحث خمینه‌ها به‌صورت فضاهای وابرشناختی موضعاً اقلیدسی با بعد متناهی در نظر گرفته شده‌اند.

[2] Injection

تعریف ۲,۱۷: ([۶, ۶,۶۰]). یک **تقلیل**[3] از $\mathbb{R}^k$ به $\mathbb{R}^l$ عبارت است از هر افکنش$Pr: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ با $Pr(r_1, \dots, t_k) = (r_{i_1}, \dots, r_{i_l})$ که در آن $\{i_1, \dots, i_l\} \subseteq \{1, \dots, k\}$ زیرمجموعه‌ای از اندیس‌ها است و $i_1 < \dots < i_l$. یک $k-$حجره σ **تباهیده**[4] است اگر به‌ازای یک $l-$حجره σ' و یک تقلیل Pr از $\mathbb{R}^k$ به $\mathbb{R}^l$ و یک عدد صحیح و نامنفیl، داشته باشیم $\sigma = \sigma' \circ Pr$.

مجموعه $k-$**حجره‌های تباهیده** در X را با $Cub_k^\bullet(X)$ نمایش داده و گروه آبلی آزاد تولیدشده توسط $Cub_k^\bullet(X)$ را با $\mathcal{C}_k^\bullet(X)$ نشان می‌دهیم. عناصر $\mathcal{C}_k^\bullet(X)$ را $k-$**زنجیرهای حجره‌ای تباهیده** می‌نامیم. به ازای $k = 0$، برابری‌های

$$\mathcal{C}_0^\bullet(X) = 0 \quad \text{و} \quad Cub_0^\bullet(X) = \varnothing$$

را قرارداد می‌کنیم. خارج قسمتی $\boldsymbol{C}_k(X) = \mathcal{C}_k(X)/\mathcal{C}_k^\bullet(X)$ را **گروه تقلیل‌یافته** از $k-$زنجیرهای حجره‌ای در X می‌نامیم.

برای عدد صحیح و نامنفی$k > 0$، مرز هر k-زنجیر حجره‌ای تباهیده، یک $(k-1)-$زنجیر حجره‌ای تباهیده است؛ یعنی، $\partial(\mathcal{C}_k^\bullet(X)) \subseteq \mathcal{C}_{k-1}^\bullet(X)$. از این‌رو، یک عملگر از $\boldsymbol{C}_k(X)$ به $\boldsymbol{C}_{k-1}(X)$ که دوباره با ∂ نشان داده می‌شود، وجود دارد به‌طوری که نمودار زیر

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_k(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\pi_k"'] & \mathcal{C}_{k-۱}(X) \arrow[d, "\pi_{k-۱}"] \\
\mathbf{C}_k(X) \arrow[r, "\partial"'] & \mathbf{C}_{k-۱}(X)
\end{tikzcd}$$

جابه‌جایی باشد که در آن π_k تصویری طبیعی از $\mathcal{C}_k(X)$ به‌توی $\boldsymbol{C}_k(X)$ است. به‌علاوه، این عملگر جدید ∂ نیز در شرط مرزی

$$\partial \circ \partial = ۰$$

صدق می‌کند [۶, ۶,۶۰]. به این ترتیب، یک مجتمع زنجیر $(\boldsymbol{C}_*(X), \partial)$ داریم که مانستگی وابسته به آن **مانستگی حجره‌ای** فضای وابرشناختی X خوانده شده و با $H_*(X)$ نمایش داده می‌شود.

هر نگاشت هموار $f: X \to Y$ بین فضاهای وابرشناختی یک همریختی $f_*: \mathcal{C}_k(X) \longrightarrow \mathcal{C}_k(Y)$ با ضابطه

$$f_*\left(\sum\nolimits_\sigma n_\sigma \sigma\right) = \sum\nolimits_\sigma n_\sigma (f \circ \sigma)$$

بین گروه‌های $k-$زنجیرهای حجره‌ای القا می‌کند.

گزاره ۲,۱۸: k-زنجیرهای حجره‌ای تباهیده تحت f_* حفظ می‌شوند. به‌علاوه $\partial \circ f_* = f_* \circ \partial$.

[3] Reduction

[4] Degenerate

برهان: برای k–حجره σ تباهیده $\sigma=\sigma'\circ Pr$ داریم

$$f_*(\sigma)=f_*(\sigma'\circ Pr)=(f_*\circ\sigma')\circ Pr$$

که حاصل یک k–حجره σ تباهیده است. اکنون با توجه به $\mathbb{Z}$–خطی بودن f_* می‌توان گفت k زنجیرهای حجره‌ای تباهیده تحت f_* حفظ می‌شوند. همچنین، به ازای k–حجره σ داریم

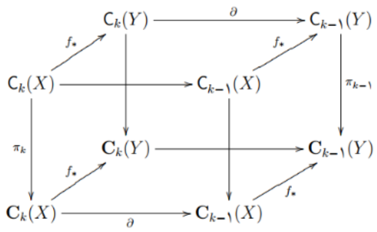
$$\begin{aligned}\partial\circ f_*(\sigma)&=\sum_{i=1}^{k}(-1)^i[f_*(\sigma)\circ J_i(0)-f_*(\sigma)\circ J_i(1)]\\&=\sum_{i=1}^{k}(-1)^i[f\circ\sigma\circ J_i(0)-f\circ\sigma\circ J_i(1)]\\&=f_*\Big(\sum_{i=1}^{k}(-1)^i[\sigma\circ J_i(0)-\sigma\circ J_i(1)]\Big)\\&=f_*\circ\partial(\sigma).\end{aligned}$$

سرانجام از $\mathbb{Z}$–خطی بودن f_* چنین نتیجه‌ای به ازای هر k–زنجیر حجره‌ای تباهیده‌ای برقرار است. □

بنابراین یک همریختی خوش‌تعریف $f_*:\boldsymbol{C}_k(X)\longrightarrow\boldsymbol{C}_k(Y)$ که دوباره آن را با f_* نشان می‌دهیم بین گروه‌های تقلیل‌یافته از k- زنجیرهای حجره‌ای به‌دست می‌آید به گونه ای که

$$\pi_k\circ f_*=f_*\circ\pi_k.$$

پس مکعب زیر



جابجایی است و تساوی $\partial\circ f_*=f_*\circ\partial$ روی گروه‌های تقلیل‌یافته نیز برقرار است. این منتج به یک تابع‌گون از رسته $\mathfrak{D}iff$ به رسته مجتمع‌های زنجیری $\mathfrak{Ch}_{\mathbb{Z}}$ از گروه‌های آبلی می‌شود. همچنین، نگاشت هموار f یک همریختی $f_\#:H_*(X)\longrightarrow H_*(Y)$ بین گروه‌های مانستگی ایجاد می‌کند.

تعریف ۲,۱۹: گروه-k **هم‌زنجیرهای حجره‌ای** X با ضرایب در $\mathbb{R}$ با نماد $\mathcal{C}^k(X)=Hom^\infty(\mathcal{C}_k(X),\mathbb{R})$ نشان داده می‌شود و از همریختی‌های $h:\mathcal{C}_k(X)\to\mathbb{R}$ با

$h|_{Cub_k(X)}\in C^\infty(Cub_k(X),\mathbb{R})$

تشکیل می‌شود، که در آن $Cub_k(X)$ مجهز به وابرشناسی تابعی است.

می‌توان دید که تناظر $h\mapsto h|_{Cub_k(X)}$ یک یکریختی طبیعی بین گروه‌های $\mathcal{C}^k(X)$ و $C^\infty(Cub_k(X),\mathbb{R})$ تعریف می‌کند.

تعریف ۲,۲۰: گروه $\mathcal{C}^k(X)$ از k–**هم‌زنجیرهای حجره‌ای تقلیل‌یافته** X با ضرایب در $\mathbb{R}$ به‌وسیله همریختی‌های $h\in\mathcal{C}^k(X)$ با $h|_{Cub_k^\bullet(X)}=0$ تعریف می‌شود که آن را با $Hom^\infty(\boldsymbol{C}_k(X),\mathbb{R})$ نیز نمایش می‌دهیم.

عملگر مرزی ∂ یک عملگر هم‌مرزی

$d:\boldsymbol{C}^k(X)\to\boldsymbol{C}^{k+1}(X)$ با ضابطه $dh(c)=h(\partial c)$

القا می‌کند. مشاهده می‌شود که $d\circ d=0$ [۶, ۶۳,۶]. در نتیجه یک مجتمع هم‌زنجیری $(\boldsymbol{C}^*(X),d)$ و متعاقب آن یک همانستگی به نام **همانستگی حجره‌ای** $H^*(X)$ برای فضای X با ضرایب در $\mathbb{R}$ به‌دست می‌آید.

گزاره ۲۱,۲: هر نگاشت هموار $f:X\to Y$، یک همریختی عقب‌بر $f^*:\boldsymbol{C}^k(Y)\to\boldsymbol{C}^k(X)$ بین گروه‌های k–هم‌زنجیرهای حجره‌ای تقلیل‌یافته توسط $f^*(h)=h\circ f_*$ ایجاد می‌کند به‌طوری که

$d\circ f^*=f^*\circ d$.

برهان: خوش‌تعریفی f^* واضح است. برای $h_1,h_2\in\boldsymbol{C}^k(Y)$ داریم

$$\begin{aligned}f^*(h_1+h_2)&=(h_1+h_2)\circ f_*\\&=h_1\circ f_*+h_2\circ f_*\\&=f^*(h_1)+f^*(h_2).\end{aligned}$$

بنابراین f^* یک همریختی است. همچنین به کمک گزاره ۲,۱۸ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}f^*\circ d(h)(c)&=\mathrm{d}h\circ f_*(c)\\&=h(\partial\circ f_*)(c)\\&=h(f_*\circ\partial)(c)\\&=f^*(h)\big(\partial(c)\big)\\&=d\circ f^*(h)(c).\end{aligned}$$

□

۲-۳- همانستگی دورام

فرم‌های دیفرانسیلی و همانستگی دورام روی فضاهای وابرشناختی بدون هیچ مشکلی قابل تعریف هستند.

تعریف ۲,۲۲: ([۶, ۶,۲۸]). یک k–فرم دیفرانسیلی ω روی فضای وابرشناختی X عبارت است از تناظری که به هر نقشینه P در X، یک k–فرم دیفرانسیلی $\omega(P)$ روی دامنه P نسبت می‌دهد که در شرط سازگاری $\omega(P\circ F)=F^*\omega(P)$، برای هر نگاشت هموار F بین دامنه‌ها صدق می‌کند و F^* نگاشت عقب‌بر بین فرم‌های دیفرانسیلی روی دامنه‌ها است.

مجموعه همه k–فرم‌های دیفرانسیلی روی فضای وابرشناختی X را با $\Omega^k(X)$ نمایش می‌دهیم. مجموعه $\Omega^k(X)$ با عمل‌های تعریف‌شده توسط:

$$(\omega+\omega')(P)=\omega(P)+\omega'(P),$$

$$(s.\omega)(P) = s.\omega(P),$$

به‌ازای $\omega, \omega' \in \Omega^k(X)$ و نقشینه‌های P در X، تشکیل یک فضای برداری حقیقی می‌دهد.

نگاشت هموار $f: X \to Y$ بین فضاهای وابرشناختی X و نیز Y و k–فرم دیفرانسیلی $\omega \in \Omega^k(Y)$ را در نظر بگیرید. عقب‌بر ω توسط f که با $f^*(\omega)$ نشان می‌دهیم به‌صورت:

$$\big(f^*(\omega)\big)(P) = \omega(f \circ P)$$

داده می‌شود ([۶, ۶,۳۲] را ببینید). بدین ترتیب، یک نگاشت خطی

$$f^*: \Omega^k(Y) \to \Omega^k(X)$$

به نام **عقب‌بر** بین k–فرم‌های دیفرانسیلی پدید می‌آید. اگر $g: Y \to Z$ نگاشت هموار دیگری باشد، آنگاه $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. ضمن آن‌که $id^* = id$. به عبارت دیگر، عقب‌بر فرم‌های دیفرانسیلی یک تابع‌گون پادورد Ω^k از رسته $\mathfrak{D}iff$ به رسته فضاهای برداری حقیقی ارائه می‌کند.

مشتق خارجی فرم‌های دیفرانسیلی $d: \Omega^k(X) \to \Omega^{k+1}(X)$ برای هر $\omega \in \Omega^k(X)$ و نقشینه‌های P در X توسط

$$(d\omega)(P) = d\big(\omega(P)\big)$$

تعریف می‌شود. که در آن $d\big(\omega(P)\big)$، دیفرانسیل فرم $\omega(P)$ روی دامنه P است. مشتق خارجی d در شرط هم‌مرزی $d \circ d = 0$ صدق می‌کند. از این‌رو، یک مجتمع هم‌زنجیری داریم که همانستگی وابسته به این مجتمع **همانستگی دورام** فضای وابرشناختی X نامیده شده و با $H^*_{dR}(X)$ نمایش داده می‌شود ([۶, ۶,۷۳] را ببینید). ارتباط بین عقب‌بر f^* و مشتق خارجی d توسط نمودار جابه‌جایی زیر مشخص می‌شود ([۶, ۶,۳۴]):

$$\begin{tikzcd}
\Omega^k(Y) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^*"'] & \Omega^{k+1}(Y) \arrow[d, "f^*"] \\
\Omega^k(X) \arrow[r, "d"'] & \Omega^{k+1}(X)
\end{tikzcd}$$

۳- بافه‌ها روی فضاهای وابرشناختی

جهت معرفی بافه‌ها روی فضاهای وابرشناختی، لازم است یک توپولوژی گروتندیک روی رسته نقشینه‌ها معین شود که در اینجا به آن می‌پردازیم. بحث را با مروری بر رسته نقشینه‌ها شروع می‌کنیم.

تعریف ۳,۱: ([۱۵]). (**رسته نقشینه‌های یک فضای وابرشناختی**). فضای وابرشناختی X مفروض است. رسته نقشینه‌های X را که با $\mathfrak{P}lots(X)$ نشان می‌دهیم، نقشینه‌های X را به‌عنوان اشیا در بر دارد و یک ریختار $Q \xrightarrow{F} P$ بین نقشینه‌های $P: U \to X$ و $Q: V \to X$ عبارت است از یک مثلث جابه‌جایی

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
V \arrow[ur, "Q"] \arrow[rr, "F"'] & & U \arrow[ul, "P"']
\end{tikzcd}$$

که در آن، F نگاشتی هموار بین دامنه‌ها است.

اگر $P': U' \to X$ تحدیدی از $P: U \to X$ باشد، یعنی، $U' \subseteq U$ و $P|_{U'} = P'$، در این‌صورت ریختار شمول $P' \overset{\iota}{\hookrightarrow} P$ داده‌شده توسط شمول طبیعی $\iota: U' \hookrightarrow U$ حاصل خواهد شد. به‌خصوص، به‌ازای یک خانواده سازگار $\{P_i\}_{i \in J}$ از نقشینه‌ها با بیشینه P، ریختارهای شمول کانونی $P_i \overset{\iota_i}{\hookrightarrow} P$ را خواهیم داشت.

در اینجا رسته نقشینه‌ها را به یک پیش‌ریخت گروتندیک تجهیز می‌کنیم. جزییات تعریف پیش‌ریخت را می‌توانید در [۷] بیابید.

گزاره ۳,۲: ([۱۲]). فرض کنید X یک فضای وابرشناختی است. پوشش‌های هر نقشینه P به‌صورت خانواده‌های سازگار از نقشینه‌ها با بیشینه P، یک پیش‌ریخت گروتندیک روی رسته $\mathfrak{P}lots(X)$ تعریف می‌کند .

تعریف ۳,۳: ([۱۲]). رسته نقشینه‌های یک فضای وابرشناختی X مجهز به پیش‌ریخت گروتندیک ارائه شده در گزاره قبل را **مقر نقشینه‌های** X نامیده و با X_{Plots} نشان می‌دهیم.

پیش‌بافه‌ها و بافه‌ها روی فضاهای وابرشناختی به‌صورت پیش‌بافه‌ها و بافه‌ها روی مقر نقشینه‌ها معرفی می‌شوند.

تعریف ۳,۴: ([۱۲]). هر تابع‌گون $S: \mathfrak{P}lots(X)^{op} \to \mathfrak{S}et$ یک **پیش‌بافه** مجموعه‌ها روی فضای وابرشناختی X است. نگاشت متناظر با ریختار $Q \xrightarrow{F} P$ را با $F^*: S(P) \to S(Q)$ نشان‌داده و آن را **عقب‌بر** توسط F می‌نامیم. اگر $P' \overset{\iota}{\hookrightarrow} P$ یک ریختار شمول باشد، عقب‌بر هر عضو $s \in S(P)$ توسط ι را با $s \restriction P'$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳,۵: ([۱۲]). یک **بافه** S از مجموعه‌ها روی فضای وابرشناختی X پیش‌بافه‌ای است که به ازای هر نقشینه P و هر خانواده سازگار $\{P_i\}_{i \in J}$ از نقشینه‌ها با سوپریمم P، دنباله

$$S(P) \to \prod_{i \in J} S(P_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j) \in J \times J} S(P_i \times_P P_j)$$

یک برابرساز[1] باشد،

به طریق مشابه، (پیش) بافه‌های با مقادیر دیگر به‌ویژه در رسته‌های کامل را می‌توان برای فضاهای وابرشناختی تعریف کرد.

[1] Equalizer

حالتی از این مفهوم برای گروه‌های آبلی در تعریف ۳,۹ ارائه خواهد شد. ریختارهای بین (پیش) بافه‌ها روی فضاهای وابرشناختی توسط تبدیلات طبیعی بین تابع‌گون‌ها تعریف می‌شوند.

تعریف ۳,۶: ([۱۲]). **برش‌های** پیش‌بافه S روی فضای وابرشناختی X عبارت است از حد S که آن را با نماد $\Sigma S(X)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۳,۷: ([۱۲]). (**فرم‌های دیفرانسیلی روی فضاهای وابرشناختی**). فرض کنید X یک فضای وابرشناختی است و $\Lambda^k(P)$ فضای برداری k-فرم‌های دیفرانسیلی روی دامنه یک نقشینه P در X را نشان می‌دهد. تناظری که به هر نقشینه P فضای برداری $\Lambda^k(P)$ و به هر ریختار $Q \xrightarrow{F} P$ بین نقشینه‌ها، همریختی عقب‌بر فرم‌های دیفرانسیلی $F^*: \Lambda^k(P) \to \Lambda^k(Q)$ را وابسته می‌کند، یک بافه است. به‌وضوح مشاهده می‌شود که برش‌های بافه Λ^k دقیقاً فضای برداری k-فرم‌های دیفرانسیلی روی X هستند؛ یعنی، $\Sigma\Lambda^k(X) = \Omega^k(X)$.

قضیه ۳,۸: ([۱۲]). برای پیش‌بافه S روی فضای وابرشناختی X، پیش‌بافه ΣS روی فضای D ریخت X را چنین در نظر می‌گیریم که به هر زیرمجموعه D باز U از X مجموعه $\Sigma S|_U(U)$ از برش‌های $|_U$ و به شمول‌ها تحدیدهای برش‌ها را نسبت می‌دهد. در این‌صورت اگر S یک بافه روی فضای وابرشناختی X باشد، آنگاه ΣS یک بافه روی فضای D ریخت X است.

یکی از مفاهیمی که تمایز بافه‌ها روی فضاهای وابرشناختی را از بافه‌ها روی فضاهای ریخت نشان می‌دهد، مفهوم شبه‌بافه است که در این‌جا به آن نپرداخته‌ایم (برای توضیحات بیشتر رجوع کنید به [۱۲]).

۳-۲- (پیش) بافه‌های آبلی و نظریه‌های همانستگی

تعریف پیش‌بافه‌ها و بافه‌های گروه‌های آبلی به‌صورت زیر بازیابی می‌شود. همان‌گونه که قبلاً اشاره شد، تعریف بافه‌ها با مقادیر در رسته‌های دارای حاصل‌ضرب امکان‌پذیر است. اگر مقادیر بافه‌ها در رسته گروه‌های آبلی باشد، شرط برابرسازی به شرط دقیق بودن تبدیل می‌شود:

تعریف ۳,۹: یک **پیش‌بافه** گروه‌های آبلی روی فضای وابرشناختی X عبارت است از یک تابع‌گون

$$A: \mathfrak{Plots}(X)^{op} \to \mathfrak{Ab}.$$

یک **بافه** A گروه‌های آبلی روی X پیش‌بافه‌ای است که به‌ازای هر نقشینه P و هر خانواده سازگار از نقشینه‌ها با بیشینه P، دنباله

$$0 \to A(P) \xrightarrow{\alpha} \prod_{i\in J} A(P_i) \xrightarrow{\beta} \prod_{(i,j)\in J\times J} A(P_{ij})$$

دقیق باشد، جایی‌که

$$\alpha(s) = s \restriction P_i \text{ و } \beta(s_i) = s_i \restriction P_{ij} - s_j \restriction P_{ij}$$

$P_{ij} = \mathrm{P}|_{def(P_i)\cap def(P_j)}$.

طبق [۱۶, نتیجه ۲,۱,۲] و [۱۶, نتیجه ۲,۲,۳]، رسته‌های پیش‌بافه‌ها و بافه‌های گروه‌های آبلی روی فضای وابرشناختی X تشکیل رسته‌های آبلی می‌دهند. بنابراین، می‌توان از مفاهیمی مانند مجتمع‌های هم‌زنجیری و واکافت‌ها[1] در این رسته‌ها سخن گفت.

تعریف ۳,۱۰: هر دنباله دقیق از بافه‌ها روی X و ریختارهای

$$0 \to \mathcal{A} \to A^0 \xrightarrow{d} A^1 \xrightarrow{d} A^2 \to \cdots$$

یک **واکافت** از بافه $\mathcal{A}$ گروه‌های آبلی روی فضای وابرشناختی X است.

تعریف ۳,۱۱: یک **مجتمع هم‌زنجیری** (A^*, d) از پیش‌بافه‌های گروه‌های آبلی روی فضای وابرشناختی X عبارت است از یک دنباله از پیش‌بافه‌ها روی X و ریختارهای

$$\cdots \to A^{k-1} \xrightarrow{d} A^k \xrightarrow{d} A^{k+1} \to \cdots$$

به‌طوری که ترکیب هر دو ریختار متوالی صفر باشد. ریختار $d^k: A^k \to A^{k+1}$، k-امین **عملگر هم‌مرزی** نامیده می‌شود.

برای چنین مجتمع هم‌زنجیری (A^*, d)، به‌ازای هر نقشینه P در X مجتمع هم‌زنجیری $(A^*(P), d_p)$ از گروه‌های آبلی را داریم. پیش‌بافه $H^k(A^*)$ که به هر نقشینه P در X، k-امین گروه همانستگی مجتمع هم‌زنجیری $(A^*(P), d_p)$ را نسبت می‌دهد، $H^k(A^*)(P) := H^k(A^*(P))$، را k-امین **پیش‌بافه همانستگی** از مجتمع هم‌زنجیری (A^*, d) گوییم. همچنین، (A^*, d) یک **مجتمع هم‌زنجیری وابسته** $(\Sigma A^*, \Sigma d)$ از گروه‌های برش‌ها

$$\cdots \to \Sigma A^{k-1}(X) \to \Sigma A^k(X) \to \Sigma A^{k+1}(X) \to \cdots$$

دارد که k-امین گروه همانستگی آن با $H^k(\Sigma A^*)$ نمایش داده می‌شود.

در ادامه همانستگی‌های فضاهای وابرشناختی را در قالب مطرح شده در این زیربخش تشریح می‌کنیم.

۳-۳- همانستگی دورام

فرض کنید X یک فضای وابرشناختی است. بافه‌های Λ^k از گروه‌های آبلی در مثال ۳,۷ را در نظر بگیرید. این بافه‌ها همراه با عملگرهای هم‌مرزی $d^k: \Lambda^k \to \Lambda^{k+1}$ متشکل از مشتق‌های

[1] Resolutions

خارجی $d_P^k: \Lambda^k(P) \to \Lambda^{k+1}(P)$ از فرم‌های دیفرانسیلی روی دامنه نقشینه‌ها یک مجتمع هم‌زنجیری (Λ^*, d) می‌سازد.

گزاره ۳,۱۲: مجتمع هم‌زنجیری وابسته $(\Sigma\Lambda^*, \Sigma d)$ از گروه‌های برش‌ها دقیقاً مجتمع هم‌زنجیری از فرم‌های دیفرانسیلی روی فضای وابرشناختی X است. بنابراین، گروه‌های همانستگی وابسته $H^k(\Sigma\Lambda^*)$ با گروه‌های همانستگی دورام $H_{dR}^k(X)$ از فضای X منطبق اند.

برهان: اثبات واضح است. □

گزاره ۳,۱۳: دنباله

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{R}} \longrightarrow \Lambda^0 \longrightarrow \Lambda^1 \longrightarrow \cdots$$

از بافه‌ها یک واکافت از بافه ثابت $\underline{\mathbb{R}}$ است که این بافه به هر نقشینه P در X گروه توابع موضعاً ثابت با مقادیر در $\mathbb{R}$ روی $\mathrm{dom}(P)$ را متناظر می‌کند.

برهان: در حقیقت واکافت بودن دنباله مذکور بدین معنا است که بتوانیم روی دامنه نقشینه‌ها، یک جواب موضعی برای عقب‌بر معادلات دیفرانسیلی که توسط عملگرها داده می‌شوند، داشته باشیم. اما از لم پوانکاره، می‌توان جوابی برای عقب‌بر معادلات دیفرانسیل روی گردایه نقشینه‌های با دامنه تعریف به‌صورت یک گوی باز داشت. بنابراین دنباله فوق یک واکافت است. □

۳-۴- همانستگی حجره‌ای

فرض کنید X یک فضای وابرشناختی است. برای هر عدد صحیح و نامنفی k، پیش‌بافه $\boldsymbol{C}^k$ روی X را در نظر بگیرید که به هر نقشینه $P: U \to X$، گروه $\boldsymbol{C}^k(P) := Hom^\infty(\boldsymbol{C}_k(U), \mathbb{R})$ و به هر ریختار $Q \xrightarrow{F} P$، هم‌ریختی عقب‌بر $F^*: \boldsymbol{C}^k(P) \to \boldsymbol{C}^k(Q)$ را نسبت می‌دهد. این پیش‌بافه‌ها همراه با عملگر هم‌مرزی d که توسط عملگرهای هم‌مرزی $d_P: \boldsymbol{C}^k(P) \to \boldsymbol{C}^{k+1}(P)$ روی دامنه نقشینه‌های P تعریف می‌شود، تشکیل یک مجتمع هم‌زنجیری $(\boldsymbol{C}^*, d)$ می‌دهند.

توضیح ۳,۱۴: عناصر $\Sigma\boldsymbol{C}^k(X)$ به‌صورت نگاشت‌های α تعریف‌شده روی وابرشناسی $\mathcal{D}$ از فضای وابرشناختی X هستند که به هر نقشینه P در X، یک $\alpha(P) \in A(P)$ با $\alpha(Q) = F^*(\alpha(P))$ برای هر ریختار $Q \xrightarrow{F} P$ بین نقشینه‌ها، متناظر می‌کنند. فرض کنید $\Xi\boldsymbol{C}^k(X)$ زیرمجموعه متشکل از برش‌های $\alpha \in \Sigma\boldsymbol{C}^k(X)$ است به‌گونه‌ای که تحدید

$$\alpha|_{Cub_k(X)}: Cub_k(X) \to C^\infty(C^\infty(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k), \mathbb{R})$$

هموار باشد که در آن فضاها مجهز به وابرشناسی تابعی هستند. بررسی این‌که $\Xi\boldsymbol{C}^k(X)$ زیرگروهی از $\Sigma\boldsymbol{C}^k(X)$ است چندان سخت نیست و از این‌رو، $(\Xi\boldsymbol{C}^*, \Sigma d)$ یک زیرمجتمع از $(\Sigma\boldsymbol{C}^*, \Sigma d)$ است.

گزاره ۳,۱۵: گروه‌های همانستگی حجره‌ای $H^k(X)$ با گروه‌های همانستگی $H^k(\Xi\boldsymbol{C}^k)$ وابسته به زیرمجتمع $(\Xi\boldsymbol{C}^*, \Sigma d)$ یک‌ریخت هستند.

برهان: نگاشت $\Psi: \boldsymbol{C}^k(X) \to \Xi\boldsymbol{C}^k(X)$ را به‌وسیله

$$\Psi(h)(P) = P^*(h)$$

تعریف می‌کنیم. توجه شود $\Psi(h)$ یک عنصر $\Xi\boldsymbol{C}^*$ است. در واقع، فرض کنید $\phi: U \to Cub_k(X)$ و $\varphi: V \to C^\infty(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ نقشینه هستند. در این‌صورت

$$\Psi(h)(\phi.\varphi) = h \circ (\phi \times \varphi)$$

نقشینه‌ای در $\mathbb{R}$ است چراکه طبق گزاره ۲,۹ نگاشت ترکیب $\circ$ هموار است. پس تحدید $\Psi(h)$ به $Cub_k(X)$ نیز هموار است. واضح است که Ψ یک هم‌ریختی است. برای مشاهده این‌که Ψ یک‌به‌یک است، فرض کنید $\Psi(h) = 0$ به‌ازای $h \in \boldsymbol{C}^k(X)$. در این‌صورت برای هر $\sigma \in Cub_k(X)$، داریم $\Psi(h)(\sigma) = 0$ و در نتیجه $h(\sigma) = 0$.

اکنون فرض کنید $\alpha \in \Xi\boldsymbol{C}^k(X)$. نگاشت $H: Cub_k(X) \to \mathbb{R}$ را توسط $H(\sigma) = \alpha(\sigma)(1_{\mathbb{R}^k})$ تعریف می‌کنیم. چون تحدید α به $Cub_k(X)$ هموار است، H نیز هموار خواهد بود. به‌علاوه،

$$\begin{aligned} H(\sigma \circ Pr) &= \alpha(\sigma \circ Pr)(1_{\mathbb{R}^k}) \\ &= Pr^*(\alpha(\sigma))(1_{\mathbb{R}^k}) \\ &= \alpha(\sigma)(Pr) = 0. \end{aligned}$$

به عبارت دیگر، $H|_{Cub_k^\cdot(X)} = 0$. از این‌رو، H یک

$$h \in Hom^\infty(\boldsymbol{C}_k(X), \mathbb{R})$$

را چنان القا می‌کند که $\Psi(h)(P) = \alpha$. سرانجام

$$\begin{aligned} \Sigma d \circ \Psi(h)(P) &= d_p \circ P^*(h) \\ &= P^* \circ d(h) \\ &= \Psi(dh)(P) \\ &= \Psi \circ d(h)(P). \end{aligned}$$

پس گروه‌های همانستگی $H^k(X)$ و $H^k(\Xi\boldsymbol{C}^k)$ یک‌ریخت هستند. □

۳-۵- همانستگی چخ

برای معرفی همانستگی چخ با ضرایب در پیش بافه آبلی A روی یک فضای وابرشناختی X می‌توان رویکردهای زیر را داشت:

۱. همانستگی چخ با ضرایب در ΣA روی فضای D ریخت X (قضیه ۳,۸ را ببینید) . این دیدگاه بیشتر مرتبط با اطلاعات موضعی روی فضا است .

۲. همانستگی چخ روی مقر نقشینه‌ها X_{Plots} که این منجر به

پیش بافه $\widetilde{H}^*$ با تناظر

$$P \mapsto \widetilde{H}^*(\mathrm{dom}(P); A_P)$$

می شود که در اینجا $\widetilde{H}^*(\mathrm{dom}(P); A_P)$ همانستگی چخ با ضرایب در A_P روی $\mathrm{dom}(P)$ است. یک تبدیل طبیعی

$$\phi: A \to \widetilde{H}^0$$

چنان موجود است که وقتی A یک بافه باشد، ϕ یک یکریختی طبیعی خواهد بود. این دیدگاه با اطلاعات موضعی داده شده توسط A روی هر نقشینه سروکار دارد و نه خود فضا.

۳. فرض کنید $\mathcal{U}$ یک پوشش D باز از X است. در این صورت $\mathcal{U}_{\mathcal{P}} = P^{-1}\mathcal{U}$ یک پوشش از دامنه تعریف هر نقشینه P در X خواهد بود. تناظر $\widetilde{C}^k(\mathcal{U}_{\mathcal{P}}; A_P)$ به هر نقشینه P در X، یک پیش‌بافه است که در آن $\widetilde{C}^k(\mathcal{U}_{\mathcal{P}}; A_P)$ مجتمع هم‌زنجیری چخ روی $\mathrm{dom}(P)$ وابسته به $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}$ است. اگر ریختارهای $d: \widetilde{C}^k \to \widetilde{C}^{k+1}$ از عملگرهای هم‌مرزی روی دامنه نقشینه‌ها را در نظر بگیریم، یک مجتمع هم‌زنجیری $(\widetilde{C}^*, d)$ و گروه‌های همانستگی $H^k(\Sigma\widetilde{C}^*)$ حاصل خواهد شد. این دیدگاه می‌تواند به‌عنوان نسخه‌ای مناسب از همانستگی چخ روی فضاهای وابرشناختی در نظر گرفته شود.

۴- نتیجه‌گیری

بافه‌ها روی فضاهای وابرشناختی برحسب نقشینه‌ها و سازگار با ساختار ریخت ذاتی معرفی می‌شوند. همان‌گونه که نشان داده شد، این مفاهیم نقش اساسی در توضیح و ساده‌سازی ساختارهایی مانند فرم‌های دیفرانسیلی و همچنین نظریه‌های همانستگی روی فضاهای وابرشناختی دارند. از این‌رو می‌توان در این چهارچوب، دیگر ساختارها و نظریه‌های همانستگی سنتی را برای فضاهای وابرشناختی ارائه کرد.

۵- مراجع

[1] P. Iglesias-Zemmour, Y. Karshon, and M. Zadka, “Orbifolds as diffeologies,” Trans. Amer. Math. Soc. 362, pp. 2811–2831, 2010.

[2] J. C. Baez and A. E. Hoffnung, “Convenient categories of smooth spaces,” Trans. Amer. Math. Soc. 363, vol. 11, pp. 5789-5825, 2011.

[3] C. Blohmann, M. C. B. Fernandes, and A. Weinstein, “Groupoid Symmetry and Constraints in General Relativity. 1: Kinematics,” 2011. arXiv:1003.2857v2.

[4] U. Schreiber, “Differential cohomology in a cohesive ∞-topos,” 21st Century, Available at https://ncatlab.org

[5] J.-M. Souriau, “Groupes différentiels,” In Differential geometrical methods in mathematical physics (Proc. Conf., Aix-en-Provence/Salamanca, 1979), Lecture Notes in Math. 836, Springer Verlag, PP. 91-128, 1980,

[6] P. Iglesias-Zemmour, “Diffeology,” Mathematical Surveys and Monographs 185, AMS, 2013.

[7] M. Artin, A. Grothendieck, and J.-L. Verdier, “Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas” (SGA4), Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[8] G.E. Bredon, “Sheaf Theory,” Graduate Texts in Mathematics 170, 2nd edition, Springer-Verlag, 1997.

[9] M. Kashiwara and P. Schapira, “Categories and Sheaves,” Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 332, Springer-Verlag, 2006.

[10] S. Mac Lane and I. Moerdijk, “Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory,” Springer-Verlag, 1992.

[11] J. M. Curry, “Sheaves, cosheaves and applications,” PhD Thesis, University of Pennsylvania, 2014.

[12] A. Dehghan Nezhad and A. Ahmadi, “A novel approach to sheaves on diffeological spaces,” Topology Appl. 263, PP. 141-153, 2019.

[13] D. M. Roberts and R. F. Vozzo, “Smooth loop stacks of differentiable stacks and gerbes,” Cah. Topol. Géom. Différ. Catég. LIX, pp. 95-141, 2018.

[14] J. M. Lee, “Introduction to Smooth Manifolds,” Graduate Texts in Mathematics 218, 2nd edition, Springer, 2013.

[15] J. D. Christensen, J. G. Sinnamon, and E. Wu, “The D-topology for diffeological spaces,” Pacific J. Math. vol. 272, no. 1, pp. 87-110, 2014.

[16] G. Tamme, “Introduction to Étale Cohomology,” Translated by Manfred Kolster, Springer-Verlag, 1994.

[17] A. Dehghan Nezhad and A. Ahmadi, “Cohomology theories and sheaves on diffeological spaces,” 49th Annual Iranian Mathematics Conference, 2018.