سومین کنفرانس بین‌المللی ترکیبیات، رمزنگاری و محاسبات
Homepage: http://i4c.iust.ac.ir
I4C 2018
دانشگاه علم و صنعت ایران

بررسی شاخص وینر و شاخص وینر اشتاینر برای بعضی از گراف ها

مسعود قدس* [1]، سیده طاهره جلالی [2]

۱- دکتر مسعود قدس، دانشکده ریاضی، دانشگاه سمنان، سمنان

۲- دانشجوی دکتری، دانشکده ریاضی، دانشگاه سمنان، سمنان

چکیده

شاخص وینر $W(G)$ به صورت مجموعی ازطولهای کوتاهترین مسیر بین تمام جفت ها از رئوس گراف تعریف می شود. فاصله اشتاینر از مجموعه نا تهی $S\subseteq V$ از مجموعه G با n راس متمایز، برابر کمترین تعداد یالها در زیر گراف همبند شامل مجموعه رئوس S می باشد و با نماد $d_G(S)$ نشان داده می شود. اگر $|S|=2$، آنگاه فاصله اشتاینر فاصله بین دو راس و اگر $2\le k\le n$ و $|S|=k$ فاصله اشتاینر از S را k- فاصله اشتاینر از S نامیده و با $d_G(S)$ نشان داده می شود. k- مین شاخص وینر اشتاینر را با فرمول $\mathrm{SW}_k(\mathrm{G})=\sum_{\substack{s\subseteq V(G)\\ |s|=k}} d_G(S)$ نشان می دهیم. در این مقاله این شاخص برای بعضی از عملگرهای گراف به دست می آوریم.

کلمات کلیدی: شاخص وینر، شاخص وینر اشتاینر

۱. مقدمه

تمامی گراف ها ساده، همبند و غیر جهت دار بدون حلقه و یال چند گانه می باشند. برای مطالعه بیشتر به [1] مراجعه شود. برای گراف همبند $G=(V,E)$، فاصله $d_G(u,v)$ بین رئوس u و v برابر طول کوتاهترین مسیر بین این دو راس می باشد. شاخص وینر[1] گراف همبند G را با نماد $W(G)$ نشان می دهیم و به صورت مجموعی از فاصله بین تمام زوج های (غیر مرتب) از رئوس G تعریف می کنیم[2]،

$$W(G)=\sum_{\{u,v\}\in V(G)} d(u,v)$$

Email:
1) mghods@semnan.ac.ir
2) Staherehjalali1358@gmail.com

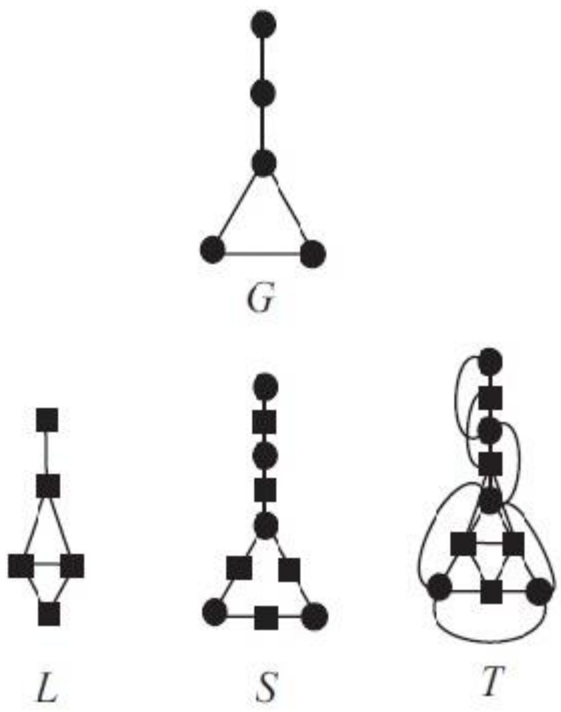
اگرچه شاخص وینر یکی از رایج ترین شاخص های توپولوژیکی است، این روزها بیشتر از ۲۰۰ شاخص توپولوژیکی شناخته شده است[3].

تعریف ۱٫۱. گراف خط $L(G)$ از گراف G، گرافی است که راس های آن متناظر با یالهای گراف G بوده و دو راس در گراف خط با هم مجاورند هرگاه یالهای متناظر در گراف G با هم مجاور باشند.

تعریف ۱٫۲. گراف زیر بخشی $S(G)$ از گراف G، گرافی است که با حذف متناوب یال uv ازگراف G و افزودن راس w و دو یال uw و wv به گراف G به دست می آید.

تعریف ۱٫۳. اگر در گراف $S(G)$ از G راس هایی که در G و L مجاور بوده در $S(G)$ نیز مجاور هم باشند گراف جمعی $T(G)$ به دست می آید.

در شکل ۱ مثالی از گراف G داده شده و تعاریف بالا را مشاهده می کنیم.



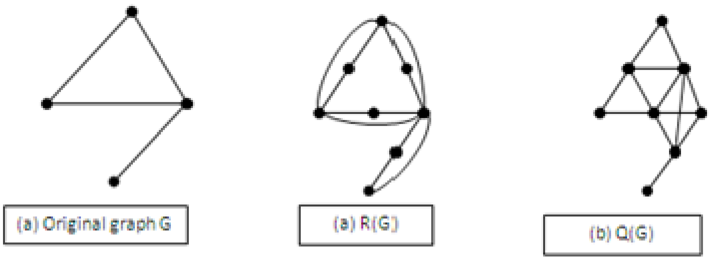
شکل۱- گراف G، گراف خط L، گراف دو بخشی S، گراف جمعی T.

همچنین دو عملگر زیر بخشی $R(G)$ و $Q(G)$ به صورت زیر تعریف می شوند:

تعریف ۱٫۴. گراف $R(G)$، گرافی است که با افزودن یک راس میان هر یال گراف G و اتصال تمام رئوسی که در گراف G با هم مجاور می باشند به دست می آید.

تعریف ۱،۵. گراف $Q(G)$ از گراف G، گرافی است که با افزودن یک راس جدید بین هر یال و اتصال رئوس جدیدی که یالهای آنها با هم مجاورند به دست می آید.

در شکل ۲ گراف G و گراف های تعریف شده را مشاهده می کنید.



شکل ۲ - گراف G، گراف $R(G)$، گراف. $Q(G)$

فاصله اشتاینر، مجموعه نا تهی $S \subseteq V$ از مجموعه G، اندازه کوچکترین زیر گراف همبند $H(S)$ شامل S می باشد و با نماد $d_G(S)$ نشان داده می شود. کوچکترین زیر گراف $H(S)$، یک درخت در G بوده و درخت اشتاینر نامیده می شود.

در واقع، فاصله اشتاینر از مجموعه S از n راس متمایز برابر کمترین تعداد یالها در زیر گراف همبند شامل S می باشد. اگر $|S| = 2$، فاصله اشتاینر در واقع همان فاصله بین دو راس است.

اگر $2 \le k \le n$ و $|S| = k$ باشد، فاصله اشتاینر از S را k- فاصله اشتاینر می نامیم. لی[1] و همکارانش مفهوم شاخص وینر را با استفاده از فاصله اشتاینر تعمیم دادند و مفهوم k-مین شاخص وینر اشتاینر را که به صورت $\mathrm{SW}_k(\mathrm{G}) = \sum_{\substack{s \subseteq V(G) \\ |s|=k}} d_G(S)$ تعریف می شود ارایه دادند[4].

گزاره۱. فرض کنید G گرافی از مرتبه n و k عدد صحیح باشد به طوری که $2 \le k \le n$. اگر $S \subseteq V(G)$ و $|S| = k$ آنگاه $k-1 \le d_G(S) \le n-1$.

قضیه۱،۱ (وینر). برای درخت T رابطه زیر را داریم:

$$W(T) = \sum_{e \in E(T)} N_2(T-e) \qquad (1)$$

[1] Li

چون T یک درخت است، برای هر یال $e=ij$ (i و j رئوس) از درخت T ، جنگل $T-e$ شامل دو مولفه می باشد،

یکی با اندازه $n_e(i)$ و دیگری با اندازه $n_e(j)$، به طوری که $N_2(T-e)=n_e(i)n_e(j)$. بنابراین می توانیم رابطه (1) را دوباره نویسی کنیم،

$$W(T)=\sum_{e=ij\in E(T)} n_e(i)n_e(\mathrm{j}) \qquad (2)$$

قضیه۱,۲.(بوکلی[1])[5] . برای هر درخت T،

$$W(\mathrm{L(T)})=\mathrm{W(T)}-\binom{n}{2}$$

۲ . فاصله در گراف های زیر بخشی و شاخص وینر آنها

فرض کنیم G یک گراف همبند باشد و $e,e'\in E(G)$. اگر e و e'

دو راس مجاور در $Q(G)$, $L(G)$ و $T(G)$ باشند، آنگاه از نماد $e\xrightarrow{e\cap e'}e'$ برای آنها استفاده می کنیم و اگر $e=\{v,v'\}$ و $e'=\{v,v''\}$ آنگاه از نماد $e\xrightarrow{v}e'$ استفاده می کنیم.

لم ۲,۱. برای هر $v,v'\in V(G)$،

$$\frac{1}{2}d_{S(G)}(v,v')=d_{T(G)}(v,v')=d_{R(G)}(v,v')=d_{Q(G)}(v,v')-1=d_G(v,v')$$

لم ۲,۲. برای هر $e,e'\in E(G)$ داریم:

$$\frac{1}{2}d_{S(G)}(e,e')=d_{T(G)}(e,e')=d_{R(G)}(e,e')-1=d_{Q(G)}(e,e')=d_{L(G)}(e,e')$$

لم ۲,۳. برای هر $v\in V(G)$ و $e\in E(G)$،

$$\frac{1}{2}(d_{S(G)}(e,v)+1)=d_{T(G)}(e,v)=d_{R(G)}(e,v)=d_{Q(G)}(e,v)$$

[1] Buckley

قضیه ۲،۴. اگر گراف همبند G دارای m یال و n راس باشد، آنگاه

$$W(S(G)) = 2W(T(G)) - mn$$

$$W(R(G)) = W(T(G)) + \frac{m(m-1)}{2}$$

$$W(Q(G)) = W(T(G)) + \frac{n(n-1)}{2}$$

نکته۲،۵. با حذف $W(T(G))$ از بین روابط بالا داریم:

$$W(S(G)) = W(R(G)) + W(Q(G)) + \binom{m+n}{2}$$

اثبات: بنا بر قضیه ۲،۴ داریم:

$$\frac{W(S(G)) + mn}{2} = W(T(G))$$

$$W(R(G)) = W(T(G)) + \frac{m(m-1)}{2}$$

$$(Q(G)) = W(T(G)) + \frac{n(n-1)}{2}$$

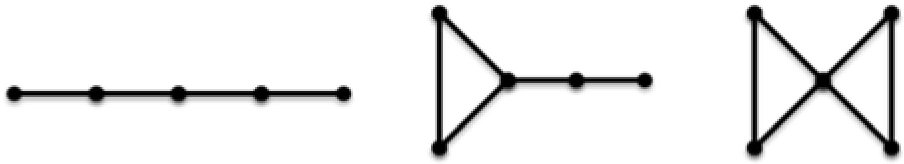
در نتیجه:

$$\begin{aligned} W(R(G)) + W(Q(G)) &= 2W(T(G)) + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= 2\left(\frac{W(S(G)) + mn}{2}\right) + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= W(S(G)) + \frac{(m+n)(m+n-1)}{2}. \end{aligned}$$

$$W(S(G)) = W(R(G)) + W(Q(G)) - \binom{m+n}{2}.$$

۳. شاخص وینر اشتاینر برای بعضی از گراف ها

فرض کنید F_1 یک مسیر ۵ راسی باشد، F_2 گراف حاصل از انطباق راسی از یک مثلث با انتهای راسی از یک مسیر ۳ راسی باشد، همچنین F_3 گرافی حاصل از انطباق راسی از یک مثلث با راسی از مثلث دیگر باشد. به شکل 3 توجه کنید . [6]



F1 F2 F3

شکل ۳- گراف های F_1, F_2 و F_3

لم۳,۱. فرض کنید G گرافی با $diam(G) \leq 2$ که شامل زیر گراف القایی F_1, F_2 و F_3 نباشد. آنگاه برای هر $v', v'' \in V(G)$ و v داریم:

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}_{S(G)}(\mathrm{v}, \mathrm{v}', \mathrm{v}'') = \mathrm{d}_{T(G)}(\mathrm{v}, \mathrm{v}', \mathrm{v}'') = \mathrm{d}_{R(G)}(\mathrm{v}, \mathrm{v}', \mathrm{v}'') = \mathrm{d}_{Q(G)}(\mathrm{v}, \mathrm{v}', \mathrm{v}'') - 2 = \mathrm{d}_{G}(\mathrm{v}, \mathrm{v}', \mathrm{v}'')$$

لم ۳,۲. فرض کنید G گرافی با $diam(G) \leq 2$ که شامل زیر گراف القایی F_1, F_2 و F_3 نباشد. آنگاه برای هر $e', e'' \in E(G)$ و e داریم:

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}_{S(G)}(\mathrm{e}, \mathrm{e}', \mathrm{e}'') = \mathrm{d}_{T(G)}(\mathrm{e}, \mathrm{e}', \mathrm{e}'') = \mathrm{d}_{R(G)}(\mathrm{e}, \mathrm{e}', \mathrm{e}'') = \mathrm{d}_{Q(G)}(\mathrm{e}, \mathrm{e}', \mathrm{e}'') - 2 = \mathrm{d}_{G}(\mathrm{e}, \mathrm{e}', \mathrm{e}'')$$

لم ۳,۳. فرض کنید G گرافی با $diam(G) \leq 2$ که شامل زیر گراف القایی F_1, F_2 و F_3 نباشد. برای هر $\{e, e', v\} \subseteq E(G) \bigcup V(G)$، اگر عناصر e, e' و v در مسیری به طول ۲ در $S(G)$ قرار بگیرند، آنگاه

$$d_{S(G)}(e, e', v) = d_{R(G)}(e, e', v) = d_{Q(G)}(e, e', v) = d_{T(G)}(e, e', v)$$

قضیه ۳,۴. اگر $diam(G) \leq 2$، آنگاه $W_3(G) = W_3(T(G)) = W_3(R(G))$.

اثبات: با استفاده از لم ۳,۱ و ۳,۲ و ۳,۳ نتیجه دلخواه به دست می آید.

۴.پیشنهاد

علاقمندان در صورت تمایل می توانند نتایج به دست آمده در این مقاله را برای سایر شاخص های توپولوژیکی استفاده کنند.

5. مراجع

[1] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph theory*, Springer, New York,(2008).

[2] H. Wiener, Structural determination of paraffin boiling points, *J. Am. Chem. Soc.* 69 (1947) 17-20.

[3] Harary Frank, *Graph Theory*, Narosa Publishing House, Tenth Reprint, New Delhi, (2001).

[4] X. Li, Y. Mao and I. Gutman, The Steiner Wiener index of a graph, *Discuss. Math. Graph Theory*, 36 no. 2 (2016)455-465.

[5] F. Buckley, Main distance in line graphs, Congr .Numer.32(1981),153-162.

[6] Harichandra S Ramane, Deepak S Revankar, Asha B, On the Wiener index of a graph. *J. Indones Math. Soc*, Vol 18, No. 1(2012), 57 – 66.