

بررسی مشاهده پذیری سامانه های مزدوج آفین با کمک نظریه گراف

مهدی رضانی^۱، دوست علی مژده^۲، لیلی حیدرزاده کاشانی^۳

۱-استادیار ۳-دانشجوی دکتری بابلسر، دانشگاه مازندران، گروه ریاضی ۲-استاد، دانشگاه تفرش، گروه ریاضی

(دریافت: ۱۳۹۷/۰۸/۲۵ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۷/۰۲)

چکیده

می دانیم که به هر سامانه دینامیکی می توان یک گراف نسبت داد، به طوری که آن گراف بعضی خاصیت های سامانه مورد نظر را توصیف می کند. در این مقاله نشان می دهیم با استفاده از نظریه گراف می توان شرط لازم و کافی مشاهده پذیری سامانه ها را بررسی کرد. همچنین با انتخاب مناسب خواص گراف مربوطه می توان نتایج خوبی در مورد سامانه های بزرگ و پیچیده به دست آورد. برای این منظور ابتدا روش های ساده برای بررسی سامانه های معمولی با مقیاس پایین در نظر گرفته شده و سپس برای سامانه های پیچیده و مقیاس بالا، از تجزیه و ترکیب که خوش تعریف می باشند، استفاده می شود.

واژه های کلیدی: ساختار سامانه های مزدوج آفین، مشاهده پذیری، نظریه گراف

۱- مقدمه

فرض می کنیم ماتریس های ثابت A, B_1, B_2, \dots, B_m در $\mathbb{R}^{n \times n}$ و $u \in U$ کنترل کننده هستند به طوری که $u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ سامانه کنترل دوخطی روی \mathbb{R}^n می نامیم.

برای کسب اطلاعات بیشتر در زمینه سامانه های کنترل دوخطی متغیر با زمان $\dot{x} = A(t)x + u(t)B(t)x$ می توان به مرجع [۲] مراجعه کرد.

در حالت کلی سامانه دوخطی را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\dot{x} = \left(\sum_{i=1}^m u_i(t) B_i \right) x \quad \Omega = -\Omega \quad (3)$$

که سامانه کنترل دوخطی متقارن نامیده می شود.

در میان سامانه های کنترل دوخطی، جمله Ax با جمله کنترل $u_0 B_0 x$ ، اگر $B_0 = A$ باشد، کنترل ثابت است. سامانه های دوخطی به وسیله موهلر معرفی شده که می توان در [۳] بررسی کرد.

یک مدل غیرخطی (۱) را اغلب می توان با شبیه سازی کامپیوتری درک کرد، ما سعی می کنیم با خطی سازی و با استفاده از نظریه گراف روش ساده تری را مطرح نماییم.

با در نظر گرفتن یک حالت ζ با $f(\zeta) = a$ ، سامانه کنترل را می توانیم به صورت زیر حول آن خطی سازی نمود:

می دانیم که در مشاهده پذیری سامانه های دوخطی با مشکلات زیادی برخورد می کنیم. در بسیاری از مسائل علوم و مهندسی ریاضیات عمیق تر برای سهولت کار استفاده می شود، معمولاً با استفاده از نظریه گراف می توان بررسی دقیق تری انجام داد [۱] در علوم و مهندسی اکثر سامانه ها غیرخطی هستند که بیشتر بحث ها روی آن ها انجام شده است. در این مقاله هدف بررسی نظریه سامانه های مزدوج آفین می باشد. معمولاً می توان سامانه های کنترل غیرخطی را با دینامیک زیر بیان کرد.

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i(t) g_i(x) \quad (1)$$

جایی که f, g_1, g_2, \dots, g_m نگاشت های مشتق پذیر پیوسته از $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ می باشند. روش معمول دیگر که می توان در مورد آن بحث کرد سامانه های کنترل خطی متغیر با زمان $\dot{x} = f(x, t) + \sum_{i=1}^m u_i(t) g_i(t)$ است. همچنین اگر معادله خطی متغیر با زمان $\dot{x} = F(t)x$ را در نظر بگیریم، که $g_i(t) = B_i x$ ترکیب خطی متناهی از ماتریس های ثابت با ضرایب دلخواه می باشند. این راه به تعریف زیر منجر می شود:

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^m u_i(t) B_i x \quad (2)$$

و $A_i - edges = \{(x_j, x_i) | A_i(i, j) \neq 0\}$ و $i = 0, 1, \dots, m$

$C - edges = \{(x_i, y_j) | C(i, j) \neq 0\}$

و جایی که $M(i, j)$ را عنصر i ام از ماتریس M و (v_i, v_j) یک یال جهت‌دار از راس $v_i \in V$ به $v_j \in V$ را نشان می‌دهد.

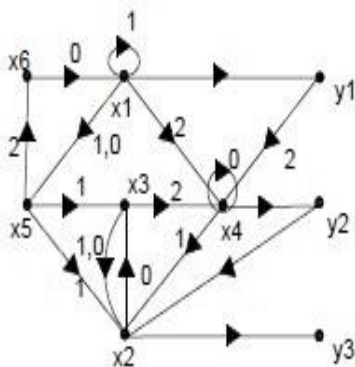
چنان که تعداد i تحت هر $A_i - edges$ به منظور حفظ اطلاعات مربوط به یال‌ها در گراف جهت‌دار آن‌ها نشان داده شده است.

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} \lambda_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_7 & \lambda_8 & \lambda_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{13} & 0 & \lambda_{14} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{15} & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \lambda_{16} & 0 & 0 \\ \lambda_{17} & \lambda_{18} & \lambda_{19} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال: در شکل (۱) گراف جهت‌دار برای مزدوج آفین تعریف شده توسط ماتریس‌های زیر را نشان می‌دهد.

که در آنها λ_i ها پارامترهای آزاد هستند.



شکل (۱): گراف جهت‌دار برای بررسی مشاهده‌پذیری مثال (۱)

۳- مفاهیم و تعاریف اولیه

۳-۱- تعاریف و مفاهیم سامانه مزدوج آفین

در این بخش سامانه مزدوج آفین را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta) \quad b_i = g_i(\zeta) \quad B_i = \frac{\partial g_i}{\partial x}(\zeta) \quad (4)$$

$$\dot{x} = (Ax+a) + \sum_{i=1}^m u_i(t)(B_i x + b_i) \quad x, a, b_i \in \mathbb{R}^n \quad (5)$$

سامانه کنترلی توصیف‌شده در (۵) را یک سامانه مزدوج آفین می‌نامند.

بسیاری از سامانه‌های کاربردی به صورت سامانه‌های مزدوج آفین می‌باشند که در کتاب‌های موهلر [۴] به آن‌ها بیشتر اشاره شده است. همچنین جنبه‌های سامانه (۵)، آنالوگ و زمان گسسته آن هم‌زمان بررسی شده‌اند.

نظریه مشاهده‌پذیری سامانه (۵) ابتدا در سال ۱۹۶۸ توسط موهلر و رینک در [۵] به‌عنوان یک سامانه دو خطی مورد بررسی قرار گرفته است. در اینجا به کمک نظریه گراف مشاهده‌پذیری و بنابراین، سامانه‌های مزدوج آفین که اغلب برای استراتژی‌های سرمایه‌گذاری شخصی مناسب کاربرد دارند را بررسی می‌نماییم.

۲- تعاریف اولیه گراف

در این بخش رویکرد گراف جهت‌دار برای سامانه‌های غیرخطی را معرفی می‌کنیم. به طوری که (Σ_λ) را به‌عنوان سامانه مورد نظر گراف $G(\Sigma_\lambda)$ می‌نامیم که به صورت مجموعه‌ای از رئوس و یال‌ها می‌باشد. بنابراین، گراف را به صورت $G(\Sigma_\lambda) = (V, E)$ بیان می‌کنیم به طوری که رأس‌ها بیانگر مؤلفه‌های حالت و ورودی از (Σ_λ) و یال‌های جهت‌دار لینک بین رأس‌ها را نشان می‌دهند. همچنین ماتریس مجاورت گراف G به صورت یک ماتریس $n \times n$ می‌باشد به طوری که $a_{ij} = w(v_i, v_j)$ و اگر یال $(v_i, v_j) \in E$ باشد $a_{ij} = 1$ در غیر این صورت $a_{ij} = 0$ می‌باشد. بنابراین، ماتریس مجاورت یک گراف همیشه نامنفی می‌باشد. همچنین برعکس آن می‌توانیم برای یک ماتریس نامنفی A یک گراف جهت‌دار که ماتریس مجاورت آن A می‌باشد مرتبط کنیم.

برای یک سامانه دقیق‌تر رأس‌های گراف را به صورت $V = X \cup Y$ به طوری که $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعه‌ای از راس‌های حالت و $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ مجموعه‌ای از راس‌های خروجی هستند، نشان می‌دهیم. حال مجموعه یال‌ها را به صورت:

$$E = \{(\cup A_i - edges) \cup (C - edges)\}$$

مطرح می‌کنیم به طوری که برای

۳-۲- تعاریف و مفاهیم گراف

در این بخش برخی از تعاریف و نکات در مورد گراف را مطرح می‌کنیم تا به کمک آنها بتوانیم شرط لازم و کافی برای بررسی مشاهده‌پذیری سامانه، به‌خصوص مزدوج آفین را ارائه دهیم.

یک کلاس از سامانه‌های مزدوج آفین را هم‌بند خروجی می‌نامیم اگر برای هر راس حالت، یک مسیر از راس حالت به حداقل یک راس خروجی وجود داشته باشد.

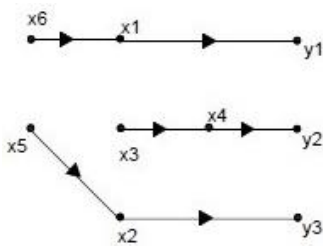
در سامانه مزدوج آفین مسیر P را یک مسیر خروجی می‌نامیم هرگاه هر مسیر آن یک رأس در خروجی داشته باشد.

دو یال $e_1 = (v_1, v'_1), e_2 = (v_2, v'_2)$ عناصری از \mathcal{E} هستند، e_1, e_2 را v -مجزا نامیم هرگاه $v_1 \neq v_2, v'_1 \neq v'_2$ همچنین دو یال را v -مجزا می‌نامیم هرگاه $v_1 = v'_2, v'_1 = v_2$

k یال را v -مجزا می‌نامیم هرگاه دو یال آن متقابلاً v -مجزا باشند.

k یال v -مجزا می‌باشد اگر راس‌های آغازین آن‌ها متفاوت باشد ولی تمام یال‌هایی که راس‌های انتهایی مشابه دارند

می‌توانند به شاخص‌های متمایز i مرتبط باشند



شکل (۲): یک مجموعه با ۶ یال v -مجزا

۴- بدنه اصلی

فرض کنید که \mathbb{R}^n با عملکرد جمع گروه، یک گروه لی آبلین باشد.

تعریف ۳:

اگر $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ آنگاه ضرب شبه جهت‌دار از G و \mathbb{R}^n یک گروه لی است $G := \mathbb{R}^n \rtimes G$ ، به طوری که

$$(\Sigma_\lambda) = \begin{cases} \dot{x} = Ax + a + \sum_{i=1}^m u_i(t)(B_i x + b_i) & x, a, b_i \in \mathbb{R}^n \\ y(t) = Cx \end{cases}$$

به طوری که:

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^m \text{ و}$$

$$y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_p(t)) \in \mathbb{R}^p \text{ و}$$

که به ترتیب حالت، ورودی و خروجی را نشان می‌دهند. برای

$$i = 1, 2, \dots, m, A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p}, C \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

ماتریس‌هایی با عناصر صفر و آزاد هستند. همچنین می‌توانیم پارامترهای غیر صفر به وسیله پارامترهای حقیقی $\mu_i, i = 1, 2, \dots, k$ را با یک بردار پارامتر $\lambda = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_h)^T \in \mathbb{R}^h$ مشخص کنیم. در کل ما یک ویژگی را درست در نظر می‌گیریم اگر برای تمام سامانه‌های ساختاری $G(\Sigma_\lambda)$ درست باشد.

تعریف ۱:

ساختار مزدوج آفین سامانه (Σ_λ) به طور کلی مشاهده‌پذیر است اگر یک ورودی $u(t)$ وجود داشته باشد به طوری که هر جفت از حالت‌های اولیه $x^0(0)$ و $x^1(0)$ خروجی‌های متناظر $y^0(t)$ و $y^1(t)$ را برای $t \geq 0$ نتیجه دهد.

حال نشان می‌دهیم یک سامانه مزدوج آفین به طور کلی مشاهده‌پذیر است اگر قضیه‌ی زیر برای آن برقرار باشد.

قضیه ۲: برای ورودی پیوسته $u(t)$ ، سامانه مزدوج آفین

ساختاری (Σ_λ) به طور کلی مشاهده‌پذیر است اگر و فقط

$$T1: g - \text{rank}(O(C, A_0, A_1, \dots, A_m)) = n$$

به طوری که:

$$O(C, A_0, A_1, \dots, A_m) = \text{col}(C, CA_0, CA_1, \dots, CA_m, \dots, CA_0^2, CA_0 A_1, \dots, CA_0 A_m, CA_1 A_0, \dots, CA_m^{n-1})$$

برهان: [۷].

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 0 \end{bmatrix} \hat{B}_i = \begin{bmatrix} 0_{n,n} & b \\ 0_{1,n} & 0 \end{bmatrix} ad_A^k(\hat{B}) = \begin{bmatrix} 0_{n,n} & A^k b \\ 0_{1,n} & 0 \end{bmatrix}$$

برهان: [۶].

۵- قضیه اصلی

در این بخش شرط لازم و کافی برای مشاهده پذیری سامانه مزدوج آفین (Σ_λ) را ارائه می‌کنیم.

قضیه ۷: ساختار سامانه مزدوج آفین (Σ_λ) به طور کلی مشاهده پذیر است اگر و تنها اگر گراف جهت‌دار $G(\Sigma_\lambda)$ در دو شرط زیر صدق کند:

۱. هر راس حالت همبند خروجی باشد به طوری که راس آغازین آن در یک مسیر خروجی قرار گرفته باشد.

۲. سامانه با n راس حالت دارای n یال v -مجزا در $G(\Sigma_\lambda)$ باشد.

با برقراری شرط (۱) و (۲)، آنگاه کلاس سامانه $[C, A]$ دارای ساختار مشاهده پذیری می‌باشد.

برهان: این موضوع خوش تعریف است اگر و فقط اگر $\forall S \in C, g - rank(AI - \lambda, C) = n$ به عبارت دیگر، گزاره

۱-۱۴ در $[Y]$ مطرح می‌شود که اگر در گراف جهت‌دار متناظر با $(\Sigma_\lambda, \Lambda)$ ، هر راس حالت یک راس آغازین از یک مسیر باشد آنگاه $g - rank(AI - \lambda, C) = n$ حال فرض کنیم که شرایط قضیه (۲) برقرار است. به عبارت دیگر گزاره ۱۴-۱ از $[Y]$ به عنوان همه پارامترها از ماتریس A_0, A_1, \dots, A_m به صورت آزاد فرض شده‌اند.

شرط (۱) از قضیه (۲) این نتیجه را به ما می‌دهد که برای تقریباً همه مقادیر ورودی $\bar{u} = (\hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_m)^T$ داریم،

$$g - rank(col(SI - A_0 + \hat{u}_1 A_1 + \dots + \hat{u}_m A_m, C)) = n, \quad \forall S \neq 0$$

به عبارت دیگر، اگر مزدوج آفین (Σ_λ) به طور کلی غیرقابل مشاهده باشند، آنگاه برای همه مقادیر ثابت مثبت $\bar{u} = (\hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_m)^T$ سامانه‌های خطی به وسیله ماتریس‌های (\hat{A}, C) تعریف می‌شوند که همچنین غیرقابل مشاهده می‌باشند. جایی که \hat{A} این حقیقتی است که برای تمام مقادیر ثابت ورودی \hat{u} اتفاق می‌افتد.

اگر در تناقض با شرط (۱) سامانه قابل همبند خروجی نباشد، آنگاه حداقل یک سطر (ردیف) بالایی از $[\hat{A}, C]$ در بلوک قطر

$\{(v, X) | v \in \mathbb{R}^n, X \in G\}$ یک مجموعه است و عملکرد گروه به صورت زیر می‌باشد.

$$(v, X) \cdot (w, Y) := (v + Xw, XY)$$

نتیجه ۴:

۱. عملگر استاندارد روی \mathbb{R}^{n+1} به صورت زیر است:

$$\hat{G} := \{ \hat{A} := \begin{bmatrix} A & a \\ 0_{1,n} & 1 \end{bmatrix} | A \in G, a \in \mathbb{R}^n \} \subset GL(n+1, \mathbb{R}).$$

۲. گروه لی از همه تبدیلات $x \rightarrow Ax + a$ آفین در \mathbb{R}^n می‌باشد. $GL(n, \mathbb{R})$ را با $Aff(n, \mathbb{R})$ به صورت نمایش استاندارد نمایش می‌دهیم.

۳. جبر لی از $Aff(n, \mathbb{R})$ روی \mathbb{R}^n نمایش داده می‌شود. به طوری که

$$aff(n, \mathbb{R}) = \{ \hat{X} := \begin{bmatrix} X & x \\ 0_{1,n} & 0 \end{bmatrix} | x \in GL(n, \mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n \} \subset GL(n+1, \mathbb{R}).$$

$$\hat{X} \cdot \hat{Y} = \begin{bmatrix} X & x \\ 0_{1,n} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & y \\ 0_{1,n} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \cdot Y & Xy - Yx \\ 0_{1,n} & 0 \end{bmatrix}$$

به استفاده از این روش دو نگاشت تصویر زیر را داریم [۶]

$$\begin{aligned} \pi_1: \hat{G} &\rightarrow \mathbb{R}^n & \pi_2: \hat{G} &\rightarrow G \\ \pi_1 = \begin{bmatrix} A & a \\ 0_{1,n} & 1 \end{bmatrix} &= a & \pi_2 = \begin{bmatrix} A & a \\ 0_{1,n} & 1 \end{bmatrix} &= A \end{aligned}$$

گزاره ۵: فرض کنید که $z := col(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$

بردار حالت و برای ابر صفحه $L := \{z | x_{n+1} = 1\}$ نمایش گروه آفین به صورت زیر می‌باشد که در این صورت یک سامانه دوخطی را نمایش می‌دهد.

$$\dot{z} = \hat{A}z + \sum_{i=1}^m u_i \hat{B}_i z, \quad \text{for } \hat{A} = \begin{bmatrix} A & a \\ 0_{1,n} & 0 \end{bmatrix}, \hat{B}_i = \begin{bmatrix} B & b_i \\ 0_{1,n} & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

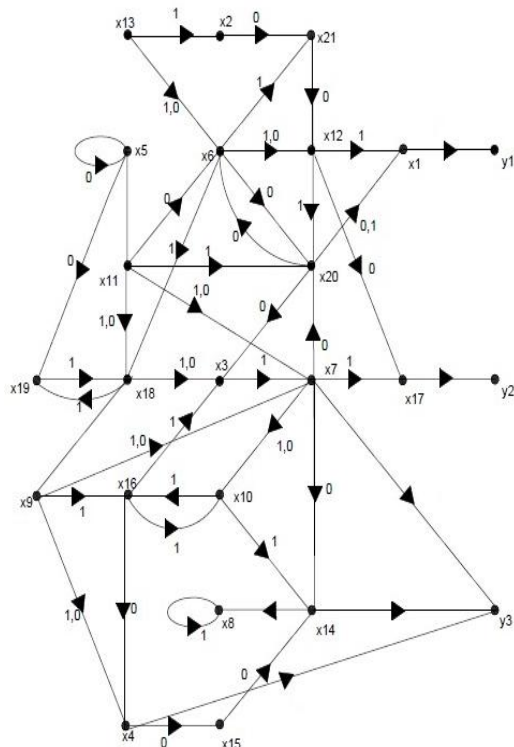
برهان: [۶].

گزاره ۶: فرض کنید $\dot{x} = Ax + ub$ ، آنگاه برای نمایش در $Aff(n, \mathbb{R})$ داریم.

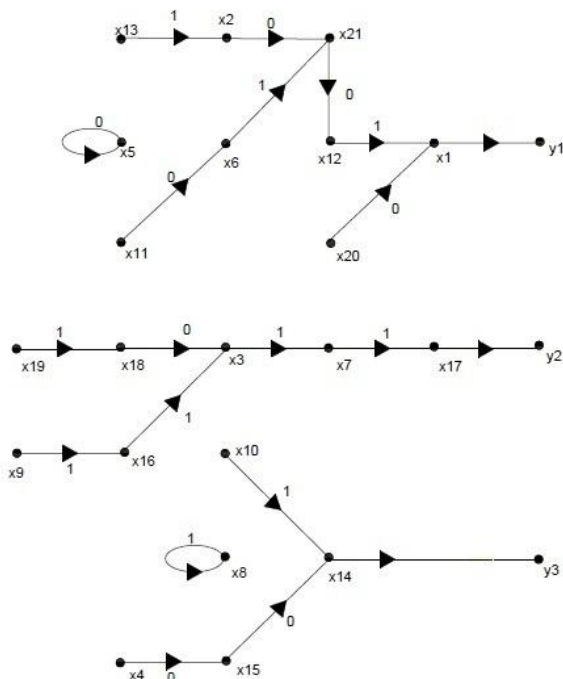
$$z := col(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}), \quad \dot{z} = \hat{A}z + u(t) \hat{B}z, \quad z(0) = \begin{bmatrix} \zeta \\ 1 \end{bmatrix}$$

به طوری که:

در بعضی موارد بررسی شرط مشاهده پذیری کار بسیار دشوار و پیچیده‌ای می‌باشد.



شکل (۳): توضیح مثال



شکل (۴): توضیح مثال بالا با ۲۱- یال A- مجزا

اصلی قرار ندارد. حال فرض می‌کنیم $[\hat{A}_{II}]$ همه صفر هستند. حالا برای هر $(\hat{A}, C) \in [\hat{A}, C]$ ما می‌توانیم نتیجه زیر را بررسی کنیم.

فرض کنید λ یک مقدار ویژه از قطر اصلی بلوک $[\hat{A}_{II}] \in [\hat{A}_{II}]$ باشد. آن‌گاه λ همچنین یک مقدار ویژه از $\hat{A} \in [\hat{A}]$ و رتبه هستند. بر طبق گزاره ۱۴-۱ در [۷] هر سامانه پذیرفتنی $(\hat{A}, C) \in [\hat{A}, C]$ نمی‌تواند مشاهده‌پذیر باشد.

اگر در تناقض شرط (۲) ساختار رتبه از $[\hat{A}, C]$ کمتر از n است، آن‌گاه برای هر جفت ماتریس $(\hat{A}, C) \in [\hat{A}, C]$ برقرار است، بنابراین، $rank(\hat{A} - \lambda I, C) = n$ برای $\lambda = 0$ نقض می‌شود بنابراین، هیچ سامانه پذیرفتنی نمی‌تواند قابل مشاهده باشد.

ما به‌طور مداوم تاکید می‌کنیم، اگر شرایط (۱) و (۲) باهم برقرار باشند آنگاه ساختار مشاهده‌پذیر است.

نتیجه ۸:

سامانه مزدوج آفین به‌طور کلی مشاهده‌پذیر است اگر و فقط اگر در گراف جهت دارد و شرط زیر برقرار باشد:

۱. هر راس حالت همبند خروجی باشد.
۲. $g-rank(\text{col}(C, A_0, A_1, \dots, A_m)) = n$ باشد که این هم‌ارز ماکسیمال تطابق از گراف دو بخشی برای ماتریس $\text{col}(C, A_0, A_1, \dots, A_m)$ برابر n است.

هدف اصلی، بیان راه‌حل مناسب بود که برای سامانه‌های مقیاس بالا و پیچیده بسیار خوب عمل می‌کند.

۶- بررسی یک سامانه نمونه پیچیده

در این مقاله در این بخش برای بررسی و پیاده‌سازی قضیه اصلی و نتیجه آن در مورد سامانه مزدوج آفین نمونه زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

همچنین در شکل (۴) شرایط قضیه بررسی شده است. سامانه دارای ۲۱ رأس حالت می‌باشد، که در شکل (۴)، ۲۱ یال مجزا وجود دارد و همچنین بین هر رأس حالت یک مسیر به رأس خروجی وجود دارد بنابراین، دو شرط قضیه اصلی در مورد سامانه برقرار است در نتیجه می‌توان بیان نمود سامانه مورد نظر یک سامانه مزدوج آفین مشاهده‌پذیر می‌باشد. همچنین شرایط پیشنهادی را می‌توان به راحتی با دست بررسی کرد در حالی که

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش جدید برای تحلیل و توضیح مشاهده‌پذیری از سامانه مزدوج آفین را به کمک نظریه گراف ارائه دادیم. همچنین تعاریف پایه‌ای گراف را برای آنها تعمیم داده‌ایم. همچنین جالب است که می‌توانیم کلاس خاصی از سامانه‌های غیرخطی به صورت دوخطی را تحلیل کنیم، سرانجام شرایط لازم و کافی برای کنترل‌پذیری سامانه‌های مزدوج آفین را هم توضیح داده‌ایم. در روش مطرح شده به اطلاعات کمی درباره سامانه نیاز داریم که به راحتی می‌توان با بررسی رفتار سامانه‌های کوچک با مقیاس پایین به صورت دستی و به کمک سامانه‌های مقیاس بالا که اغلب پیچیده هستند مشاهده‌پذیری را تعمیم داد. سپس می‌توان با کمک نظریه گراف برای مشخص کردن مشاهده‌پذیر بودن ساختار سامانه‌های بزرگ و پیچیده استفاده کرد. این رویکرد همچنین می‌تواند برای بررسی بهینه‌سازی و قراردادن حسگر برای دستیابی به قابلیت مشاهده‌پذیری سامانه نیز مفید باشد.

۸- مراجع

- [5] O. M. Grasselli and A. Isidori, "Deterministic state reconstruction and reachability of bilinear processes," In Proceedings of IEEE Joint Automatic Control Conference, pp. 1423-1427, San Francisco, U.S.A, 1977.
- [6] D. Williamson, "Observation of bilinear systems with application to biological control," *Automatica*, vol. 13, no. 3, pp. 243-254, 1977.
- [7] R. R. Mohler and R. E. Rink, "Multivariable bilinear system control," In *Advances in Control Systems*, C. T. Leondes, Ed. New York: Academic Press, vol. 2, vol. 209, 1966.
- [8] T. Boukhobza and F. Hamelin, "Observability analysis for structured bilinear systems a graph-theoretic approach," Author manuscript, published in *Automatica* 1968,1974, 2007.
- [9] A. C. Commault, J.-M. Dion, and D. H. Trinh, "Observability recovering by additional sensor implementation in linear structured systems," In Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference, Seville, Spain, 2005
- [10] E. J. Davison and S. H. Wang, "Properties of linear time-invariant multivariable systems subject to arbitrary output and state feedback," *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-18(1), pp. 24-32, 1973.
- [11] D. L. Elliott, "Bilinear control systems Matrices in action," *Applied mathematical sciences*, 1699.
- [12] A. Y. Khapalov and R. R. Mohler, "Reachability sets and controllability of bilinear time-invariant systems," *Aqualitative approach*, *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 41, no. 9 , pp. 1342-1346, 1966.
- [13] J. Lvine, "A graph-theoretic approach to input output decoupling and linearization," In: A. J. Fossard and D. Normand-Cyrot, editors, *Nonlinear Systems*, chapter 3, pp. 77-91, Chapman, Hall, London, U.K, 1997.
- [14] R. R. Mohler, "Bilinear Control Processes," New York, Academic Press, vol. 207, 1973.
- [15] R. Mohler and W. Kolodziej, "An overview of bilinear system theory and applications," *IEEE Trans. Syst., Man Cybern*, vol. SMC{10, no. 10, pp. 683-688, 1980.
- [16] R. Mohler and A. Ruberti, Eds, "Theory and Applications of Variable Structure Systems," New York: Academic Press, vol. 205, 1972.
- [17] K. Murota, "System Analysis by Graphs and Matroids," Springer- Verlag, New York, U.S.A, 1987.
- [1] R. R. Mohler, "Nonlinear Systems, vol. II, Applications to Bilinear Control," Englewood Cli_s, N.J. Prentice-Hall, 208, 1991.
- [2] S. A. Parah, J. A. Sheikh, N. A. Loan, F A. Isidori, and A. Ruberti, "Time-varying bilinear systems, in *Variable Structure Systems with Application to Economics and Biology*," Berlin, Springer-Verlag: *Lecture Notes in Econom. and Math. Systems*, vol. 111, pp. 44-53, 1975.
- [3] R. R. Mohler and A. Ruberti, Eds, "Recent Developments in Variable Structure Systems," *Economics and Biology, Proc. U.S. Italy Seminar, Taormina, Sicily*, Berlin, Springer-Verlag, vol. 210, 1978.
- [4] R. R. Mohler, "Controllability and Optimal Control of Bilinear Systems," Englewood Cli_s, N. J. Prentice-Hall, 206, 1970.