

بررسی بندواره بر اساس گراف

داریوش رحمن ستایش^{*}، پریسا پژوهی پاد^۲.

۱ و ۲ - کارشناسی ارشد گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران.

چکیده

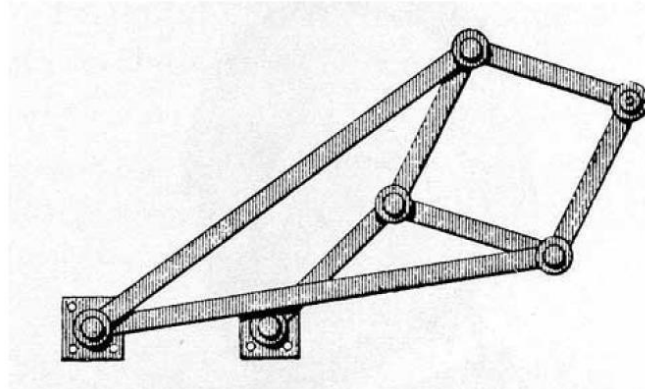
در این مقاله یکی از ابزارهایی که در صنعت، مکانیک، رباتیک و ... کاربردی است را به نام بندواره با استفاده از گراف تعریف می‌کنیم. سپس بندواره های n -میله‌ای، فضای پیکربندی آن و بردار طول عمومی را بر پایه گراف دوری توصیف کرده و نشان می‌دهیم فضای پیکربندی هر گراف دوری C_n همراه یال‌های $(q \in \mathbb{Q}_+ - \mathbb{N}; m_1 \in \mathbb{N}, \dots, m_n \in \mathbb{N})$ که در واقع مدل‌سازی همان بندواره n -میله مان با بردار طول (q, m_1, \dots, m_{n-1}) می‌باشد، برابر \mathbb{T}^{n-3} یعنی از بُعد $n - 3$ می‌باشد. در نهایت این حکم به طور کلی‌تر یعنی $M_\ell = \mathbb{T}^{n-3}$ را برای هر بندواره n -میله‌ای با بردار طول دلخواه عمومی $\ell = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{R}_+$ اثبات می‌کنیم.

کلمات کلیدی: گراف، بندواره، فضای پیکربندی، مفصل، بازوی ربات.

۱. مقدمه

بندواره را می‌توان به عنوان یک سری از میله‌ها که توسط لولا‌هایی به هم متصل شده‌اند مانند شکل ۱ در نظر گرفت که مفصل‌ها می‌توانند به زمین ثابت یا متحرک باشند.

^{*} Corresponding author : Dariush Rahman-Setayesh
Email: dariush_rahman@alumni.iust.ac.ir



شکل ۱: بندواره.

به طور کلی مبداء این بحث به کار آقایان اوپلر^۱، وات^۲، چبیشف^۳، کمپ^۴ و دیگران در قرن نوزدهم برمی‌گردد. انگیزه اولیه برای مطالعه آنها به عنوان نمونه تبدیل حرکت خطی به حرکت دورانی بود (مثل حرکت پیستون برای چرخ). جواب تقریبی توسط جیمز وات (۱۸۱۹-۱۷۳۶) ارائه شد. این جواب توسط پافنوتی چبیشف (۱۸۲۱-۱۸۹۴) بهبود یافت. اما اولین جواب کامل توسط چارلز نیکولاس پیچلر^۵ (۱۹۱۳-۱۸۳۲) افسر ارتش فرانسه و همچنین مستقلاً توسط لیپمن لپکین^۶ (۱۸۷۶-۱۸۴۶) ریاضیدان روسی ارائه شد [۱].

۲. گراف و فضای پیکربندی بندواره

گراف همبند (در صفحه) $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ شامل مجموعه متناهی از رئوس \mathcal{V} و یال‌های \mathcal{E} را در نظر بگیرید. مجموعه رئوس را می‌توان به $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\text{آزاد}} \cup \mathcal{V}_{\text{ثابت}}$ افزایش کرد.

تعریف. بندواره^۷، خانواده‌ای از نشان‌دهنده گراف \mathcal{G} در \mathbb{R}^2 هست به طوریکه:

۱. رئوس ثابت که با نماد $\mathcal{V}_{\text{ثابت}} \subset \mathbb{R}^2$ نشان می‌دهیم، در صفحه ثابت باقی می‌ماند؛
۲. مکان رئوس آزاد که با نماد $\mathcal{V}_{\text{آزاد}} \subset \mathbb{R}^2$ نشان می‌دهیم، می‌تواند در صفحه تغییر کند؛ و
۳. همه یال‌ها که با نماد $e \in \mathcal{E}$ نشان می‌دهیم، دارای طول مشخص $l(e) \in \mathbb{R}_+$ در صفحه است.

¹Euler

²Watt

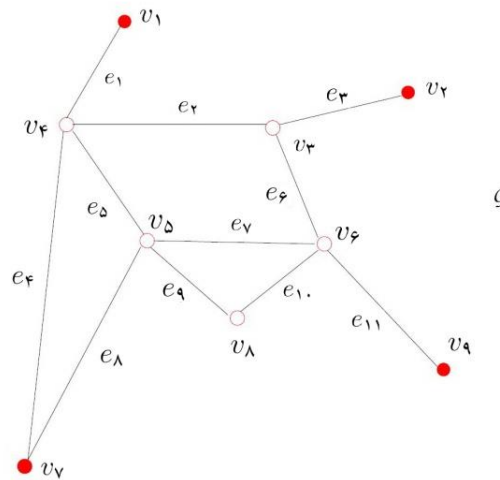
³Chebyshev

⁴Kempe

⁵Charles-Nicolas Peaucellier

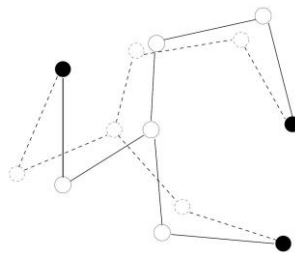
⁶Lipmann Lipkin

⁷Linkage



شکل ۲: گراف G .

در شکل ۲ گراف G با نه رأس (چهار نقطه توپر متناظر با رئوس ثابت و پنج رأس توخالی متناظر با رئوس متحرک) و یازده یال (متناظر با میله های دارای طول ثابت) می باشد.

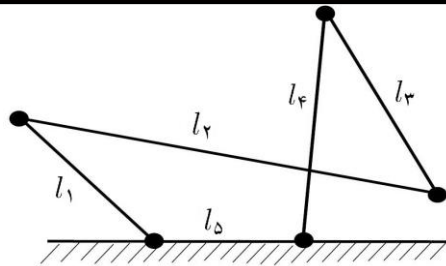


شکل ۳: تغییرات پیکربندی بندواره.

همچنین در شکل ۳ دایره های توپر نشانگر رئوس ثابت و دایره های دیگر نشانگر پنج رأس متحرک می باشد. شکل نقطه چین، دومین پیکربندی را نشان می دهد که چگونه رئوس و یال ها تغییر می کنند. پس در حالت کلی می توان تصور کرد که منظور از \mathcal{V} ثابت؛ مفصل های ثابت بندواره در صفحه و منظور از رئوس آزاد \mathcal{V} و یال های \mathcal{E} ؛ بترتیب مفصل های آزاد و میله های متحرک در صفحه باشند (که البته طول یال های $l(e)$ تغییری نمی کند). **تعریف.** در حالت کلی فضای پیکربندی دستگاه S به صورت فضای تمام وضعیات ممکن از S تعریف می شود. حال خانواده ای از بندواره هارا در نظر می گیریم که با توجه به تعریف کلی بندواره، توسط گراف دوری مدل سازی شود، یعنی میله های بندواره که توسط یال ها و مفصل های آن که توسط رئوس نشان داده می شود گراف دوری شود. به این خانواده از بندواره ها، **بندواره n -میله ای** گفته و فضای پیکربندی آن توسط M_ℓ نمایش داده می شود که

$$\ell = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^n, \quad l_1, \dots, l_n > 0$$

خانواده ای از طول های مثبت، به نام بردار طول بندواره است.

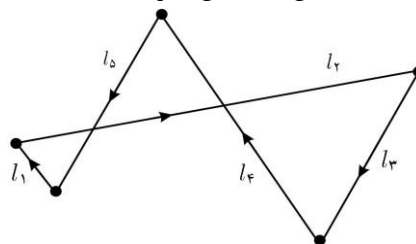


شکل ۴: بندواره $n=5$ میله ای.

واضح است که پیکربندی بندواره ها توسط زاویه میله‌ها که با محور افقی می‌سازند به طور کامل بیان می‌شود. بنابراین فضای پیکربندی M_ℓ می‌توان با

$$M_\ell = \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1; \sum_{i=1}^n l_i u_i = 0, u_n = -e_1\}$$

یکی در نظر گرفت چون در اینجا u_i بردار واحد در راستای میله i و شرط $\sum_{i=1}^n l_i u_i = 0$ بیانگر ویژگی بسته بودن چندضلعی است و معادله $u_n = -e_1$ به این معناست که سرآخرین میله همیشه خلاف جهت محور x هاست. همچنین فضای M_ℓ می‌تواند به عنوان فضای مدل n -ضلعی های در صفحه با طول اضلاع l_1, \dots, l_n همانطور که دیده شد، با عمل ایزومتری حافظ جهت در صفحه درک شود. تأکید می‌کنیم که اضلاع n -ضلعی مان به صورت چرخه ای جهت دار توسط اعداد طبیعی $1, 2, 3, \dots, n$ مانند شکل ۵ اندیس گذاری شده اند.



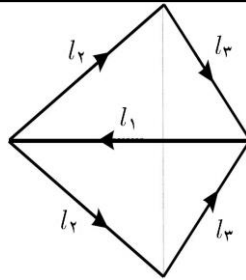
شکل ۵: گراف دوری جهت‌دار.

یادآوری می‌کنیم که برای هر n -ضلعی صفحه ای تنها یک دوران در صفحه وجود دارد که همه نقاطش روی همان نقاط قبلی قرار گیرد. بنابراین یک تناظر یک به یک بین فضای پیکربندی بندواره n -میله ای نشان داده شده در شکل ۴ و انواع چندضلعی های مختلف در صفحه با اضلاع l_1, \dots, l_n وجود دارد. این روشن می‌کند که چرا به فضای M_ℓ نیز فضای چند ضلعی گفته می‌شود. بنابراین می‌توان معادلاً تساوی زیر را نوشت:

$$M_\ell = \left\{ (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1; \sum_{i=1}^n l_i u_i = 0 \right\} / SO(2) \quad (1)$$

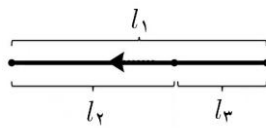
عمل گروه دوران های $SO(2)$ در (۱) به این صورت است که یک دوران $R \in SO(2)$ روی بردار n -تایی (u_1, \dots, u_n) از بردار های واحد عمل می‌کند و بردار $(Ru_1, Ru_2, \dots, Ru_n)$ را تولید می‌کند.

برای $n=3$ که واضح است چون بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم $l_1 \geq l_2 \geq l_3$ و داریم:
 ا. اگر نامساوی مثلثی $l_1 < l_2 + l_3$ برقرار باشد، آنگاه M_ℓ شامل دو نقطه است در واقع اعضایش، دو مثلث با اضلاع l_1, l_2, l_3 هستند که بایکدیگر نسبت به بازتاب مانند شکل ۶ هم‌نهشت اند.



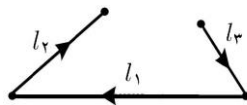
شکل ۶: حالت (أ) سه ضلعی.

ب. اگر $l_1 = l_2 + l_3$ آنگاه M_ℓ شامل تک نقطه است، در واقع آن عضو بیان‌کننده مثلث تباهیده مانند شکل ۷ است.



شکل ۷: حالت (ب) سه ضلعی.

ج. اگر $l_1 > l_2 + l_3$ آنگاه M_ℓ هیچ عضوی ندارد، در واقع مانند شکل ۸ مثلثی تولید نمی‌شود. بنابراین $M_\ell = \emptyset$.



شکل ۸: حالت (ج) سه ضلعی.

لم زیر تمام حالت‌هایی که M_ℓ هیچ عضوی ندارد را برای $n < 3$ توصیف می‌کند.

لم. برای هر $n \leq 3$ ، مجموعه $M_\ell = \emptyset$ اگر فقط اگر یکی از میله‌های l_i بلندتر از مجموع میله‌های دیگر باشد [۲].

یعنی

$$l_1 + \dots + l_{i-1} + l_{i+1} + \dots + l_n < l_i. \quad (2)$$

تعریف. به بردار طول $\ell = (l_1, \dots, l_n)$ که $l_i > 0$ ، عمومی گفته می‌شود هرگاه

$$\sum_{i=1}^n l_i \epsilon_i \neq 0, \quad \epsilon_i = \pm 1. \quad (3)$$

از نگاه هندسی این تعریف به این صورت نیز بیان می‌شود: بردار طول ℓ عمومی است اگر و تنها اگر فضای مدل M_ℓ شامل هیچ پیکربندی همخطی نباشد؛ به عبارت دیگر با طول اضلاع داده شده، امکان ساخت n -ضلعی همخط بسته نباشد (که معادلاً دارای مساحت نیست). برای نمونه، بردارهای طول $(1, 1, 1, 1)$ و $(2, 2, 1, 1)$ عمومی نیستند. از طرف دیگر، بردار طول $(3, 3, 2, 1)$ عمومی است.

تعریف. زیرمجموعه $J \subset \{1, \dots, n\}$ نسبت به بردار طول ℓ را کوتاه می‌نامیم هرگاه

$$\sum_{i \in J} l_i < \sum_{i \notin J} l_i \quad (4)$$

و بلند می‌گوئیم هرگاه

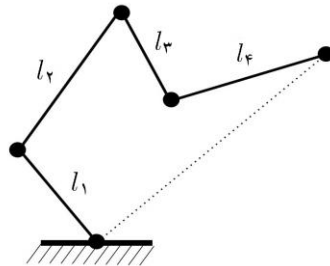
$$\sum_{i \in J} l_i > \sum_{i \notin J} l_i \quad (5)$$

و متوسط می گوئیم هرگاه

$$\sum_{i \in J} l_i = \sum_{i \notin J} l_i. \quad (6)$$

توجه داریم که هر زیرمجموعه ای از مجموعه کوتاه، خود نیز کوتاه است. همچنین متمم هر مجموعه بلند، کوتاه است. متمم مجموعه متوسط نیز متوسط است، بنابراین مجموعه ای که خودش یا متممش کوتاه نباشد، متوسط است. پس با مشخص شدن خانواده همه مجموعه های کوتاه، خانواده همه مجموعه های بلند و متوسط نیز مشخص می شوند. برای ارتباط بهتر این تعریف با مباحث قبل توجه کنید که فضای مدل $M_\ell = \emptyset$ اگروتنها اگر زیرمجموعه بلند تک عضوی $J = \{i\} \subset \{1, \dots, n\}$ وجود داشته باشد. همچنین بردار ℓ عمومی است اگروتنها اگر زیرمجموعه متوسط وجود نداشته باشد.

تعریف. به بندواره شامل n - میله ای با طول ثابت (l_1, \dots, l_n) که توسط مفصل هایی مانند شکل ۹ به هم متصل شده اند و نقطه ابتدایی آن به نقطه ثابتی از زمین متصل شده باشد، بازوی ربات گفته می شود.



شکل ۹: بازوی ربات با n - میله ای.

فضای مدل بازوی ربات (که فضای همه شکل های ممکنش تعریف می شود) برابر است با

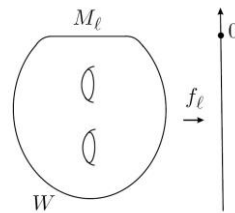
$$W = \{(u_1, \dots, u_n) \in S^1 \times \dots \times S^1\} / SO(2). \quad (7)$$

واضح است که W با تیوب \mathbb{T}^{n-1} از بعد $n-1$ دیفئومورفیسیم است و آن دیفئومورفیسیم را می توان توسط اندازه بین زوایای اولین و میله های دیگر به ترتیب مشخص کرد [۳].

فضای مدل چندضلعی های M_ℓ با $\ell = (l_1, \dots, l_n)$ ، به طور طبیعی در W نشانده می شود. تابع حقیقی مقدار روی W را به صورت زیر تعریف می کنیم:

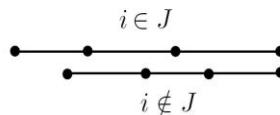
$$f_\ell: W \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\ell(u_1, \dots, u_n) = -|\sum_{i=1}^n l_i u_i|^2. \quad (8)$$

از دیدگاه هندسی، مقدار f_ℓ برابر منفی مربع فاصله نقطه ابتدایی از بازوی ربات تا نقطه انتهایی بازو می باشد که توسط خط چین در شکل ۹ نشان داده شده است. توجه داریم که f_ℓ ماکزیمم خود را روی فضای مدل بندواره $M_\ell \subset W$ اختیار می کند [۴].



شکل ۱۰: تابع $f_\ell: W \rightarrow \mathbb{R}$.

مهمترین نقش، توسط پیکربندی های همخط بازوی ربات بازی می‌شود یعنی $u_i = \pm u_j$ که $i, j \in \{1, \dots, n\}$ به شکل ۱۱ نگاه کنید. می‌خواهیم همه آن پیکربندی ها را متناظراً با زیرمجموعه های بلند و متوسط $J \subset \{1, \dots, n\}$ برچسب گذاری کنیم، با اختصاص زیرمجموعه بلند یا متوسط J پیکربندی $P_J \in W$ توسط $P_J = (u_1, \dots, u_n)$ که $u_i = 1$ برای $i \in J$ و $u_i = -1$ برای $i \notin J$ لحاظ می‌شود.



شکل ۱۱: پیکربندی همخط بازوی ربات.

توجه کنید که پیکربندی های $P_J, P_{J^c} \in W$ وقتی که $J \subset \{1, \dots, n\}$ متوسط باشد، یکی هستند و J^c نمایش متمم نسبت به $\{1, \dots, n\}$ است. همچنین در نظر داریم که P_J در M_ℓ قرار می‌گیرد اگر و فقط اگر J متوسط باشد. پس بطور خلاصه برای بردار طول دلخواه $\ell = (l_1, \dots, l_n)$ داریم:

$$\begin{aligned} \exists J \subset \{1, \dots, n\} \text{ متوسط} &\Leftrightarrow \sum_{i \in J} l_i = \sum_{i \notin J} l_i \\ &\Leftrightarrow J^c \subset \{1, \dots, n\} \text{ متوسط} \\ &\Leftrightarrow P_J, P_{J^c} \in M_\ell \subsetneq W \\ &\Leftrightarrow \ell \text{ عمومی نیست.} \end{aligned} \quad (9)$$

لم. نقاط بحرانی $f_\ell: W \rightarrow \mathbb{R}$ که در $W - M_\ell$ قرار می‌گیرد دقیقاً پیکربندی همخط P_J متناظر با زیرمجموعه بلند $J \subset \{1, \dots, n\}$ است.

قضیه. اگر بردار طول $\ell = (l_1, \dots, l_n)$ عمومی باشد آنگاه فضای مدل بندواره صفحه ای M_ℓ منیفلد بسته ای از بعد $n - 3$ است.

برهان. ربات با $n - 1$ میله دارای بردار طول $\ell^* = (l_1, \dots, l_{n-1})$ را در نظر بگیرید. فضای مدلش با $W \simeq \mathbb{T}^{n-2}$ دیفیومورف می‌باشد. ضابطه تابع $f_{\ell^*}: W \rightarrow \mathbb{R}$ توسط معادله (۸) بدست می‌آید. طبق لم بالا مقادیر بحرانی f_{ℓ^*} که بصورت $-l_n$ با $l_n > 0$ است، در $W - M_{\ell^*}$ قرار می‌گیرد (که متناظر بردار طول $\ell = (l_1, \dots, l_{n-1}, l_n)$ می‌باشد)، بنابراین پیکربندی اش همخط می‌شود و در نتیجه عمومی نیست. همچنین از آنجایی که طبق فرض $\ell =$

منیفلد بسته ای از بُعد $n - 3$ می‌باشد.

مثال . بدون کاستن از کلیت می توان اولین درایه از بردار طول دلخواه را میله ای که به زمین ثابت شده در نظر گرفت و آن را به صورت $(l_1; l_2, \dots, l_n)$ نشان داد. برای نمونه بردار طول $(q \in \mathbb{Q}_+ - \mathbb{N}; 1, \dots, 1)$ را در نظر بگیرید. .

$$M_\ell = f_\ell^{-1}(-l_n)$$

منیفلد بسته ای از بُعد $n - 3$ می‌باشد.

و آن را به صورت $(l_1; l_2, \dots, l_n)$ نشان داد. برای نمونه بردار طول $(q \in \mathbb{Q}_+ - \mathbb{N}; 1, \dots, 1)$ را در نظر بگیرید. .
آنگاه چون

$$\exists J \subset \{1, \dots, n\} \quad s.t \quad \sum_{\substack{i \in J \\ i \in \mathbb{N}}} l_i = \sum_{\substack{i \in J \\ i \in \mathbb{Q}_+ - \mathbb{N}}} l_i$$

پس طبق معادلات (۹) فضای پیکربندی آن برابر $\mathbb{T}^{(n+1)-3} = \mathbb{T}^{n-2} = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1}_{n-2}$ و از بُعد

$$(n+1) - 3 = n - 2 \quad \text{می شود [۶].}$$

به عنوان مثالی کلی تر، گراف دوری C_n همراه یال های $(q; m_1, \dots, m_{n-1})$ که در واقع همان بندواره $n -$ میله با بردار طول $(q \in \mathbb{Q}_+ - \mathbb{N}; m_1 \in \mathbb{N}, \dots, m_{n-1} \in \mathbb{N})$ را در نظر می گیریم. آنگاه چون

$$\forall J \subset \{1, \dots, n\} \Rightarrow \sum_{\substack{i \in J \\ i \in \mathbb{N}}} l_i \neq \sum_{\substack{i \in J \\ i \in \mathbb{Q}_+ - \mathbb{N}}} l_i$$

بنابراین بردار طولش طبق معادلات (۹) عمومی نیست پس فضای پیکربندی آن منیفلدی از بُعد $n - 3$ می‌شود.

۳. نتیجه گیری

ارائه روشی برای بررسی بندواره در صفحه براساس گراف و همچنین نشان دادیم فضای پیکربندی هر گراف دوری C_n همراه یال های $(q \in \mathbb{Q}_+ - \mathbb{N}; m_1 \in \mathbb{N}, \dots, m_n \in \mathbb{N})$ که در واقع مدلسازی همان بندواره $n -$ میله مان با بردار طول (q, m_1, \dots, m_{n-1}) شده بود، برابر \mathbb{T}^{n-3} یعنی از بُعد $n - 3$ می‌باشد. برای تعمیم این حکم، ثابت کردیم فضای پیکربندی هر بندواره n -میله ای با بردار طول عمومی دلخواه $\ell = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{R}_+$ برابر است با $M_\ell = \mathbb{T}^{n-3}$.

۴. قدردانی

از تمام کسانی که حق معلمی به گردن حقیر را دارند، تشکر می نمایم.



1. Magalhaes, M. L. S., & Pollicott, M. (2013). Geometry and dynamics of planar linkages. *Communications in Mathematical Physics*, 317(3), 615-634.
2. Farber, M. (2008). *Invitation to topological robotics* (Vol. 8). European Mathematical Society.
3. Lee, J. M. (2003). Smooth manifolds. In *Introduction to Smooth Manifolds* (pp. 1-29). Springer, New York, NY.
4. Nicolaescu, L. (2011). *An invitation to Morse theory*. Springer Science & Business Media.
5. Tu, L. W. (2011). Manifolds. In *An Introduction to Manifolds* (pp. 47-83). Springer, New York, NY.
6. Nestruev, J. (2006). *Smooth manifolds and observables* (Vol. 220). Springer Science & Business Media.