سومین کنفرانس بین‌المللی ترکیبیات، رمزنگاری و محاسبات
Homepage: http://i4c.iust.ac.ir

حل مسئله بارگیری بهینه قطار با استفاده از الگوریتم مقیاس بندی هزینه

مریم پروین چگنی [*،1]، اردشیر دولتی [2]، محجوبه خدادادی دشتکی [3]

۱- دانشجو کارشناسی ارشد، دانشگاه شاهد تهران

۲- دانشیار گروه علوم کامپیوتر دانشگاه شاهد تهران

۳-دانشجو کارشناسی ارشد، دانشگاه شاهد تهران

چکیده

در این مقاله مسئله بارگیری بهینه قطار را مورد بررسی قرار داده‌ایم. هدف از حل این مسئله بارگیری بهینه قطار در مبدأها و مقصدهای مختلف با توجه به ظرفیت قطار است، به طوری که مجموع کل کرایه دریافتی حاصل از انتقال بار بیشینه شود. برای این منظور ابتدا این مسئله را به صورت یک مسئله جریان با کمترین هزینه مدل می‌کنیم و سپس با استفاده از الگوریتم مقیاس‌بندی هزینه ارائه شده توسط گلدبرگ و تارجن به حل آن می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: بارگیری بهینه قطار، مسئله جریان با کمترین هزینه، روش مقیاس‌بندی هزینه.

۱. مقدمه

مسئله بارگیری بهینه قطار یکی از مسائل کاربردی در حوزه‌ی بهینه‌سازی شبکه‌ای به‌شمار می‌رود. هدف از حل این مسئله، بارگیری قطار با توجه به ظرفیت آن در مبدأهای مختلف است، به طوری که مجموع کل کرایه دریافتی حاصل از انتقال بار بیشینه شود. در یک دنباله از ایستگاه ها که از مبدا یک قطار باری تا مقصد نهایی آن وجود دارد بخشی از ظرفیت موجود قطار را به هر یک از این ایستگاه ها تخصیص می‌دهیم به طوری که کرایه کل از مبدا تا مقصد بیشینه شود. ما در این مقاله مسئله بارگیری بهینه قطار را در قالب یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین مسائل شبکه جریان تحت عنوان "مسئله جریان با کمترین هزینه" مدل‌بندی می‌کنیم. این مدل‌بندی برای مسئله مسافرگیری بهینه پرواز هواپیما نیز استفاده شده است[۱]. یکی از الگوریتم‌های مورد استفاده برای حل مسئله جریان با کمترین هزینه روش "مقیاس‌بندی هزینه" می‌باشد، که در سال ۱۹۸۰ توسط راک[۲] و در سال ۱۹۸۵ به طور مستقل، توسط بلاند و جسن [۳] ارائه شده است. همچنین در سال‌های ۱۹۷۹و ۱۹۸۵ برتس کاس [۴] و تاردوس [۵] این الگوریتم را بهبود بخشیدند. گلدبرگ و تارجن نیز در سال ۱۹۸۷ الگوریتمی را بر اساس دو بهبود قبلی ارائه نمودند[۶].

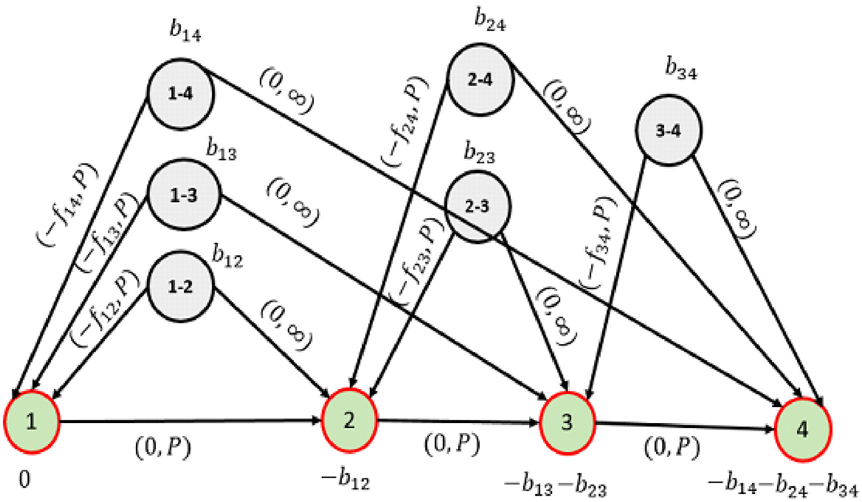
مقاله حاضر به صورت زیر سازماندهی شده است:

* Corresponding author: مریم پروین چگنی
Email: m.parvin.ch@gmail.com

در بخش دوم مدل بندی ریاضی مسئله بارگیری بهینه قطار را به صورت یک مسئله جریان با کمترین هزینه بیان می‌کنیم. در بخش سوم نیز الگوریتم مقیاس‌بندی هزینه را برای حل مسئله جریان با کمترین هزینه بیان می‌کنیم و در ادامه با استفاده از این الگوریتم به حل یک مثال عددی می‌پردازیم.

۲. مدل بندی ریاضی مسئله بارگیری بهینه قطار

یک شرکت حمل و نقل بارگیری قطار را در نظر می‌گیریم. خطوط ریلی قطار از یک دنباله ثابت ایستگاه ها 1,2,…,n عبور می‌کند، به طوری که حداکثر ظرفیت کالاهای بارگیری شده قطار P می‌باشد. قطار می‌تواند کالاها را در هر ایستگاه بارگیری کند. شکل ۱ مدل سازی این مسئله را روی یک شبکه ی جهت دار(G =(V,E به صورت مسئله جریان با کمترین هزینه نشان می‌دهد.[۶]



شکل۱. شبکه مسئله بارگیری بهینه قطار

شبکه شامل داده ها با کمان هایی با هزینه غیر صفر و با ظرفیت محدود است که هر کمان بدون ظرفیت، دارای ظرفیت بی نهایت است و هر کمان بدون هزینه، دارای هزینه‌ی صفر است. قطار ضمن تحویل کالاهای مربوط به ایستگاه ۲، می‌تواند از همان ایستگاه کالاهای جدیدی مربوط به ایستگاه های ۲ و ۳ را بارگیری کند و به همین ترتیب برای ایستگاه های ۳و۴. حال می‌خواهیم ببینیم که در هر ایستگاه چه تعداد کالا باید بارگیری شود که سود حاصل از حمل کالا بیشینه شود، به طوری که از ظرفیت قطار تجاوز نکند.

گره جدید (i-j) برای نشان دادن میزان کالاهایی است که در مقصد i به مقصد j متقاضی بارگیری هستند و به ترتیب b_{ij} و f_{ij} تعداد و کرایه‌ی هر واحد از این کالاها است.

و مدل ریاضی آن به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned}
&\text{Min} \sum_{(i.j)\in E} -f_{ij}x_{ij} \\
&\text{S.t} \quad \sum_{i\in v} x_{ij} - \sum_{i\in v} x_{ji} = b_i \qquad \forall i \in V \qquad (1)\\
&0 \le x_{ij} \le u_{ij} \qquad \forall (i.j) \in E
\end{aligned}$$

۳. حل مسئله ی بارگیری قطار با استفاده از جریان با کمترین هزینه

در این بخش با توجه به الگوریتم مقیاس بندی هزینه برگرفته از مرجع [۷] به حل یک مثال عددی برای مسئله بارگیری بهینه قطار می‌پردازیم.

۳-۱. الگوریتم و پیچیدگی محاسباتی

الگوریتم مقیاس بندی هزینه:

۱-شروع

۲-قرار می‌دهیم $\pi = 0$ و $\varepsilon = C$.

۳-فرض می‌کنیم x یک جریان شدنی باشد.

۴- اگر $\frac{1}{n} \geq \varepsilon$ برو به ۵ در غیر این صورت برو به ۱۶.

۵-برای هر کمان $(i, j) \in A$ انجام بده:

اگر هزینه کاهش یافته بزرگتر اکید از صفر است آنگاه x_{ij} را مساوی صفر قرار بده.

در غیر اینصورت اگر هزینه کاهش یافته کمتر اکید از صفر است آنگاه x_{ij} مساوی u_{ij} قرار بده.

۶- عدم تعادل را حساب کن.

۷-هنگامیکه شبکه شامل گره فعال بود برو به ۸ در غیر اینصورت برو به۱۴.

۸-گره فعال i را انتخاب کن.

۹- اگر شبکه باقی مانده شامل کمان پذیرفتنی (i, j) بود $(-\frac{\varepsilon}{2} \leq c_{ij}^{\pi} < 0)$ برو به ۱۰در غیر اینصورت برو به ۱۲.

۱۰-جریانی به اندازه ی δ در کمان (i, j) جاری کن.

۱۱-برو به۷ .

۱۲- قرار بده $\pi = \pi + \frac{\varepsilon}{2}$.

۱۳-برو به ۹.

۱۴- قرار بده $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$.

۱۵-برو به۴.

۱۶- X یک جریان بهینه برای مسئله‌ی جریان با کمترین هزینه است.

۱۷-پایان.

درستی و پیچیدگی محاسباتی الگوریتم را تحت قضیه ۱ و ۲ بیان می‌کنیم [۷].

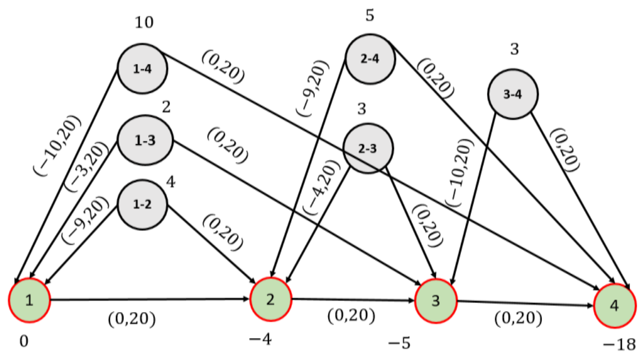
قضیه۱. برای مسئله مقیاس بندی هزینه با هزینه های صحیح، هر جواب شدنی یک ε-بهینه است وقتی که $\varepsilon \geq C$.

بعلاوه اگر $\varepsilon < \frac{1}{n}$ آنگاه هر جریان شدنی ε-بهینه یک جریان بهینه است که $C=\max\{|c_{ij}|;(i,j)\in A\}$ و $|V| = n$.

قضیه۲. الگوریتم مقیاس بندی هزینه در زمان $O(n^2 m \log(nC))$ اجرا می شود بطوریکه $|E| = m$.

۳-۲.مثال

مسئله بارگیری بهینه قطار را با داده های زیر با استفاده از الگوریتم مقیاس بندی هزینه حل می‌کنیم.
برای حل این مسئله ابتدا همه‌ی ظرفیت های بی نهایت را برابر با ظرفیت قطار قرار می‌دهیم (شکل۲). جدول های ۱و۲ به ترتیب شامل اطلاعات مربوط به کرایه ها و مقدار بار بهینه ارسالی است. الگورتیم در پایان فاز ششم مقیاس بندی متوقف می‌شود. مقدار جریان ارسالی و دریافتی در پایان الگورتیم در شکل ۳ نشان داده است که جریان روی کمان‌ها، جریان بهینه است و مقدار تابع هدف برابر با ۲۲۱ است.



شکل۲. بارگیری بهینه ی قطار

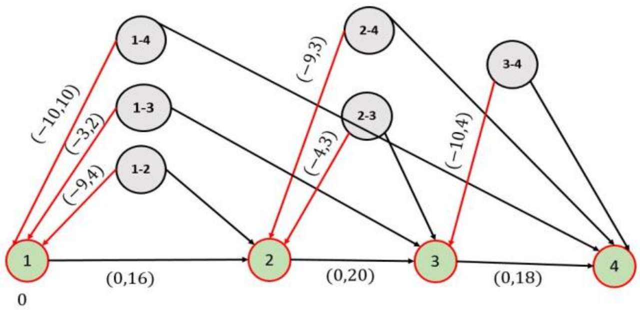
جدول۱.کرایه ها از ایستگاه i به ایستگاه j

مقصد / مبدأ	۲	۳	٤
۱	۹	۳	۱۰
۲	۰	٤	۹
۳	۰	۰	۱۰

بعد از حل بهینه مساله با کمک الگوریتم میزان بار بارگیری شده در مبدا به هر مقصد در جدول ۲ آمده است. به کمک جواب بهینه مقدار بهینه سود شرکت حمل و نقل نیز محاسبه شده است.

جدول۲. مقدار بهینه بار ارسالی از مبدا i به مقصد j

مقصد / مبدأ	۲	۳	٤
۱	٤	۲	۱۰
۲	۰	۳	۳
۳	۰	۰	٤



شکل۳.جریان بهینه با مقدار بهینه ی ۲۲۱

۴. نتیجه‌گیری

ما در این مقاله یکی از مسائل کاربردی بهینه سازی شبکه ای در حوزه حمل و نقل ریلی تحت عنوان مسئله بارگیری بهینه قطار را مورد بررسی قرار دادیم. با مدل سازی این مسئله به صورت یک مسئله‌ی جریان با کمترین هزینه به روش مقیاس بندی روی هزینه ها مقدار سود شرکت ریلی حمل بار را بیشینه کردیم و یک جریان بهینه شامل تعداد کالاهای بارگیری و تحویل داده شده در هر ایستگاه را به دست آوردیم.

مراجع

1. EVANS, J. R. 1984. The factored transportation problem. Management Science 30, 1021-1024.
2. ROCK, H. 1980. Scaling techniques for minimal cost network flows. In Discrete Structures and Algorithms. Edited by V. Page. Carl Hanser, Munich, pp. 181-191.
3. Bland, R. G., & Jensen, D. L. (1992). On the computational behavior of a polynomial-time network flow algorithm. Mathematical Programming, 54(1-3), 1-39.
4. GOLDBERG, A. V., and R. E. TARJAN. 1987. Solving minimum cost flow problem by successive approximation. Proceeding of the 19thACM Symposium on the Theory of Computing, pp. 7-18. Full paper in Mathematics of Operations Research 15(1990), 430-466.
5. BERTSEKAS, D. P. 1979. A distributed algorithm for the assignment problem. Working Paper, Laboratory for Information and Decision Systems, MIT, Cambridge, MA.
6. TARDOS, E. 1985. A strongly polynomial minimum cost circulation algorithm. Combinatorica 5, 247-255.
7. AHUJA R. K., MAGNANTI T. L. and ORLIN J. B., NETWORK FLOWS, Theory, Algorithms and Applications, PRENTICE HALL, 1993.