مجله علمی- پژوهشی "پدافند الکترونیکی و سایبری"
ویژه‌نامه ترکیبیات، رمزنگاری و محاسبات، ص ۱۵ -۱۱

انرژی فاصله کمینه احاطه‌گر یالی یک گراف

سمیرا ثابتی[۱]، سعید محمدیان سمنانی[۲*]

۱- دانشجوی دکتری، ۲- استادیار، دانشگاه سمنان

(دریافت: ۹۷/۰۸/۲۵، پذیرش: ۹۸/۰۷/۰۲)

چکیده

در این مقاله یکی از انواع انرژی یعنی انرژی فاصله کمینه احاطه‌گر یالی $\boldsymbol{E_{D'd}(G)}$ را معرفی می‌کنیم. انرژی فاصله یالی به‌عنوان مجموع قدر مطلق مقادیر ویژه ماتریس فاصله یالی تعریف شده است. کران‌های بالا و پایینی برای $\boldsymbol{E_{D'd}(G)}$ به‌دست آورده‌ایم. سرانجام، کران پایینی برای بزرگترین مقدار ویژه (شعاع طیفی) فاصله احاطه‌گر یالی گراف $\boldsymbol{G}$ بیان می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: مجموعه کمینه احاطه‌گر یالی، ماتریس فاصله احاطه‌گر یالی، مقادیر ویژه احاطه‌گر یالی، انرژی گراف.

۱- مقدمه

مفهوم انرژی گراف اولین بار در سال ۱۹۷۸ توسط ایوان گوتمن[۱] معرفی گردید [۱]. برای درک بهتر مفاهیم ریاضی نظریه انرژی گراف [۵-۲] را می‌توان دید. کران‌های بالا و پایین برای انرژی یک گراف در [۷-۶] بررسی شده است. به‌علاوه، در [۱۵-۸] انرژی برخورد[۲]، انرژی جورسازی[۳]، انرژی کمینه پوشش رأسی[۴]، انرژی کمینه احاطه‌گر[۵] و انرژی لاپلاسین کمینه احاطه‌گر[۶] را می‌توان یافت. اخیراً، کانا[۷] و همکارانش انرژی فاصله[۸] کمینه پوشش رأسی، $\mathrm{E_{Cd}(G)}$ و انرژی فاصله کمینه احاطه‌گر رأسی $\mathrm{E_{Dd}(G)}$ یک گراف را معرفی کرده‌اند که به‌ترتیب به مجموعه کمینه پوشش رأسی C و کمینه احاطه‌گر رأسی D وابسته هستند [۱۸-۱۶]. ماتریس فاصلهGیک ماتریس مربعی از مرتبه n است که درایه $(\mathrm{i,j})$ فاصله بین رئوس v_i و v_j در نظر گرفته می‌شود. جزئیات بیشتر در [۲۱-۱۹] مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در مقاله حاضر، برای نخستین بار با استفاده از مقالات مرتبط با انرژی فاصله و کمینه احاطه‌گر گراف، انرژی فاصله کمینه احاطه‌گر یالی گراف G را مطالعه می‌کنیم. برخی ویژگی‌های چندجمله‌ای مشخصه ماتریس فاصله کمینه احاطه‌گر یالی گراف G را محاسبه می‌کنیم و کران‌های بالا و پایینی برای انرژی گراف معرفی می‌گردد.

*رایانامه نویسنده مسئول: S_mohammadian@semnan.ac.ir

[1] Ivan Gutman
[2] Incidence energy
[3] Matching energy
[4] Minimum covering energy
[5] Minimum dominating energy
[6] Laplacian minimum dominating energy
[7] Kanna
[8] Distace energy

ماتریس فاصله یالی گراف G ماتریس مربعی از مرتبه m است که درایه (i,j) فاصله (طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو یال) بین یال‌های e_i و e_j می‌باشد. فرض کنید $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_m$ مقادیر ویژه ماتریس فاصله یالی گراف G باشد. انرژی فاصله یالی به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E(G)=ED_e=\sum_{i=1}^{m}|\mu_i|$$

فرض کنید $\mathrm{G}=(\mathrm{V},\mathrm{E})$ یک گراف ساده، متناهی، بدون طوقه، یال چندگانه و جهت باشد. گراف G دارای n رأس، m یال با مجموعه رئوس $V(G)=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ و مجموعه یال $E(G)=\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$ در نظر گرفته شده است. زیر مجموعه D' از $E(G)$، مجموعه احاطه‌گر یالی نامیده می‌شود اگر هر یال در $\mathrm{E}-\mathrm{D}'$ با حداقل یک یال از D' برخورد داشته باشد. هر مجموعه احاطه‌گر یالی با حداقل کاردینالیتی، مجموعه کمینه احاطه‌گر یالی گفته می‌شود. فرض کنید D' مجموعه کمینه احاطه‌گر یالی گراف G باشد. ماتریس فاصله کمینه احاطه‌گر یالی گراف G، ماتریس $B_{D'd}=\left(d_{ij}\right)_{m\times m}$ که:

$$d_{ij}=\begin{cases}1 & i=j \text{ و } e_i\in D' \\ d\left(e_i,e_j\right) & \text{درغیراینصورت}\end{cases} \tag{۱}$$

چندجمله‌ای مشخصه ماتریس فاصله کمینه احاطه‌گر یالی $B_{D'd}(G)$ با $f_m(G,\mu)=det(\mu I-B_{D'd}(G))$ نشان داده می‌شود. مقادیر ویژه فاصله کمینه احاطه‌گر یالی گراف G همان مقادیر ویژه $B_{D'd}(G)$ هستند، از آنجایی‌که $B_{D'd}(G)$

متقارن و حقیقی است، مقادیر ویژه آن حقیقی هستند و به‌صورت غیرافزایشی[1] $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_m$ مرتب و برچسب‌گذاری می‌شوند.

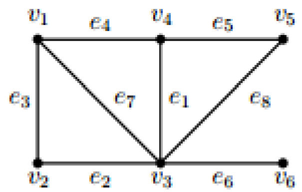
۲- فرمول‌بندی مسئله و برخی ویژگی‌های اساسی ماتریس فاصله مینیمم احاطه‌گر یالی

در ابتدا برای شکل (۱) انرژی فاصله کمینه احاطه‌گر یالی را محاسبه می‌کنیم، سپس برخی نتایج مهم را بیان می‌کنیم.

تعریف ۲-۱: [۱۴] فرض کنید G یک گراف همبند باشد، $e_1 = (u_1, v_1)$ و $e_2 = (u_2, v_2)$ دو یال گراف G باشند، فاصله بین دو یال e_1 و e_2 با:

$ed(e_1, e_2) = \min\{d(u_1, u_2), d(u_1, v_2),$
$d(v_1, v_2), d(v_1, v_2)\}$

تعریف می‌شود. اگر $ed(e_1, e_2) = 0$، آن‌گاه، دو یال با هم مجاور هستند.



شکل ۱: گراف G

مثال ۲-۲:مجموعه‌های کمینه احاطه‌گر یالی شکل (۲)

$i)\ D'_1 = \{e_1, e_3\}, \quad ii)\ D'_2 = \{e_7, e_8\}$
$iii)\ D'_3 = \{e_2, e_5\}, \quad iv) D'_4 = \{e_8, e_3\}$

هستند. سپس، با انتخاب $D'_1 = \{e_1, e_3\}$ داریم

$$B_{D'd}(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

چندجمله‌ای مشخصه ماتریس فوق

$\mu^8 - 2\mu^7 - 9\mu^6 + 13\mu^5 + 17\mu^4 - 22\mu^3$
$-1\mu^2 + 3\mu$

می‌باشد که ریشه‌های آن به‌صورت زیر محاسبه شده است:

$\mu_1 = 3.2393, \quad \mu_5 = 0.0000,$
$\mu_2 = 1.5575, \quad \mu_6 = -0.3591,$
$\mu_3 = 1.0000, \quad \mu_7 = -1.6330,$
$\mu_4 = 0.4498, \quad \mu_8 = -2.2564.$

بنابراین، مقدار انرژی فاصله کمینه احاطه‌گر یالی برابر است با $E_{D'd}(G) = 10.4932.$

و برای مجموعه کمینه احاطه‌گر $D'_2 = \{e_7, e_8\}$ داریم

$$B_{D'd}(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mu_1 = 3.0461, \quad \mu_5 = 0.0000,$
$\mu_2 = 1.6416, \quad \mu_6 = -0.3852,$
$\mu_3 = 1.0000, \quad \mu_7 = -1.8717,$
$\mu_4 = 0.7599, \quad \mu_8 = -2.1904.$

مقدار انرژی فاصله کمینه احاطه‌گر یالی نسبت به D'_2، $E_{D'd}(G) = 10.8947$ می‌باشد.

بنابراین، نتیجه می‌گیریم انرژی فاصله کمینه احاطه‌گر یالی گراف G به مجموعه احاطه‌گر منتخب بستگی دارد.

قضیه ۲-۳: برای هر عدد صحیح $n \geq 3$، مقدار انرژی فاصله کمینه احاطه‌گر یالی گراف ستاره برابر با 1 است.

اثبات: فرض کنید $k_{1,n-1}$ گراف ستاره با مجموعه یال $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ باشد، می‌توان مجموعه کمینه احاطه‌گر D' را یک مجموعه تک عضوی از هر یال e_i که $i = 1,2,\ldots,m$ می‌باشد، انتخاب نمود یعنی $D' = \{e_i\}$. آن‌گاه

$$B_{D'd}(k_{1,n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times m}$$

چندجمله‌ای مشخصه آن

$$f_m(G, \mu) = \mu^m - \mu^{m-1} = \mu^{m-1}(\mu - 1)$$

و طیف آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$Spec(B_{D'd}(G)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m-1 \end{pmatrix}.$$

بنابراین، انرژی فاصله کمینه احاطه‌گر یالی برابر است با $E_{D'd}(G) = 1$.

[1]Non-increasing

قضیه ۲-۴- فرض کنید G گرافی با مجموعه رئوس V و مجموعه یال E باشد و D' مجموعه کمینه احاطه‌گر یالی آن و

$$f_m(G,\mu) = \det(\mu I - B_{D'd}(G)) = c_0\mu^m + c_1\mu^{m-1} + c_2\mu^{m-2} + \cdots + c_m$$

چندجمله‌ای مشخصه گراف G باشد، آن‌گاه:

$(i)\ c_0 = 1$

$(ii)\ c_1 = -|D'|$

$(iii) c_2 = -\binom{|D'|}{3} - \sum_{i<j}(d_{ij})^2$

$(iv) c_{3=}$

$$-\binom{|D'|}{3} + \sum_{i=1}^{m-1}\left\{\sum_{j>i}^{m}\left[(d_{ij})^2 \sum_{k=1, k\neq i,j} d_{kk}\right]\right\} - 2\sum_{1\le i<j<k\le m} d_{ij}d_{jk}d_{ik}$$

اثبات: (i) مستقیماً از تعریف $f_m(\mathrm{G},\lambda)$ نتیجه می‌شود که $c_0 = 1$.

(ii) از آنجایی‌که مجموع عناصر روی قطر ماتریس $B_{D'd}(G)$ برابر است با $|D'|$، مجموع دترمینان‌های همه‌ی زیرماتریس‌های اصلی 1×1 ماتریس $B_{D'd}(G)$ معادل است با تریس $B_{D'd}(G)$ که در حقیقت با $|B_{D'd}(G)|$ برابر است. بنابراین:

$(-1)^1 c_1 = |D'|.$

(iii) مقدار $(-1)^2 c_2$ برابر است با دترمینان همه زیرماتریس‌های اصلی 2×2 از ماتریس $B_{D'd}(G)$، یعنی:

$$c_2 = \sum_{1\le i<j\le m}\begin{vmatrix} d_{ii} & d_{ij} \\ d_{ji} & d_{jj}\end{vmatrix} = \sum_{1\le i<j<k\le m}(d_{ii}d_{jj} - d_{ij}d_{ji}) = \sum_{1\le i<j<k\le m} d_{ii}d_{jj} - \sum_{1\le i<j<k\le m} d_{ij}^2 = \binom{|D'|}{2} - \sum_{1\le i<j<k\le m}(d_{ij})^2$$

(iv) مقدار ضریب c_3 برابر است با:

$$c_3 = (-1)^3 \sum_{1\le i<j<k\le m}\begin{vmatrix} d_{ii} & d_{ij} & d_{ik} \\ d_{ji} & d_{jj} & d_{jk} \\ d_{ki} & d_{kj} & d_{kk}\end{vmatrix}$$

$$- \sum_{1\le i<j<k\le m}\left[d_{ii}(d_{jj}d_{kk} - d_{kj}d_{jk}) - d_{ij}(d_{ji}d_{kk} - d_{ki}d_{jk}) + d_{ik}(d_{ji}d_{kj} - d_{ki}d_{jj})\right]$$

$$= -\sum_{1\le i<j<k\le m} d_{ii}d_{jj}d_{kk} + \sum_{1\le i<j<k\le m}\left[d_{ii}d_{jk}d_{kj} + d_{ij}d_{ik}d_{ki} + d_{kk}d_{ij}d_{ji}\right] - \sum_{1\le i<j<k\le m} d_{ij}d_{jk}d_{ki} - \sum_{1\le i<j<k\le m} d_{ik}d_{kj}d_{ji}$$

$$= -\sum_{1\le i<j<k\le m} d_{ii}d_{jj}d_{kk} + \sum_{1\le i<j<k\le m}\left[d_{ii}d_{jk}^2 + d_{jj}d_{ik}^2 + d_{kk}d_{ij}^2\right] - 2\sum_{1\le i<j<k\le m} d_{ij}d_{jk}d_{ik}$$

$$= -\binom{|D'|}{3} + \sum_{i=1}^{m-1}\left\{\sum_{j>i}^{m}\left[(d_{ij})^2 \sum_{k=1, k\neq i,j} d_{kk}\right]\right\} - 2\sum_{1\le i<j<k\le m} d_{ij}d_{jk}d_{ik}$$

قضیه ۲-۵: فرض کنید G یک گراف ساده با مجموعه رئوس V و مجموعه یال $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ و D' مجموعه کمینه احاطه‌گر یالی آن باشند. اگر $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ مقادیر ویژه $B_{D'd}(G)$ باشند، آن‌گاه:

$$(i) \sum_{i=1}^{m}\mu_i = |D'|$$

$$(ii) \sum_{i=1}^{m}\mu_i^2 = |D'| + 2\sum_{i<j} d_{ij}$$

اثبات: (i) می‌دانیم که مجموع مربعات مقادیر ویژه $B_{D'd}(G)$ برابر است با تریس $B_{D'd}(G)$، بنابراین:

$$\sum_{i=1}^{m}\mu_i = \sum_{i=1}^{m}\mathrm{d_{ii}} = |D'|$$

(ii) به‌طور مشابه، مجموع مربعات مقادیر ویژه $B_{D'd}(G)$ برابر است با تریس $B_{D'd}(G)$. بنابراین،

$$\sum_{i=1}^{m}\mu_i^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}d_{ij}d_{ji}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left(d_{ij}\right)^2+\sum_{i\neq j}^{m}d_{ij}d_{ji}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left(d_{ij}\right)^2+2\sum_{i<j}d_{ij}$$

$$=|D'|+2\sum_{i<j}d_{ij}$$

قضیه ۲-۶ (کران بالا): فرض کنید گراف G دارای n رأس، m یال و D' مجموعه کمینه احاطه‌گر یالی آن باشد. آن‌گاه

$$E_{D'd}(G)\leq\sqrt{m\left(2\sum_{i<j}\left(d_{ij}\right)^2+|D'|\right)}$$

قضیه ۲-۷ (کران پایین): فرض کنید گراف G دارای n رأس، m یال و D' مجموعه کمینه احاطه‌گر یالی آن باشد. اگر $P=|\det(B_{D'd}(G))|$، آن‌گاه:

$$[E_{D'd}(G)]^2\leq\sqrt{|D'|+\sum_{i<j}\left(d_{ij}\right)^2+m(m-1)P^{\frac{2}{m}}}$$

قضیه ۲-۸ (قضیه تقارن): فرض کنید گراف G دارای مجموعه کمینه احاطه‌گر یالی D' باشد. اگر انرژی فاصله کمینه احاطه‌گر یالی $E_{D'd}(G)$ یک عدد گویا باشد، آن‌گاه:

$$E_{D'd}(G)\equiv D'(mod\ 2).$$

تعریف ۲-۹[۲۲] فرض کنید G یک گراف همبند باشد، شاخص وینر- یالی G[1] به‌عنوان مجموع فاصله‌ها (در گراف خط) بین همه جفت یال‌های G تعریف شده است، یعنی:

$$W_e(G)=\sum_{\{e_i,e_j\}\subseteq E}d_{ij},$$

قضیه ۲-۱۰: اگر $\mu_1(G)$ بزرگترین مقدار ویژه ماتریس فاصله کمینه احاطه‌گر یالی $D_{D'd}(G)$ باشد، آن‌گاه:

$$\mu_1(G)\geq\frac{W_e(G)+|D'|}{m}$$

که $W_e(G)$ شاخص وینر- یالی گراف G است.

۳- مراجع

[1] I. Gutman, "The energy of a graph," Ber. Math-Statist. Sekt. Forschungsz. Graz, vol. 103, pp. 1-22, 1978.

[2] R. B. Bapat, "Graphs and Matrices," Hindustan Book Agency, Springer, London, 2011.

[3] I. Gutman, B. Furtula, E. Zogic, and E. Glogic, "Resolvent Energy of Graphs," MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, vol. 75, pp. 279-290, 2016.

[4] V. Nikiforov, "The energy of graphs and matrices," Journal of Mathemathical Analysis and Applications," vol. 326, pp. 1472-1475, 2007.

[5] S. K. Vaidya and K. M. Popat, "Some New Results on Energy of Graphs," MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, vol. 77, pp. 589-594, 2017.

[6] K. C. Das and I. Gutman, "Bounds for the energy of graphs," Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, vol. 45, no. 3, pp. 1-9, 2016.

[7] A. Jahanbani, "Lower bounds for the energy of graphs," AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, vol.15, no. 1, pp. 88-96, 2018.

[8] C. Adiga, A. Bayad, I. Gutman, and S. A. Srinivas, "The minimum covering energy of graph," Kragujevac Journal of Science, vol. 34, pp. 39-56, 2012.

[9] I. Gutma, D. Kiani, and M. Mirzakhah, "On incidence energy of a graph," MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, vol. 62 pp. 573-580, 2009.

[10] I. Gutman and S. Wagner, "The matching energy of a graph," Discrete Applied Mathematics, vol. 160, pp. 2177-2187, 2012.

[11] M. Jooyandeh, D. Kiani, and Mirzakhah, "Incidence energy of a graph," MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, vol. 62, pp. 561-572, 2009.

[12] R. Kann, B. N. Dharmendra, and G. Sridhara, "Laplacian minimum dominating energy of a graph," International Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 89, no. 4, pp. 565-581, 2013.

[13] R. Kann, B. N. Dharmendra, and G. Sridhara, "Minimum dominating energy of a graph," International Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 85, no. 4, pp. 707-718, 2013.

[14] S. K. Vaidya and R. M. Pandit, "Edge Domination in Some Path and Cycle Related Graphs," Hindawi Publishing Corporation ISRN Discrete Mathematics, 2014.

[15] J. Zhang, H. Kan, and X. Liu, "Graphs with extremal incident energy," Filomat, vol. 29, no. 6, pp. 1251-1258, 2015.

[16] R. Kann, B. N. Dharmendra, and G. Sridhara, "Minimum dominating distance energy of a graph," Journal of the Indian Mathematical Society vol. 20, pp. 19-29, 2014.

[17] R. Kanna, and B. N. Dharmendra, "Minimum covering distance energy of a graph," Applied Mathematical Sciences, vol. 7, pp. 5525-5536, 2013.

[18] B. Tamilselvi and Y. Yogalakshmi, "Minimum covering distance energy for some special graphs," International Journal of Computer and Mathematical, 2016.

[19] S. B. Bozkurt, A. D. Gungor, and B. Zhou, "Note on the distance energy of graphs," MATCH Communications in

Mathematical and in Computer Chemistry, vol. 64, pp. 129-134, 2010.

[20] A. D. Gungor and S. B. Bozkurt, "On the distance spectral radius and distance energy of graphs," Multilinier Algebra, vol. 59, pp. 365-370, 2011.

[21] G. Indulal, L. Gutman, and A. Vijayakumar, "On distance energy of graphs," MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, vol. 60, pp. 461-472, 2008.

[22] P. Dankelmann, I. Gutman, S. Mukwembi, and H. C. Swart, "The edge Wiener index of a graph," Discrete Mathematics, vol. 309, pp. 3452-345, 2009.