مجله علمی- پژوهشی "پدافند الکترونیکی و سایبری"

ویژه‌نامه ترکیبیات، رمزنگاری و محاسبات، ص ۴۰ -۳۵

ارایه یک نسخه تعمیم‌یافته از روش تجزیه آدومیان برای حل معادلات دیفرانسیل عادی در حضور نامعینی بازه‌ای

محسن شاهرضایی[۱*]، نوید رزمجوی

۱- استادیار، ۲- دکتری، دانشگاه جامع امام حسین(ع)

(دریافت: ۱۳۹۷/۰۸/۲۵ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۷/۰۲)

چکیده

به‌طور کلی، اغلب مسائل مهندسی با یک مدل ریاضی متناظر تعریف می‌شوند و اغلب مدل‌ها همراه با پارامترهایی هستند که یا به‌طور دقیق قابل تعیین نیستند و یا به مرور زمان تغییر می‌کنند. این امر باعث ایجاد نامعلومی‌هایی در مدل سامانه می‌شود. اثر پارامترهای نامعلوم ممکن است باعث شود پاسخی کاملاً متفاوت را نسبت به سامانه واقعی ارائه دهند. بنابراین، برای به‌دست آوردن یک پاسخ مطلوب در سامانه، باید محدوده نامعلومی‌ها به درستی در فرض مسئله تعریف شوند. در این مقاله، به ارایه یک نسخه تعمیم‌یافته از روش تجزیه آدومیان پرداخته شده است. هدف اصلی، ارایه روشی مناسب برای حل معادلات دیفرانسیل عادی در حضور نامعینی بازه‌ای است. روش پیشنهادی در نهایت بر روی یک مثال کاربردی اعمال شده و نتایج آن با چند روش مبتنی بر نامعینی بازه‌ای مقایسه شده است. نتایج نهایی نشان می‌دهد که روش پیشنهادی دقت خوبی در پیدا کردن فاصله مناسب و فشرده دارد.

واژه‌های کلیدی: آنالیز بازه‌ای، روش تجزیه آدومیان، عدم قطعیت بازه‌ای، معادلات دیفرانسیل عادی.

۱- مقدمه

مدل‌های ریاضی به‌صورت گسترده‌ای برای معرفی و تحلیل مسائل واقعی در شاخه‌های مختلف علوم و مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند. معمولاً برای تحلیل آسان‌تر، با در نظر گرفتن یک سری فرضیات، به ساده‌سازی مدل ریاضی سامانه می‌پردازند [۲-۱].

این ساده‌سازی باعث کاهش دقت مدل ریاضی و درنتیجه پاسخ مسئله واقعی می‌گردد. از طرف دیگر، با افزایش بیش‌ازحد دقت، مدل حل مسئله پیچیده می‌شود؛ بنابراین، دیدگاه منطقی این است که یک مصالحه[۱] بین سادگی و دقت روش برقرار باشد.
پیشرفت‌های انجام‌گرفته در سال‌های اخیر باعث افزایش دقت و سرعت دقت مدل‌ها شده است. این مبحث باعث افزایش تمایل پژوهشگران به استفاده از روش‌هایی با مدل‌های جدید و درنتیجه، به‌دست آوردن جواب‌های مقاوم‌تر برای حل مسائل کاربردی را فراهم ساخته است.

هرچند این نگرش باعث امیدواری در پیشرفت رو به جلو است اما محدودیت‌های خاص خود را در طول زمان به همراه داشته است که باعث کندی یا حتی توقف رو به جلو آن شده است. از جمله این محدودیت‌ها عبارت‌اند از:
۱) یک سری مدل‌های ریاضی شامل پارامترهایی می‌باشند که بیشتر این پارامترها در عمل نمی‌توانند به‌صورت دقیق محاسبه شوند. منابع زیادی در مورد نحوه تولید نامعینی پارامتری وجود دارند که دو مورد از مهم‌ترین آن‌ها عبارت‌اند از [۳]:

خطای اندازه‌گیری، یکی از بزرگ‌ترین منابع نامعینی پارامتری است که ناشی از وسیله اندازه‌گیری و تأثیر محیط است.
خطای تخمین پارامترها، به دلیل دسته‌بندی نادرست، تخمین پارامترها با نمونه‌های کم و یا از نمونه‌های نامشخص ناشی می‌شود.

به همین دلیل این مقوله مدل را به اجبار به سمت بحث مدل با پارامترهای نامعین[۲] سوق می‌دهد.
۲) نامعینی‌ها در یک مدل واقعی از یک نوع نمی‌باشند، لذا هرکدام باید در حوزه خودشان به درستی شناسایی و محدوده آن‌ها مشخص شود. نامعینی‌ها می‌توانند به سه کلاس متفاوت تقسیم شوند:

*رایانامه نویسنده مسئول: mshahrezaee@iust.ac.ir

[1] Trade off

[2] Uncertainty parameters

الف) نامعینی شناختی[3]: بیشتر بنا به دلایلی مانند صرف‌نظر کردن یا نداشتن اطلاعات کافی در مورد سامانه فیزیکی یا محیط و یا تخمین پارامترهای سامانه و ... به‌وجود می‌آیند [۴].
ب) نامعینی تصادفی[4]: این نامعینی ناشی از فرآیندهای تصادفی ناشی از ذات خود سامانه واقعی و یا تحت تأثیر محیط، همانند نویز و ... ایجاد می‌شود.
ج) نامعینی آشفته[5]: نامعینی آشفته، حساسیت بالای سامانه نسبت به شرایط اولیه را در نظر می‌گیرد [۵].

۳) هرکدام از مدل‌ها (حتی بدون نامعینی) روش‌های حل مخصوص به خود را دارند که هم‌زمان قابل انجام نمی‌باشند. نامعینی تصادفی بیشتر با استفاده از متغیرهای احتمالی نمایش داده می‌شوند، درحالی‌که نامعینی شناختی، به‌صورت متغیرهای بازه‌ای یا فازی و ... نمایش داده می‌شوند.
به همین دلیل، برای به‌دست آوردن پاسخ مطمئن یک سامانه به همراه این نامعینی‌ها، باید از روش‌های خاص متناظر استفاده نمود [۶].

در این میان، روش بازه‌ای، به دلیل ویژگی‌های خاص آن، دارای توانایی بالایی است. در روش بازه‌ای، عدم قطعیت در یک مرز مشخص و بین بازه‌های بالا و پایین تعریف می‌شود؛ به عبارت دیگر، اگر چه میزان عدم قطعیت ناشناخته است، می‌توان به راحتی با یک فاصله به تعریف کامل آن‌ها پرداخت [۷].
معادلات دیفرانسیل معمولی (ODEs) دارای طیف گسترده‌ای از کاربردهای مختلف در زمینه‌های مختلف علم و فناوری مانند مدل‌سازی سامانه، کنترل بهینه و مانند آن‌ها است. روش‌های مختلفی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی ارائه شده است [۲].

به تازگی، روش‌های بر پایه تجزیه چندجمله‌ای‌ها به‌عنوان روش‌های موثر، آسان و دقیق برای حل طیف وسیعی از مسائل از جمله معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی، جزئی، قطعی و یا تصادفی استفاده شده است. این روش‌ها همگرایی بالایی برای دست‌یابی به راه‌حل‌های دقیق دارند [۱].

روش تجزیه آدومیان یکی از محبوب‌ترین روش‌های تجزیه‌ای است که می‌تواند برای حل معادلات دیفرانسیل مختلف مانند معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل جبری، معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی، معادلات دیفرانسیل تاخیری و غیره استفاده شود [۸].

روش تجزیه آدومیان همیشه به‌عنوان یک روش تجزیه مناسب برای حل مسائل قطعی در نظر گرفته شده است.

در این مقاله، یک نسخه بهبود یافته از روش تجزیه آدومیان برای حل مسائل ODE در حضور نامعینی پیشنهاد شده است. هدف اصلی این است که نتیجه نهایی را در بازه مطمئنه پایدار نگه داریم حتی اگر پارامترهای سامانه در بازه نامعینی تعریف شده، تغییر یابد.

ادامه مقاله به شرح زیر است: در بخش‌های ۲ و ۳ توضیح مختصری در مورد آنالیز و جبر بازه‌ای ارائه شده است. در بخش ۴، به روش تجزیه آدومیان و رویکرد آن ارائه شده است. بخش ۵ توضیح نسخه پیشرفته روش تجزیه آدومیان که نوآوری اصلی مقاله است، توضیح داده شده است. بخش ۶، عملکرد سامانه را بر روی یک معادله ODE غیرخطی پیچیده نشان داده و مقایسه آن با روش‌های مشابه دیگر را نشان داده است و در نهایت، نتیجه‌گیری مقاله در بخش ۶ ارایه شده است.

۲- آنالیز بازه‌ای

آنالیز بازه‌ای نوع خاصی از محاسبات است که به‌جای نقاط روی مجموعه‌ها عمل می‌کند که این مجموعه در یک جعبه [6] مشخص قرارگرفته است. در عمل، مجموعه بازه‌ها را در روی محور حقیقی $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم که در آن $\mathbb{R}$ فضای یک‌بعدی اقلیدسی است. در این حالت، در یک فضای بازه‌ای، یک مقدار حقیقی بازه‌ای $[x]$ که زیرمجموعه متصل به $\mathbb{R}$است، با دو بازه پایین و بالا تعریف می‌شود:

$$\mathbb{IR} = \ [x] = [\underline{x}, \overline{x}] \,|\, \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R},\ \underline{x} \le \overline{x} \qquad (۱)$$

به‌عبارت‌دیگر، $\underline{x}$ عبارت است از بزرگ‌ترین عدد سمت چپ $[x]$ و $\overline{x}$ عبارت است از کوچک‌ترین عدد سمت راست. به‌عنوان مثال، اگر $[x] = [1,5]$ باشد، $\underline{x} = 1$ و $\overline{x} = 5$ خواهد بود.

اگر $\underline{x} = \overline{x}$ باشد، بازه $[x]$ تباهیده [7] خواهد بود و به‌صورت یک عدد حقیقی درمی‌آید و بنابراین $\mathbb{R} \subset \mathbb{IR}$ [۹].
مرکز، طول و شعاع بازه: چند تعریف رایج که در محاسبات بازه‌ای پرکاربردند، مقدار وسط ۸، پهنای عددی بازه ۹ و شعاع بازه می‌باشند که در ادامه مشخص شده‌اند:

$$x_c = mid([x]) = \frac{\underline{x} + \overline{x}}{2} \qquad (۲)$$

---
[3] Epistemic uncertainty
[4] Aleatory (random) uncertainty
[5] Chaos uncertainty

[6] Box
[7] Degenerate
[8] Mid-Point
[9] Width of Interval Number

$$x_w = \overline{x} - \underline{x},\quad x_r = \frac{\overline{x} - \underline{x}}{2} \tag{۳}$$

با تعریف بیان‌شده، عدد بازه‌ای به‌صورت جمعی برحسب مرکز بازه و شعاع به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$[x] = x_c + [\Delta x],\quad [\Delta x] = [-x_r, x_r], \tag{۴}$$

که در آن، $[\Delta x]$ بازه متقارن $[x]$ است.

۳- جبر بازه‌ای

می‌توان عملیات جبری اساسی شامل جمع (+)، تفریق (−)، ضرب (×) و تقسیم (/) را برای اعداد بازه‌ای بسط و گسترش داد [۱۰-۱۵].

با فرض $[x] = [\underline{x}, \overline{x}], [y] = [\underline{y}, \overline{y}]$ و $\circ \in \{+, -, \times, \div\}$، داریم:

$$[x] \circ [y] = \{x \circ y \in \mathbb{R} \mid x \in [x], y \in [y]\} \tag{۵}$$

به‌طور کلی، چهار عمل جبری بازه‌ای به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند [۱۶]:

$$[x] + [y] = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}] \tag{۶}$$

$$[x] - [y] = [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}] \tag{۷}$$

$$[x] / [y] = [x] \times \frac{1}{[y]}, \tag{۸}$$

$$\frac{1}{[y]} = [\frac{1}{\overline{y}}, \frac{1}{\underline{y}}],\ 0 \notin [\underline{y}, \overline{y}]$$

$$[x] \times [y] = [\min\{\underline{x}\underline{y}, \overline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\overline{y}\}, \max\{\underline{x}\underline{y}, \overline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\overline{y}\}] \tag{۹}$$

$$[x]^n = \begin{cases} \left[0, \max(\underline{x}^n, \overline{x}^n)\right], & n = 2k \quad , 0 \in [x] \\ \left[\min(\underline{x}^n, \overline{x}^n), \max(\underline{x}^n, \overline{x}^n)\right], & n = 2k, 0 \notin [x] \\ [\underline{x}^n, \overline{x}^n], & n = 2k + 1 \end{cases} \tag{۱۰}$$

۴- روش تجزیه آدومیان

ایده اصلی روش آدومیان این است که یک تابع ناشناخته (مانند $y(x)$) را به سری بی‌نهایت $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(x)$ تجزیه کنیم به‌طوری که $y_0, y_1, \cdots$ به‌صورت بازگشتی محاسبه می‌شوند [۱]. در این حالت، اگر در تابع، ترم غیرخطی ($N(y(\mathrm{x}))$) وجود داشته باشد، باید بر اساس فرمول زیر تجزیه گردد:

$$N(y(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{۱۱}$$

که در آن، $A_n = A_n(y_0(x), y_1(x), \ldots, y_n(x))$ چند جمله‌ای آدومیان هستند:

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} N\ \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i(x) \Big|_{\lambda=0} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{۱۲}$$

با تعریف یک معادله ODE به‌صورت زیر:

$$Ly + Ry + Ny = g(x), \tag{۱۳}$$

که در آن، N اپراتور غیرخطی است، L دارای بالاترین مرتبه مشتق‌پذیری است، R عملگر دیفرانسیل خطی را با مرتبه کمتر از L تعریف می‌کند و g ترم منبع را توصیف می‌کند. با استفاده از عبارت معکوس "L^{-1}" به $Ly = g - Ry - Ny$،

$$y = \gamma + f - L^{-1}(Ry) - L^{-1}(Ny), \tag{۱۴}$$

که در آن، γ شامل شرایط مرزی و اولیه بوده و f ادغام ترم منبع است. با در نظر گرفتن معادله (۱۴)، رابطه بازگشتی y می‌تواند به‌صورت زیر در نظر گرفته شود:

$$\begin{cases} y_0 = \gamma + f, \\ y_1 = -L^{-1}(Ry_0) - L^{-1}(Ny_0) \\ \vdots \\ y_{k+1} = -L^{-1}(Ry_k) - L^{-1}(Ny_k), \quad \mathrm{k} \geq 0 \end{cases} \tag{۱۵}$$

اگر این سری به پاسخ درست همگرا شود، سپس:

$$y = \lim_{M \to \infty} \tilde{y}_M(x), \quad \tilde{y}_M(x) = \sum_{i=0}^{M} y_i(x). \tag{۱۶}$$

اطلاعات بیشتر در مورد روش تجزیه آدومیان و همگرایی آن را می‌توان در [۱۷] مطالعه نمود.

۵- نسخه تعمیم‌یافته روش تجزیه آدومیان برای حل مسائل دارای نامعینی بازه‌ای

معادله دیفرانسیلی عادی زیر را با عدم قطعیت بازه‌ای تحت شرایط پویا و شرایط اولیه زیر در نظر بگیرید:

$$F\ \ X, Y', \ldots, Y^{\ n}, \Delta\ \ = 0, \quad Y\ \ x_0\ \ = Y_0, \ldots, Y^{\ n}\ \ x_0\ \ = Y_n, \tag{۱۷}$$

که در آن، $\Delta = \ \delta_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_m\ ^{T}$ پارامترهای نامعینی را توصیف می‌کند.

ایده اصلی در این مقاله، تعمیم روش تجزیه آدومیان برای حل مسائل ODE به همراه عدم قطعیت بازه‌ای است.

فرم استاندارد ODE را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\underbrace{\delta_n Y^{\ n}\ + \delta_3 Y'' + \ldots + \delta_2 Y' + \delta_1 Y}_{R\{y(x)\}} + \alpha N\{Y(X)\} = \beta G(X), \quad \alpha \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}],\ \ \beta \in [\underline{\beta}, \overline{\beta}], \tag{۱۸}$$

در ابتدا، سامانه باید به حالت یکنواخت تبدیل شود، یعنی:

$$\underbrace{\delta_n Y^{\ n}\ + \delta_3 Y'' + \ldots + \delta_2 Y' + \delta_1 Y}_{R\{y(x)\}} + \tilde{\alpha} N\{Y(X)\} = \tilde{\beta}\, G(X), \tag{۱۹}$$

که در آن، ترم (~) تقسیم ضرایب را با δ_n نشان می‌دهد. به‌عنوان مثال، δ_n به‌صورت $[\beta]/[\delta_n]=[\beta]\times\left[\frac{1}{\overline{\delta}_n},\frac{1}{\underline{\delta}_n}\right]$ است.

δ_n به‌صورت غیرتکین فرض می‌شود؛ یعنی $0\notin\delta_n$. با استفاده از شرایط، سامانه به شرح زیر به‌دست می‌آید:

$$Y=P_n+F-L^{-1}(RY)-L^{-1}(Ny),\quad P_n=[\underline{p}_n,\overline{p}_n]. \tag{۲۰}$$

که در آن، P_n یک چندجمله‌ای بازه‌ای است که از شرایط اولیه $P_n=Y_0+Y_1x+\ldots+Y_nx^n$ به‌دست آمده است.
توجه شود که اگر $P_n=[p_n,p_n]$ باشد، به آن بازه تباهیده می‌گویند. با اعمال عملگر معکوس به ترم منبع (F)،

$$F=[L^{-1}(\beta g(x))]=[\underline{\beta},\overline{\beta}]\times[L^{-1}(\underline{g}(x)),L^{-1}(\overline{g}(x))], \tag{۲۱}$$

از آنجا که با فرض $g=g_c+\delta_g$، g_c، و δ_g ترم‌های معین و نامعین g هستند.

$$\left[L^{-1}\ \underline{g}(x)\ ,L^{-1}\ \overline{g}(x)\right]=\left[L^{-1}\ g_c(x)+[\delta_g]\right] \tag{۲۲}$$

ما می‌توانیم از یک عملیات مشابه برای به‌دست آوردن اپراتورهای دیفرانسیل خطی و غیرخطی استفاده کنیم. بنابراین، نمایش نهایی برای روش تعمیم‌یافته تجزیه آدومیان بازه‌ای به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} Y_0=[\gamma]+[\underline{\beta},\overline{\beta}]\times[L^{-1}(\underline{g}(x)),L^{-1}(\overline{g}(x))], \\ Y_{k+1}=[-L^{-1}(R\underline{y}_k)-L^{-1}(N\underline{y}_k),-L^{-1}(R\overline{y}_k) \\ \quad -L^{-1}(N\overline{y}_k)],\quad \mathrm{k}\geq 0 \end{cases} \tag{۲۳}$$

۵- نتایج تجربی

در ادامه، برای تحلیل کارایی روش پیشنهادی، یک مطالعه موردی مورد بررسی قرار گرفته و نتایج با روش‌های اویلر و تیلور بازه‌ای مقایسه شده است.
شبیه‌سازی‌ها در نرم‌افزار MATLAB 2017a انجام می‌شود. معادله دیفرانسیل غیرخطی ODE را در فاصله $0\leq x\leq 1$ نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} &Y''(x)-[\delta_1]\,xY^2(x)Y'(x)-[\delta_2]\,Y^3(x) \\ &\quad =e^x-2e^{3x}-3xe^{3x}\,, \\ &Y(0)=1,\ Y'(0)=1, \\ &1\leq\delta_1,\delta_2\leq 2, \end{aligned} \tag{۲۴}$$

که در آن، $L=\frac{d^2}{dx^2}$، $\breve{R}=0$ و $N_1Y=Y^2(x)Y'(x)$، $N_2Y=Y^3(x)$ و $g(x)=e^x-2e^{3x}-3xe^{3x}$.

ترم منبع در اینجا با تقریب مرتبه چهارم چبیشف به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} g(x)\approx&-32.612\,x^4-45.0884\,x^3 \\ &-14.2512\,x^2-1.7918\,x+7.1530 \end{aligned} \tag{۲۵}$$

که در آن،

$$\begin{aligned} Y(x)=&1+x+[\delta_1]\int_0^x\int_0^x x\,N_1(x)\,dx\,dx \\ &+[\delta_2]\int_0^x\int_0^x N_2(x)\,dx\,dx+\int_0^x\int_0^x g(x)\,dx\,dx \end{aligned} \tag{۲۶}$$

چندجمله‌ای آدومیان برای تجزیه بخش‌های غیرخطی $N_1(x)$ و $N_2(x)$ به کمک جدول (۱) به‌دست می‌آید.

جدول (۱): تجزیه اصطلاحات غیر خطی با استفاده از روش آدومیان

$N_1(x)$
$\mathrm{A}_0(x)=Y_0^2Y_0'$ $\mathrm{A}_1(x)=Y_0^2Y_1'+2Y_0Y_1Y_0'$ $\mathrm{A}_2(x)=Y_0^2Y_2'+2Y_0Y_1Y_1'+2Y_0Y_2Y_0'$ $\vdots$
$N_2(x)$
$\mathrm{A}_0(x)=Y_0^3$ $\mathrm{A}_1(x)=3Y_0^2Y_1$ $\mathrm{A}_2(x)=3Y_0^2Y_2+3Y_0Y_1^2$ $\vdots$

بنابراین، با ترکیب اطلاعات فوق،

$$\begin{aligned} Y_0(x)=&1+x+3.5765\,x^2-0.2986\,x^3 \\ &-1.1876\,x^4-2.2844\,x^5-1.0871x^6 \\ Y_1(x)=&[\delta_1]\int_0^x\int_0^x Y_0^2(x)Y_0'(x)\,dx\,dx+[\delta_2]\int_0^x\int_0^x Y_0^3(x)\,dx\,dx \\ =&[x^2+2\,x^3+2.8\,x^4+\ldots,2x^2+4\,x^3+\ldots] \\ \vdots& \\ y_n(x)=&[\delta_1]\int_0^x\int_0^x Y_{n-1}{}^2(x)\,\mathrm{Y}_{n-1}'(x)\,dx\,dx+[\delta_2]\int_0^x\int_0^x Y_{n-1}{}^3(x)\,dx\,dx \end{aligned} \tag{۲۷}$$

جدول (۲): نتایج نهایی روش پیشنهادی و مقایسه آن با سایر روش‌های بازه‌ای و یک ورودی تصادفی در فاصله زمانی در نظر گرفته شده.

Time	*Interval Adomian Method*	*Interval Euler's Method*	*Interval Taylor Method*	*Random value*
0	[1, 1]	[1, 1]	[1, 1]	1
0.4	[1.398, 1.401]	[1.06, 1.37]	[0.99, 1.33]	1.399
0.8	[1.780, 1.819]	[0.27, 0.95]	[-0.67, 0.04]	1.781
1.2	[2.092, 2.307]	Divergent	Divergent	2.092
1.6	[2.234, 2.961]	Divergent	Divergent	2.235
2	[2.042, 3.941]	Divergent	Divergent	2.043

جدول (۲) نشان می‌دهد که روش‌های اویلر و تیلور بازه‌ای برای مسئله مورد نظر از زمان ۰/۸ به بعد واگرا می‌شوند، اما روش پیشنهادی شامل مقدار تصادفی است.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش جدید برای حل مسائل ODE به همراه نامعینی بازه‌ای ارائه شده است. روش پیشنهادی براساس یک نسخه تعمیم‌یافته از روش تجزیه آدومیان طراحی شده است که کاربرد گسترده‌ای برای حل انواع مختلفی از مسائل ODE دارد و تقریب مناسبی از راه‌حل را فراهم می‌کند. برای حل مسائل ODE به‌همراه نامعینی بازه‌ای به روش تعمیم‌یافته پیشنهادی، از روش بازه‌ای استفاده شده است. نتایج نهایی بر روی یک معادله دیفرانسیل غیرخطی اعمال شده و با روش‌های اویلر و تیلور بازه‌ای مقایسه شده است.

۷- مراجع

[1] N. Razmjooy and M. Ramezani, "Solution of the Hamilton Jacobi bellman uncertainties by the interval version of adomian decomposition method," Int. Rob. Auto. J., vol. 4, pp. 113-117, 2018.

[2] N. Razmjooy and M. Ramezani, "Optimal Control of Two-Wheeled Self-Balancing Robot with Interval Uncertainties Using Chebyshev Inclusion Method," Majlesi Journal of Electrical Engineering, vol. 12, pp. 13-21, 2018.

[3] G. Zitzenbacher, M. Längauer, and C. Holzer, "Modeling Temperature and Time Dependence of the Wetting of Tool Steel Surfaces by Polymer Melts," International Polymer Processing, vol. 32, pp. 245-252, 2017.

[4] Z.-C. Tang, M. J. Zuo, and Y. Xia, "Effect of Truncated Input Parameter Distribution on the Integrity of Safety Instrumented Systems under Epistemic Uncertainty," IEEE Transactions on Reliability, 2017.

[5] Z. Zeng, R. Kang, M. Wen, and E. Zio, "A model-based reliability metric considering aleatory and epistemic uncertainty," IEEE Access, 2017.

[6] G. Alefeld and G. Mayer, "Interval analysis: theory and applications," Journal of computational and applied mathematics, vol. 121, pp. 421-464, 2000.

[7] J. Campos, E. Assunção, G. Silva, W. Lodwick, and M. Teixeira, "Discrete-time interval optimal control problem," International Journal of Control, pp. 1-7, 2017.

[8] M. Razmjooy and M. Ramezani, "Model Order Reduction based on meta-heuristic optimization methods," in 1st International Conference on New Research Achievements in Electrical and Computer Engineering Iran, 2016.

[9] F. Johansson, "Arb: Efficient arbitrary-precision midpoint-radius interval arithmetic," IEEE Transactions on Computers, 2017.

[10] "IEEE Approved Draft Standard for Interval Arithmetic (Simplified)," IEEE P1788.1/D9.9, June 2017, pp. 1-36, 2017.

[11] J. Rohn, "Positive definiteness and stability of interval matrices," SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, vol. 15, pp. 175-184, 1994.

[12] I. Skalna, "Positive definiteness and stability of parametric interval matrices," arXiv preprint arXiv:1709.00853, 2017.

[13] J. Wu, Z. Luo, Y. Zhang, N. Zhang, and L. Chen, "Interval uncertain method for multibody mechanical systems using Chebyshev inclusion functions," International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 95, pp. 608-630, 2013.

[14] J. Wu, Y. Zhang, L .Chen, and Z. Luo, "A Chebyshev interval method for nonlinear dynamic systems under uncertainty," Applied Mathematical Modelling, vol. 37, pp. 4578-4591, 2013.

[15] W. Zhang and L. Xie, "Interval stability and stabilization of linear stochastic systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 54, pp. 810-815, 2009.

[16] W. V. Kandasamy and F. Smarandache, Interval Linear Algebra: Infinite Study, 2010.

[17] M. M. Hosseini, "Adomian decomposition method with Chebyshev polynomials," Applied Mathematics and Computation, vol. 175, pp. 1685-1693, 2006.