حل معادلات انتگرالی ولترا-فردهلم با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع سوم و روش کمترین مربعات

اسماعیل برغمدی [*,۱]**، کاظم نوری**[۱]**، لیلا ترک زاده**[۱]

[۱] دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر ، دانشگاه سمنان ، سمنان.

چکیده

در این مقاله، یک روش محاسباتی برای حل عددی معادلات انتگرال ولترا-فردهلم مبتنی بر چندجمله‌ای چبیشف از نوع سوم و روش کمترین مربعات معرفی شده است. ابتدا معادلات انتگرال ولترا-فردهلم را به سیستمی از معادلات جبری تبدیل می‌کنیم. سپس با حل این سیستم، یک جواب تقریبی مسئله اصلی را بدست می‌آوریم. در نهایت کارایی و صحت روش پیشنهادی را با یک مثال عددی ارائه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: معادلات انتگرال والترا-فردهلم، چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع سوم، روش کمترین مربعات

۱. مقدمه

یکی از پرکاربردترین نوع معادلات در فیزیک و شیمی و ... معادلات انتگرالی می‌باشد که در زمینه های مختلف علمی کاربرد دارد. در این مقاله به حل دسته ایی از این معادلات ولترا- فردهلم به صورت زیر می‌پردازیم:

$$A(x)y(x)+B(x)y\big(h(x)\big)=f(x)+\lambda_1\int_a^{h(x)}k_1(x,t)y(t)dt\lambda_2\int_a^{b}k_2(x,t)y(h(t))dt$$

که در آن $f(x)$ ،$A(x)$ ،$B(x)$ ،$f(x)$،$k_2(x.t)$ و $k_1(x,t)$ تابع معلوم، $y(x)$ تابع مجهول و λ_1,λ_0 ضرایب ثابت هستند.

تعریف:

چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع سوم در بازه $[-۱.۱]$ به صورت

$$V_0(x)=1\qquad V_1(x)=2x-1،\ \ V_{m+1}(x)=2xV_m(x)-V_{m-1}(x)$$

Email: esmailbargamadi@semnan.ac.ir;
Email: knouri@semnan.ac.ir;
Email: torkzadeh@semnan.ac.ir

تعریف می‌شوند.

لم:

فرض کنید $f \in L^2([0 ، 1))$ در این صورت

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\psi_i(t) \approx \sum_{i=0}^{n} c_i\psi_i(t) = C^T\Psi(t)$$

که

$$c_{nm} = \langle f(t).\psi_{nm}(t)\rangle = \int_0^1 \psi_{nm}(t)f(t)dt.$$

و همچنین C و $\Psi(t)$ بردار هایی با ابعاد $n \times 1$ می‌باشد.

۲. آنالیز روش

ابتدا تابع $y_n(x)$ در معادله را با استفاده چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع سوم تقریب زده که آن را $T(x, y_n(x))$ نامیده و در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}T\big(x, y_n(x)\big) &= A(x)y_n(x) + B(x)y_n\big(h(x)\big)\\ &\quad -f(x) - \lambda_1 \int_a^{h(x)} k_1(t.x)y_n(t)dt\\ &\quad -\lambda_2 \int_b^{a} k_2(t.x)y_n(t)dt\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i[A(x)\psi_i(x) + B(x)\psi_i(h(x))\\ &\quad -\lambda_1 \int_a^{h(x)} k_1(x.t)\psi_i(x)\\ &\quad -\lambda_2 \int_b^{a} k_2(x.t)\psi_i(h(t))dt] - f(x)\\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{n} c_i\alpha_i(x) - f(x)\end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned}\alpha_i(t) &= A(x)\psi_i(x) + B(x)\psi_i\big(h(x)\big)\\ &\quad -\lambda_1 \int_a^{h(x)} k_1(x.t)\psi_i(x)\\ &\quad -\lambda_2 \int_b^{a} k_2(x.t)\psi_i(h(t))dt\end{aligned}$$

و $i = 0,1,2.\cdots, n$ می باشد. حالا با استفاده از روش کمترین مربعات می‌توان نوشت:

$$I = I(c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n) = \int_a^b T^2\big(x, y_n(x)\big)dx \qquad (۱)$$

در واقع مینیمم I را نسبت به ضرایب حقیقی $c_0, c_1, c_2.\cdots, c_n$ با توجه به $\frac{\partial I}{\partial c_i} = 0$ بدست می‌آوریم و سپس با استفاده از رابطه (۱) داریم

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} = 2\int_a^b T\big(x.y_n(x)\big)\frac{\partial T\big(\lambda.y_n(x)\big)}{\partial c_i}dx$$

$$= 2\int_a^b [\textstyle\sum_{j=0}^n \{A(x)\psi_j(x) + B(x)\psi_j(h(x))$$

$$-\lambda_1\int_a^{h(x)} k_1(x,t)\psi_j(x)dt$$

$$-\lambda_2\int_a^b k_2(x,t)\psi_j(h(x).dx)\psi_i(t)\}.c_j$$

$$-f(x)].[A(t)\psi_i(x) + B(x)\psi_i(h(x))$$

$$-\lambda_1\int_a^{h(t)} k_1(t,x)\psi_i(t)dt$$

$$-\lambda_2\int_a^b k_2(t,x)\psi_i(h(t))dt]dx = 0$$

بنابراین داریم:

$$\sum_{j=0}^n c_i\int_a^b \alpha_i(x)\alpha_j(x) = \int_a^b f(x)\alpha_i(x)dx$$

که در آن $i = 0,1,\cdots,n.$ و می‌توان رابطه فوق را به صورت ماتریسی به صورت زیر نوشت :

$$G_n.C = F$$

که

$$G_n = [(\alpha_i.\alpha_j)]_{(n+1)\times(n+1)}$$

$$C = [c_j]^T_{(n+1)\times 1}$$

$$F = [(\alpha_i.F)]^T_{(n+1)\times 1}$$

با حل دستگاه بالا با $(n+1)$ معادله و $(n+1)$ مجهول، یک جواب تقریبی برای معادله انتگرالی ولترا-فردهلم به دست می‌آوریم.

۳. مثال عددی

معادله انتگرالی ولترا-فردهلم زیر را در نظر بگیرید:

$$y(x) + y\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)$$

$$+\int_0^{\frac{x}{2}}(x-\frac{t}{2})y(t)dt + \int_0^1 xty(\frac{t}{2})dt$$

که در آن

$$f(x) = e^x + e^{\frac{1}{2}x}(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}x) + x(2x^{\frac{1}{2}}-3) + \frac{1}{2}$$

و جواب دقیق آن $y(x) = e^x$ می‌باشد.

در جداول (۱) ، (۲) و (۳) نتایج عددی روش ارائه شده است و مقایسه جواب با روش موجود در رفرنس [۱] مقایسه گردیده است.

جدول۱ : مقایسه دو روش برای n=2

	چند جمله ای مونس لژاندر	چند جمله ای چبیشف نوع سوم
t_i	n=2	n=2
۰	$4.1811e-01$	$7.2137e-03$
0.1	$1.0404e-01$	$9.5807e-03$
0.2	$1.3751e-01$	$4.1910e-03$
0.3	$1.1367e-01$	$3.6483e-03$
0.4	$7.7331e-02$	$6.1571e-04$
0.5	$4.8987e-02$	$3.4860e-03$
0.6	$4.2132e-02$	$7.0865e-03$
0.7	$6.7726e-02$	$8.4504e-03$
0.8	$1.3590e-01$	$5.6597e-03$
0.9	$2.5677e-01$	$3.4052e-03$
1	$4.4095e-01$	$2.1087e-02$
T.CPU	5.6827	2.0349

جدول2 : مقایسه دو روش برای n=3

	چند جمله ای مونس لژاندر	چند جمله ای چبیشف نوع سوم
t_i	n=3	n=3
0	$1.7419e-01$	$4.9471e-04$
0.1	$2.2894e-02$	$2.1755e-04$
0.2	$5.0936e-03$	$1.7508e-04$
0.3	$2.2243e-02$	$1.5736e-04$
0.4	$2.3309e-02$	$4.3737e-04$
0.5	$1.2867e-02$	$4.5777e-04$
0.6	$2.0594e-03$	$1.6079e-04$
0.7	$1.3361e-02$	$3.4618e-04$
0.8	$1.2125e-02$	$7.7323e-04$
0.9	$1.1372e-02$	$6.2877e-04$
1	$6.7762e-02$	$8.0176e-04$
T.CPU	6.8487	2.6583

جدول3 : مقایسه دو روش برای n=4

	چند جمله ای مونس لژاندر	چند جمله ای چبیشف نوع سوم
t_i	n=4	n=4
0	$4.6086e-02$	$2.6969e-05$
0.1	$1.5331e-04$	$1.4018e-05$
0.2	$4.4293e-03$	$5.6903e-06$
0.3	$1.3905e-03$	$2.2039e-05$
0.4	$2.6946e-03$	$1.3085e-05$
0.5	$4.2776e-03$	$1.3869e-05$
0.6	$2.4825e-03$	$3.6493e-05$
0.7	$1.4547e-03$	$3.3148e-05$
0.8	$4.5074e-03$	$2.5359e-07$
0.9	$2.0157e-03$	$2.8517e-05$
1	$1.2262e-02$	$3.8977e-05$
T.CPU	7.2892	2.9683

۳. نتیجه‌گیری

با توجه به نتایج عددی به دست آمده در جدول بالا، خطای مطلق در روش چندجمله‌ای چبیشف نوع سوم برای $n=2،3،4$ به ترتیب برابر 10^{-3}،10^{-4}و 10^{-5} می‌باشد که با توجه به خطای مطلق در روش مونس لژاندر نشان دهنده دقت محاسبات بالاتر این روش می‌باشد و همچنین روش چند جمله‌ای‌های چبیشف نوع سوم زمان اجرای کمتری را نسبت به روش مونس لژاندر دارد و در نهایت می‌توان بیان نمود که روش چبیشف نوع سوم روشی کاراتر از هر دو جهت زمان اجرا و دقت می‌باشد.

[1] N. Negarchi and K. Nouri.Numerical solution of Volterra–Fredholm integral equations using the collocation method based on a special form of the Müntz–Legendre polynomials.Journal of Computational and Applied Mathematics 344 (2018): 15-24.
[2] K. Aghigh, M.Masjed-Jamei and M. Dehghan A survey on third and fourth kind of Chebyshev polynomials and their applications.Applied Mathematics and Computation. , 199 (2008) 2–12.