۲-رنگ آمیزی تام گراف k(6,2) و k(7,2)

مهدی علائیان

۱- **گروه ریاضی، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی ، تهران، ایران،** m_alaeiyan@azad.ac.ir

چکیده

یک کلیت از مفهوم کدهای کاملا منتظم، توسط دلسارته ارائه شده است. رنگ آمیزی تام گراف G با m رنگ، یک افراز از مجموعه رئوس G به m بخش A1, . . . , Am است که برای همه {1,…,m} ∋ i; j، هر راس از Ai دارای تعداد یکسانی مجاور از Aj است که آن را aij می‌نامیم و ماتریس A = (aij) i;j∈ {1,2,…,m} را ماتریس پارامتر نامگذاری می کنیم. ما در این مقاله ۲-رنگ آمیزی تام (افراز منصفانه به ۲ بخش) گراف‌های k(6,2) و k(7,2) را بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: گراف کنسر، ماتریس پارامتر، ۲-رنگ آمیزی تام

۱. مقدمه

در سال ۱۹۷۳ دلسارته اقدام به معرفی خانواده ای از کدها کرد که از خواص ترکیبیاتی جالبی برخوردار بودند. او این کدها را کدهای کاملا منتظم نامید و در همان زمان حدسی را مطرح کرد که هنوز یکی از سوال های اساسی در زمینه کدگذاریی و نظریه گراف می باشد؛ هیچ کد تام غیر بدیهی در گراف جانسون وجود ندارد. برای دانستن ارتباط بین حدس یاد شده و کدهای کاملا منتظم، ذکر این نکته کافیست که هر کد تام یک کد کاملا منتظم است. در واقع دلسارته برای اثبات حدس خود ترجیح داد که کدهای کاملا منتظم در گرافهای جانسون یافته و سپس نشان دهد که هیچ کدام از این کدها، کد تام غیر بدیهی نیست. اصطلاح افراز منصفانه ابتدا توسط هایناس وورس در مطالعه ماتریسهای منصفانه مطرح شد . همچنین ساکس و دیگران از افرازهای منصفانه به عنوان ابزاری برای محاسبه چند جمله‌ای مشخصه یک گراف استفاده کردند. نویمار نشان داد که هر زیر مجموعه از رئوس گراف یک کد کاملا منتظم است اگر و تنها اگر افراز فاصله آن، منصفانه باشد. تا کنون نتایج بسیاری در زمینه رده بندی ماتریس های پارامتر برای گرافهای مختلف بدست آمده است در این مقاله به ۲- رنگ آمیزی تام برخی از گراف‌های کنسر می‌پردازیم.

۲. مفاهیم مقدماتی

در این بخش تعاریف، قضایا و مفاهیم اولیه را بیان می‌کنیم. E^n مجموعه تمام nتایی های ۰ و ۱ تعریف میشود:

$$E^{\mathrm{n}} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \{0,1\}\}$$

وزن n تایی x در E^n، تعداد مولفه های غیر صفر x است.

تعریف ۲-۱: گراف جانسون j(n,w) گرافی است گه رئوس آن همه n تایی های با وزن w در E^n است و رئوسی مجاورند که دقیقا در دو مولفه با هم اختلاف داشته باشند که گرافی منتظم با درجه w(n-w) است که تعداد رئوس آن برابر است با $\binom{n}{w}$.

تعریف ۲-۲: گراف کنسر k(n,w) گرافی است گه رئوس آن همه n تایی های با وزن w در E^n است و رئوسی مجاورند که زیر مجموعه های نظیر آن رئوس با هم اشتراکی نداشته باشند. این گراف‌ها به نام مارتین کنسر نام‌گذاری شده‌اند. که برای اولین بار در سال ۱۹۵۵ مورد بررسی قرار گرفته‌اند. دقیقا در دو مولفه با هم اختلاف داشته باشند که گرافی منتظم که تعداد رئوس آن برابر است با $\binom{n}{w}$.

تعریف ۲-۳: فرض کنیم $x \in E^n$. در این صورت مجموعه اندیس مولفه های غیر صفر x را ساپورت x گوییم و آن را با supp(x) نشان می دهیم.

$\mathrm{Supp}(x)= \{i \in \{1,2,\ldots,n\} | x_i \neq 0\}$

تعریف ۲-۴: t-(n,k,λ) طرح، فرض کنیم که v یک مجموعه n عضوی باشد. یک t طرح روی v شامل گرداه ای از زیر مجموعه های مجزای k تایی v به نام بلوک است، با این ویژگی که هر زیر مجموعه t عضوی v دقیقا در λ بلوک قرار داشته باشند و آن را t-(n,k,λ) طرح می نامیم.

تعریف ۲-۵: یک t طرح با λ =۱ را یک دستگاه اشنایدر می نامیم و آن را با S(n,k,t) نشان می دهیم.

تعریف ۲-۶: گراف همبندG، فاصله منتظم نامیده می شود هرگاه منتظم از درجه k باشد و برای هر دو راس $x,y \in V(G)$ که در فاصله $d(x,y)=i$ هستند، x دقیقا G_i همسایه در فاصله ی i+1 از y داشته باشند.

دنباله ی $E^n = \{b_1, b_2, \ldots, b_{d-1}, c_1, c_2, \ldots, c_d\}$ به طوری که d قطرG است را آرایه اشتراک G می نامیم. اگر $a_i = k - b_i - c_i$

تعداد همسایه های x که در فاصله i از y هستند، باشد،آنگاه اعداد a_i, b_i, c_i اعداد اشتراک نامیده می شوند.

تعریف ۲-۷: هر رنگ آمیزی گراف G با m رنگ را یک m– رنگ آمیزی تام با ماتریس $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ گوییم هرگاه هر راس به رنگ i، تعداد a_{ij} راس مجاور به رنگ j داشته باشد. به ماتریسA ماتریس پارامتر گوییم. در حالت m=2 رنگ اول را سفید و رنگ دوم را سیاه در نظر میگیریم.

نتیجه: هر m– رنگ آمیزی تام در گراف G را می توان به صورت یک نگاشت $T: V(G) \to \{1,2,\ldots,m\}$ در نظر گرفت که خاصیت ذکر شده در تعریف را داشته باشد.

قضیه ۲-۸: اگر Tیک رنگ آمیزی تام گراف G با m رنگ باشد آنگاه هر مقدار ویژه T، یک مقدار ویژه ماتریس مجاورت G است.

برهان [۲].

قضیه ۲-۹: فرض کنید G یک گراف k- منتظم و T یک m– رنگ آمیزی تام با ماتریس $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ در گراف Gباشد. در این صورت مجموع مقادیر هر سطر در ماتریس A برابر k است.

برهان. فرض کنید v یک راس دلخواه به رنگ i باشد. تعداد رئوس مجاور v به رنگ j برابر a_{ij} است. از طرفی از طرفی تعداد رئوس مجاور v برابر k میباشد. بنابر این $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = k$. در نهایت از آنجا که راس v دلخواه انتخاب شده بود ، قضیه به اثبات میرسد.

قضیه ۲-۱۰: فرض کنید T یک ۲-رنگ آمیزی تام با ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در گراف همبند G باشد. در این صورت b,c≠0.

برهان. فرض کنید b=0 باشد. در این صورت هر راس به رنگ سیاه هیچ راس مجاوری به رنگ سفید ندارد. درنتیجه هر راس به رنگ سفید نیز هیچ راس مجاوری به رنگ سیاه ندارد. بنابراین رئوس به رنگ سیاه و سفید تشکیل دو مولفه همبندی می‌دهند که با همبندی گراف در تناقض است.

قضیه ۲-۱۱: چنانچه گراف G دارای یک ۲- رنگ آمیزی تام با ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد آنگاه دارای ۲-رنگ آمیزی تام با ماتریس $\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$ نیز میباشد.

برهان. با تعویض رنگ های سفید و سیاه، نتیجه حاصل می شود.

قضیه ۲-۱۲: فرض کنید R نشان دهنده مجموعه تمام رئوس سفید در یک ۲- رنگ آمیزی تام با ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در گراف همبند G باشد در این صورت

$$|W| = |V(G)|\frac{c}{b+c}$$

برهان. با حذف یالهای بین رئوس سفید و نیز حذف یالهای بین رئوس سیاه، گراف دو بخشی بدست آمده با بخشهای مجموعه رئوس سفید و مجموعه رئوس سیاه را در نظر بگیرید. در این گراف هر راس به رنگ سفید تعداد b راس مجاور به رنگ سیاه دارد. بنابراین تعداد یالها در این گراف برابر |R|b است. از طرف دیگر هر راس به رنگ سیاه، تعداد c راس مجاور به رنگ سفید دارد. درنتیجه تعداد یالها در این گراف برابر |B|c می باشد. از آنجا که |V(G)|=|B|+|W| لذا

$$|V(G)|=|W|+|B|$$
$$= |W|+\frac{b}{c}|W|$$
$$= \left(\frac{b+c}{c}\right)|W|$$

درنتیجه حکم خواسته شده به سادگی بست می آید.

نتیجه ۲-۱۳: فرض کنید |B| نشان دهنده مجموعه تمام رئوس سیاه در یک ۲-رنگ آمیزی تام با ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در گراف همبند G باشد در این صورت

$$|B| = |V(G)|\frac{b}{b+c}$$

قضیه ۲-۱۴: فرض کنید T یک ۲- رنگ آمیزی تام با ماتریس پارامتر $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در گراف k- منتظم G باشد. در این صورت مقادیر ویژه ماتریس پارامتر برابر k و a-c هستند.

برهان. از آنجا که میدانیم مجموع تمامی سطرها برابر k است به سادگی میتوان دید که $\lambda_1 = 1$ یک مقدار ویژه با بردار متناظر $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ است. برای بدست آوردن مقدار ویژه دیگر λ_2 ابتدا توجه کنید که $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A = a + d$. لذا $\lambda_1 = a + d - k$. اما c+ d=k. در نتیجه

$$\lambda_2 = a + d - k = a + d - c = a - c.$$

قضیه ۲-۱۵:مقادیر ویژه j(n,w) دقیقا عبارتند از:

$$\theta_i = (n-w-i)(w-i)-I \qquad 0 \le i \le w.$$

قضیه ۲-۱۶: مقادیر ویژه $k(n,w)$ دقیقا عبارتند از:

$\theta_i = (-1)^i \binom{n-r-i}{r-i} \qquad 0 \leq i \leq w.$

قضیه ۲-۱۷: گراف $k(n,w)$ برای $n > 2w$ همبند است.

نکته۲-۱۸: چند جمله ای زیر را در نظر بگیرید:

$f(l,n,w,a_{11},a_{21}) = w(n-w-l)+a_{21}-a_{11}-l(n-w-l+1)$

اگر کوچکترین ریشه ی $f(l,n,w,a_{11},a_{21})$ به عنوان تابعی از باشد آنگاه:

$K_1 = \frac{n+1-\sqrt{(n-2w+1)^2+4(w+a11-a21)}}{2}.$

گزاره۲-۱۹: فرض کنیم T یک ۲-رنگ آمیزی تام برای $j(n,w)$ با ماتریس $A=[a_{ij}]_{i,j=1,2}$ باشد. آنگاه عدد $\binom{n-i}{n-i+j}$ $\frac{a_{21}}{a_{12}+a_{21}}$ برای هر i,j که $0 \leq i \leq j \leq k_1-1$ عددی صحیح است که در آن k_1 اندیس θ_{k1} مقدار ویژه $j(n,w)$ و همچنین کوچکترین ریشه ی چندجمله ای $f(l,n,w,a_{11},a_{21})$ است.

تعریف۲-۲۰: گراف G فاصله انتقالی است هرگاه برای هر دو زوج x,y و همچنین u,v که $d(x,y)=d(u,v)$ یک اتومورفیسم روی G باشید که یک زوج را به یک زوج دیگر می برد.

۳. ۲-رنگ آمیزی تام گراف کنسر

در این بخش ماتریسهای پارامتر و ساختارهای مرتبط به آن را برای گراف $k(6,2)$ و $k(7,2)$بدست می‌آوریم.

قضیه۳-۱: لیست

$$\begin{bmatrix}3 & 3\\6 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 6\\3 & 3\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}3 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 2\\3 & 3\end{bmatrix}$$

همه ماتریس‌های پارامتر ۲-رنگ‌آمیزی تام $k(6,2)$ هستند.

برهان: همانگونه که قبلا ذکر شدمقدار ویژه مینیمال یک ۲-رنگ آمیزی تام گراف $k(6,2)$ عبارت است از:

$$\theta_i = (-1)^i \binom{6-2-i}{2-i}; i = 0,1,2$$

گراف $k(6,2)$ را به همراه ماتریس‌های $A = [a_{ij}]_{2\times2}$ در نظر می‌گیریم. که درایه های A در قضیه‌های ۲-۸ و ۲-۱۳ صدق کند. در این صورت ۳ حالت داریم:

حالت ۱) $i=0$ در این حالت

$\theta_0 = a_{11} - a_{21} = 6$

و

$$a_{11} + a_{12} = a_{21} + a_{22} = 6$$

پس ماتریس پارامتر$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ به دلیل اینکه درجه هر رأس ۶ می‌باشد. لذا هر رأس با ۶ رأس دیگر مجاور می‌باشدو با رنگ کردن یک رأس چون هر رأس با ۶ رأس دیگر مجاور می‌باشد. بنابراین باید با ۶ رأس همرنگ خود مجاور می‌باشد و این ترتیب را ادامه می‌دهیمکل گراف با یک رنگ رنگ‌آمیزی می‌شود و لذا با دو رنگ نمی‌توان آن را رنگ آمیزی کرد. پس قابل قبول نیست.

حالت ۲) $i=1$ در این حالت

$\theta_0 = a_{11} - a_{21} = -3$

و

$$a_{11} + a_{12} = a_{21} + a_{22} = 6$$

پس با تقریب تغییر نام رنگ‌ها ۴ مورد ۲-رنگ آمیزی تام وجود دارند که ماتریس های پارامترشان در زیر لیست شده‌اند:

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

با توجه به قضیه ۱۲-۲ و نتیجه ۱۳-۲ ماتریس های سطر دوم قابل قبول نیستند. حال ماتریس های سطر اول را مورد بررسی قرار می‌دهیم. گراف $k(6,2)$ در نظر می‌گیریم و رئوس آن را در جهت ساعتگرد از ۱ تا ۱۵ نام‌گذاری می‌کنیم. اگر رأس‌های {۳،۵،۷،۱۰،۱۲} را با رنگ سفید و مابقی را با رنگ سیاه رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه این ماتریس قابل قبول خواهد بود. به طور مشابه ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ نیز قابل قبول می‌باشد.

حالت ۳) $i=1$ در این حالت

$\theta_0 = a_{11} - a_{21} = 1$

و

$$a_{11} + a_{12} = a_{21} + a_{22} = 6$$

همانند حالت قبل با تقریب رنگ‌ها ۶ ماتریس پارامتر۲-رنگ‌آمیزی تام بالقوه بدست می‌آید که در زیر لیست شده‌اند:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

برای ماتریس های $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ با استفاده از قضیه ۱۲-۲ تعداد رأس‌های با رنگ سفید را محاسبه می‌کنیم که ۱۲ تا می‌باشد. پس ۳ رأس با رنگ سیاه باقی می‌ماند که با ۶ راس هم‌رنگ خود مجاور است، که یک تناقض است و به طور مشابه ماتریس دیگر نیز قابل قبول نمی‌باشد.

اما ماتریس $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ که درایه سطر اول و ستون دوم آن صفر می‌باشد که با همبند بودن گراف کنسر در تناقض است و در آخر ماتریس $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, با توجه به قضیه ۱۲-۲ قابل قبول نیست. حال برای ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ اگر رأس‌های {۱،۴،۷،۸،۱۰،۱۱} را سفید و مابقی رئوس را با رنگ سیاه رنگ‌آمیزی کنیم این ماتریس قابل قبول است و برای ماتریس دیگر نیز به‌همین روش قابل قبول است.

قضیه۳-۲: لیست

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

همه ماتریس‌های پارامتر ۲-رنگ‌آمیزی تام $k(7,2)$ هستند.

برهان: همانگونه که قبلا ذکر شد، مقدار ویژه مینیمال یک ۲-رنگ آمیزی تام گراف $k(7,2)$ عبارت است از:

$$\theta_i=(-1)^i \binom{7-2-i}{2-i}; i = 0,1,2$$

گراف $k(7,2)$ را به همراه ماتریس‌های $A = [a_{ij}]_{2\times2}$ در نظر می‌گیریم. که درایه های A در قضیه‌های ۸-۲ و ۱۳-۲ صدق کند. در این صورت ۳ حالت داریم:

حالت ۱) $i=0$ در این حالت

$$\theta_0=a_{11}-a_{21}=10$$

و

$$a_{11}+a_{12}=a_{21}+a_{22}=10$$

پس ماتریس پارامتر $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ به دلیل اینکه درجه هر رأس ۱۰ می‌باشد. لذا هر رأس با ۱۰ رأس دیگر مجاور می‌باشدو با رنگ کردن یک رأس چون هر رأس با ۱۰ رأس دیگر مجاور می‌باشد. بنابراین باید با ۱۰ رأس همرنگ خود مجاور می‌باشد و این ترتیب را ادامه می‌دهیم کل گراف با یک رنگ رنگ‌آمیزی می‌شود و لذا با دو رنگ نمی‌توان آن را رنگ آمیزی کرد. پس قابل قبول نیست.

حالت ۲) $i=1$ در این حالت

$$\theta_0=a_{11}-a_{21}=-4$$

و

$$a_{11}+a_{12}=a_{21}+a_{22}=10$$

پس با تقریب تغییر نام رنگ‌ها ۴ مورد ۲-رنگ آمیزی تام وجود دارند که ماتریس های پارامترشان در زیر لیست شده‌اند:

$$\begin{bmatrix}0 & 10\\4 & 6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6 & 4\\10 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 8\\6 & 4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4 & 6\\8 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 5\\9 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 9\\5 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 7\\7 & 3\end{bmatrix},$$

با توجه به قضیه ۱۲-۲ ماتریس‌های $\begin{bmatrix}3 & 7\\7 & 3\end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix}1 & 9\\5 & 5\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}5 & 5\\9 & 1\end{bmatrix}$ قابل قبول نیستند.
$\begin{bmatrix}2 & 8\\6 & 4\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}6 & 4\\10 & 0\end{bmatrix}$ قابل قبول نیستند زیرا تعداد رأس های به رنگ سفید ۱۲ و تعداد رأس‌های به رنگ سیاه ۹ تا می‌باشد که تناقض است.
پس تنها دو ماتریس $\begin{bmatrix}0 & 10\\4 & 6\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}6 & 4\\10 & 0\end{bmatrix}$ باقی می‌مانند که اگر رأس‌های {۲،۴،۷،۹،۱۲،۲۰} را با رنگ سفید و مابقی رئوس را با رنگ سیاه رنگ‌آمیزی کنیم ماتریس $\begin{bmatrix}0 & 10\\4 & 6\end{bmatrix}$ قابل قبول است و به طور مشابه ماتریس دیگر نیز قابل قبول است.

حالت ۳) i=2 در این حالت

θ0=$a_{11}-a_{21}=1$

و

$$a_{11}+a_{12}=a_{21}+a_{22}=10$$

پس با تقریب تغییر نام رنگ‌ها ۲-رنگ آمیزی تام وجود دارند که ماتریس های پارامترشان در زیر لیست شده‌اند:

$$\begin{bmatrix}4 & 6\\3 & 7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7 & 3\\6 & 4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2 & 8\\1 & 9\end{bmatrix},\begin{bmatrix}9 & 1\\8 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 7\\2 & 8\end{bmatrix},\begin{bmatrix}8 & 2\\7 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6 & 4\\5 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 5\\4 & 6\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1 & 9\\0 & 10\end{bmatrix},\begin{bmatrix}10 & 0\\9 & 1\end{bmatrix},$$

در ماتریس $\begin{bmatrix}10 & 0\\9 & 1\end{bmatrix}$ چون $a_{12}=0$ و گراف کنسرهمبند است قابل قبول نمی‌باشد. ماتریس‌های سطر دوم که تعدادشان برابر ۶ است در شرط قضیه ۱۲-۲ صدق نمی‌کنند، پس قابل قبول نیستند. پس تنها دو ماتریس $\begin{bmatrix}4 & 6\\3 & 7\end{bmatrix}$و$\begin{bmatrix}7 & 3\\6 & 4\end{bmatrix}$ باقی می‌مانند. که اگر رأس‌های {۱،۵،۶،۷،۹،۱۰،۱۳} را با رنگ سفید و مابقی را با سیاه رنگ‌آمیزی کنیم، ماتریس $\begin{bmatrix}4 & 6\\3 & 7\end{bmatrix}$ قابل قبول است و به‌طور مشابه ماتریس $\begin{bmatrix}7 & 3\\6 & 4\end{bmatrix}$ نیز قابل قبول است.

۱۲. مراجع

1. Alaeiyan M, and Abedi AA, "Perfect 2-colorings of Johnson graphs J(4, 3), J(4, 3), J(6,3) and Petersen graph," Ars Combinatorial, (to apear).
2. Alaeiyan M, Karami H, "Perfect 2-colorings of the generalized Petersen graph, " Proceedings Mathematical Sciences. Vol 126pp. 1-6, 2016.
3. Alaeiyan M and Mehrabani A. "Perfect 3-colorings of cubic graphs of order 10, " Electronic Journal of Graph Theory and Applications (EJGTA), (to apear)
4. Avgustinovich S. V., Mogilnykh I. Yu. "Perfect 2-colorings of Johnson graphs J(6, 3) and J(7, 3)," Lecture Notes in Computer Science. 5228: pp.11-19, 2008.
5. Avgustinovich S. V., Mogilnykh I. Yu. " Perfect colorings of the Johnson graphs J(8, 3) and J(8, 4) with two colors. Journal of Applied and Industrial Mathematics, vol 5, pp.19-30, 2011.
6. Fon-Der-Flaass D. G. "A bound on correlation immunity," Siberian Electronic Mathematical Reports Journal, vol 4, pp. 133-135, 2007.
7. Fon-Der-Flaass D. G. "Perfect 2-colorings of a hypercube, " Siberian Mathematical Journal, vol 4, pp.923-930, 2007.
8. Fon-Der-Flaass D. G, "Perfect 2-colorings of a 12-dimensional Cube that achieve a bound of correlation immunity". Siberian Mathematical Journal, vol 4, pp: 292-295, 2007.
9. Gavrilyuk A. L. and Goryainov S.V. On perfect 2-colorings of Johnson graphs J(v,3). Journal of Combinatorial Designs, vol 21pp. 232-252, 2013.
10. Godsil C and Gordon R. Algebraic graph theory. Springer Science+Business Media, LLC, 2004.
11. Godsil C., "Compact graphs and equitable partitions," Linear Algebra and Its Application, 1997.