حل معادله بگلی-تورویک با استفاده از ماتریس‌های عملیاتی انتگرال کسری چندجمله‌ای های چبیشف

رضا بروغنی *[۱]، کاظم نوری[۱]، نوید فروهی[۲]

[۱]دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران

[۲] دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران

چکیده

در این مقاله، به بیان روشی محاسباتی برای حل معادله دیفرانسیل بگلی-تورویک براساس ماتریس‌های عملیاتی انتگرال کسری چندجمله‌ای های چبیشف انتقال یافته نوع اول می‌پردازیم. از خواص ماتریس‌های علملیاتی کسری برای تبدیل مساله به دستگاه جبری خطی استفاده می‌کنیم. مثال های عددی به منظور اعتبارسنجی و دقت روش، ارائه شده است. با استفاده از نرم افزار متلب مقادیر مثال ها جهت بررسی خطای مطلق و مقایسه با روش هم‌محلی تیلور آورده شده است.

کلمات کلیدی: چندجمله ای های چبیشف انتقال یافته، معادلات دیفرانسیل ، ماتریس های عملیاتی، حسابان کسری

۱. مقدمه

اخیرا بسیاری ازپدیده های مهم در سیستم‌های دینامیکی، هدایت گرما، سیستم های سلولار، صنایع نفت، پردازش سیگنال، نظریه کنترل، مکانیک سیالات و سایر زمینه‌های علوم و مهندسی را می‌توان بااستفاده از معادله دیفرانسیل بامرتبه کسری باموفقیت مدلسازی کرد. روش‌های عددی برای پیداکردن جواب تقریبی معادله دیفرانسیل کسری توسط نویسندگان و منابع موجود در آن بررسی شده است[1]. در این مقاله، از ماتریس عملیاتی انتگرال کسری چندجمله‌ای های چبیشف انتقال یافته نوع اول برای بدست آوردن جواب تقریبی معادله بگلی-تورویک بامشتق کاپوتو استفاده می‌شود:

$$Ay''(x) + By^{\frac{3}{2}}(x) + Cy(x) = f(x) \qquad (۱)$$

باشرط مرزی: $y(0) = y_0$ و $y'(0) = y_1$ و $f(x)$ تابعی پیوسته می‌باشد. معادله بگلی-تورویک در مدل سازی حرکت صفحه صلب که در سیال نیوتنی ادغام شده ظاهر می شود. قضیه وجود و یکتایی معادله بگلی-تورویک باشرط مرزی دیریکله در[2]آورده شده است. به طور کلی ، حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل کسری به صورت تحلیلی سخت می‌باشد. بنابراین، از جواب‌های تقریبی و روش‌های عددی بسیار استفاده می‌شود [3,4]. سعادتمندی و دهقان روش ماتریس‌های عملیاتی لژاندر را برای حل معادله دیفرانسیل کسری در[5]بکاربرده اند.

۲. تعاریف مقدماتی

تعریف۲٫۱. عملگر I_a^α در $L_1[a,b]$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(1-\alpha)} f(t)dt \, ; a \le x \le b \, , \alpha \in \mathbb{R}$$

Email: boroghani@semnan.ac.ir

به عملگر I_a^{α}، عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل ازمرتبه αمی‌گوئیم. اگر $\alpha = 0$ باشد خواهیم داشت:

$$I_a^0 = I$$

که I عملگرهمانی است.

تعریف۲٫۲. بافرض $0 \geq$ و$m = \lceil \alpha \rceil$رابطه زیر را تعریف می‌کنیم:

$$D_{*a}^{\alpha} f : I_a^{m-\alpha} D^m f$$

که$D^m f \epsilon L_1[a,b]$. به $D_{*a}^{\alpha} f$عملگر کسری مشتق کاپوتو می‌گوئیم. اگر $m = \alpha$ باشد، آنگاه

$$D_{*a}^{\alpha} f = I_a^0 D^{\alpha} f = D^{\alpha}$$

قضیه۲٫۳. دو رابطه‌ای که در ذیل ذکر شده است نشان دهنده رابطه ی بین عملگرمشتق کسری کاپوتو و انتگرال کسری ریمان-لیوویل می‌باشد:

$$D_{*a}^{\alpha} I_a^{\alpha} y(x) = y(x) \qquad (۲)$$

و

$$I_a^{\alpha} D_{*a}^{\alpha} y(x) = y(x) - \sum_{k=0}^{\lceil \alpha \rceil - 1} \frac{y_{(0)}^{k}}{k!} x^k \qquad (۳)$$

تعریف۲٫۴. چندجمله‌ای های چبیشف درجهn به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$T_n(t) = \cos(n\theta) \,;\, 0 \leq \theta \leq \Pi$$

که$t = \cos(n\theta)$و نقاط هم‌محلی چندجمله‌ای های چبیشف از درجه$n+1$از رابطه زیر بدست می‌آیند:

$$t_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\Pi}{2n+1}\right); i = 0,1,2,\dots,n$$

همچنین رابطه بازگشتی در چندجمله‌های چبیشف به صورت زیر می‌باشد:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

که$T_0(x) = 1$و$T_1(x) = x$.

چندجمله‌ای های چبیشف باتابع وزن$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$در بازه $[-1,1]$به صورت زیر متعامد هستند:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{(1-x^2)}} dx = \begin{cases} 0 \;\; ; \quad m \neq n \\ \frac{\Pi}{2} \;\; ; \;\; m = n \neq 0 \\ \Pi \;\; ; \quad \mathrm{m} = \mathrm{n} = 0 \end{cases}$$

تعریف۲٫۵. فرم ماتریسی چندجمله‌ای‌های چبیشف را به صورت:

$$T(x) = [T_0(x), T_1(x), T_2(x), \dots, T_n(x)]^T$$

و

$$X = [1, x, \dots, x^n]^T$$

در نظر می گیریم. لذا می توان نوشت:$T(x) = TX$.

که

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & t_{2,1} & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_{3,1} & t_{3,2} & 2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\frac{n\Pi}{2}) & t_{n,1} & t_{n,2} & t_{n,3} & t_{n,4} & \dots & 2^{n-1} \end{bmatrix}$$

بنابراین داریم:

$$t_{i,0}=\cos\left(\frac{i\Pi}{2}\right);i=0,1,2\dots,n$$

و

$$t_{i,j}=\begin{cases}\left(2\left|t_{i-1,j-1}\right|+\left|t_{i-2,j}\right|sign\left|t_{i-1,j-1}\right|\right);i\geq j\\ 0 \qquad ;i<j\end{cases}$$

تعریف۲٫۶. چندجمله‌ای‌های چبیشف بر بازه ی$[-1,1]$را به بازه ی$[0,\mathrm{T}]$با ماتریس تبدیل WX که$W=TR$و

$$R_{i,j}=\begin{cases}\binom{i}{j}\gamma_1^{i-j}\gamma_2^{j} & ;i,j=0,1,2,\dots,n\\ 0 & ;\qquad i<j\end{cases}$$

تبدیل می‌کنیم، که$\gamma_1=-1$و$\gamma_2=\frac{2}{T}$.

تعریف۲٫۷. ماتریس عملیاتی انتگرال کسری چندجمله‌ای های چبیشف انتقال یافته نوع اول به صورت زیر تعریف می‌شوند[6]:

$$I^{\alpha}(WX)=(A_{\alpha}*W)X^{\alpha} \qquad (٤)$$

که در آن $X^{\alpha}=x^{\alpha}.X=[x^{\alpha},x^{\alpha+1},x^{\alpha+2},\dots,x^{\alpha+n}]^{T}$ و$*$ضرب نقطه به نقطه می‌باشد، همچنین ماتریس پایین مثلثیA_{α}به صورت زیر می‌باشد:

$$A_{i,j}=\begin{cases}\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)} & ;\qquad i\geq j\\ 0 & ;\qquad i<j\end{cases}$$

۳. آنالیز روش

فرم معادله دیفرانسیل بگلی-توروپک به صورت

$$Ay''(x)+By^{\frac{3}{2}}(x)+Cy(x)=f(x)$$

می‌باشد، که $A\neq 0$ ،Bو$C\epsilon\mathbb{R}$مقادیر ثابت و $f(x)$معلوم می‌باشد. معادله(۱)را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$AD^2y(x)+BD^{\frac{3}{2}}y(x)+Cy(x)=f(x)$$

باتقریب زدن از بزرگترین مشتق موجود در معادله با استفاده از چندجمله‌ای های چبیشف انتقال یافته نوع اول خواهیم داشت:

$$D^2y(x) \approx Y^TWX \quad (۵)$$

بااستفاده از رابطه ی (۳)می‌توان نوشت:

$$I^2D^2y(x) = y(x) - \sum_{k=0}^{1} \frac{y_{(0)}^k}{k!} x^k \quad (۶)$$

باجایگزین کردن رابطه(۵)در(۶)داریم:

$$I^2(Y^TWX) = y(x) - (y_0 + y_1x)$$

باقراردادن $y(x) - (y_0 + y_1x) = h(x)$ رابطه ی فوق رابازنویسی می‌کنیم:

$$y(x) = Y^TI^2(WX) + h(x) \quad (۷)$$

سپس بااستفاده از رابطه ی(۴)، رابطه ی (۷)را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$y(x) = Y^T(A_2 * W)X^2 + h(x) \quad (۸)$$

برای محاسبه $D^{\frac{3}{2}}y(x)$نیز، طرفین معادله ی(۴)را در$D^{\frac{3}{2}}$ضرب می‌کنیم:

$$D^{\frac{3}{2}}y(x) = D^{\frac{3}{2}}I^2D^2y(x) + D^{\frac{3}{2}}h(x)$$

با توجه به اینکه$D^{\frac{3}{2}}h(x) = 0$می‌باشد، خواهیم داشت:

$$D^{\frac{3}{2}}y(x) = D^{\frac{3}{2}}I^{\frac{3}{2}}I^{\frac{1}{2}}D^2y(x)$$

بااستفاده از قضیه ی (۲،۳):

$$D^{\frac{3}{2}}y(x) = I^{\frac{1}{2}}D^2y(x) = I^{\frac{1}{2}}(Y^TWX) = Y^TI^{\frac{1}{2}}(WX) \quad (۹)$$

باقراردادن رابطه ی(۴)در (۹)داریم:

$$D^{\frac{3}{2}}y(x) = Y^T(A_{\frac{1}{2}} * W)X^{\frac{1}{2}} \quad (۱۰)$$

در ادامه باجایگزین کردن روابط (۵)،(۸)و(۱۰)در معادله ی(۱)به رابطه زیر می‌رسیم:

$$A(Y^TWX) + BY^T\left(A_{\frac{1}{2}} * W\right)X^{\frac{1}{2}} + C(Y^T(A_2 * W)X^2 + h(x)) = f(x)$$

سرانجام بافرض:$Y^T\left(A_{\frac{1}{2}} * W\right)X^{\frac{1}{2}} = M$ و $Y^T(A_2 * W)X^2 = N$خواهیم داشت:

$$AY^TWX + BM + CN + Ch(x) = f(x) \quad (۱۱)$$

حال نقاط هم‌محلی(ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف انتقال یافته به بازه[0,1]) رادر(۱۱)قرارمی‌دهیم تابه یک دستگاه $N+1$معادله$N+1$مجهول برسیم.پس از حل دستگاه بردارYبدست می‌آید.سپس از رابطه ی (۸)به راحتی جواب عددی مساله بگلی-توروییک بدست خواهد آمد.

۴. مثال عددی

دراین بخش، روش ماتریس عملیاتی انتگرال کسری چندجمله‌ای های‌چبیشف انتقال یافته نوع اول برای حل معادله بگلی-توروییک باشرایط مختلف بکاربرده می‌شود و کارآیی و اثربخشی روش در مثال‌هانشان داده شده است.

مثال۴،۱. معادله بگلی-توروییک زیر را درنظر می‌گیریم:

$$AD^2y(x) + BD^{\frac{3}{2}}y(x) + Cy(x) = f(x)$$

بافرض$A = 1$،$B = C = \frac{1}{2}$،$f(x) = 8$و شرایط اولیه:$y(0) = 0$و$y'(0) = 0$ جواب دقیق مساله به صورت زیر می‌باشد[7]:

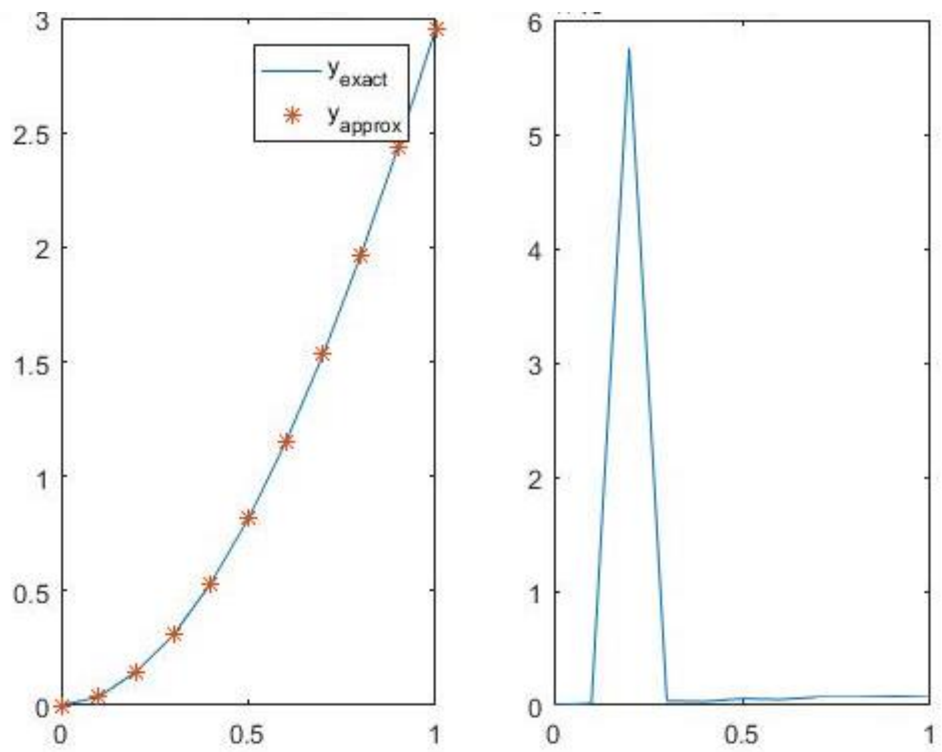
$$y(x)=\int_0^x G_3(x-\tau)f(\tau)d\tau G_3(x)=\frac{1}{A}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{C}{A}\right)^k x^{2k+1}E^k_{\frac{1}{2},2+\frac{3k}{2}}(\frac{-B}{A}\sqrt{t})$$

که

$$E^k_{\lambda,\mu}(y)=\frac{d^k}{dy^k}E_{\lambda,\mu}(y)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+k)!\,y^i}{j!\,\Gamma(\lambda j+\lambda k+\mu)}$$

جدول ۱- مقایسه جواب‌های دقیق و تقریبی مثال۴٫۱

x	روش پیشنهادی	خطای مطلق	روش هم‌محلی تیلور	جواب دقیق
0	0	0	0	0
0.1	0.036505256	1.7777e-05	0.036485547	0.036487479
0.2	0.14065167	5.7445e-03	0.140634716	0.140639621
0.3	0.30752628	3.8821e-05	0.140634716	0.307484627
0.4	0.53331764	3.3533e-05	0.533271294	0.533284110
0.5	0.81481578	5.8832e-05	0.814735609	0.814756950
0.6	1.1488886	5.1195e-05	1.148805808	1.148837428
0.7	1.5326379	7.2455e-05	1.532521264	1.532565443
0.8	1.9631011	7.1796e-05	1.962974991	1.963029298
0.9	2.4374123	7.8260e-05	2.437455982	2.437334072
1	2.9526707	8.6598e-05	2.954070000	2.952584099



شکل ۱ – مقایسه جواب‌های دقیق و تقریبی و خطای مطلق مثال۴٫۱

مثال۴٫۲. مجددا با درنظرگرفتن معادله

$AD^2y(x) + BD^{\frac{3}{2}}y(x) + Cy(x) = f(x)$

همچنین بافرض $A = B = C = 1$، $f(x) = x + 1$ و شرایط اولیه $y(0) = 1$ و $y'(0) = 1$ جواب دقیق این مساله $\mathrm{y(x) = x + 1}$ می‌باشد. سعی می‌کنیم به طورمثال روش را به ازای $\mathrm{n} = 2$ که n نشان‌دهنده درجه چندجمله‌ای می‌باشد، جواب های دقیق را دربازه $0 \le x \le 1$ پیداکنیم. نتایج محاسبات را در ادامه گزارش می‌کنیم:

$X = [1, x, x^2]^T$

$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 4 \end{bmatrix}$

سپس:

$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

از آنجایی که $W = TR$ بنابراین:

$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -8 & 8 \end{bmatrix}$

براساس رابطه (۴)، ماتریس پایین مثلثی $A_{\frac{1}{2}}$ و بردار X به فرم زیر نتیجه می‌شوند:

$X^{\frac{1}{2}} = [x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{3}{2}}, x^{\frac{5}{2}}]^T$

و

$$A_{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}1.1284 & 0 & 0\\ 1.1284 & 0.7523 & 0\\ 1.1284 & 0.7523 & 0.6018\end{bmatrix}$$

همچنین:

$$I^{\frac{1}{2}}(WX)=\begin{bmatrix}1.128x^{\frac{1}{2}}\\ 1.505x^{\frac{3}{2}}-1.128x^{\frac{1}{2}}\\ 1.128x^{\frac{1}{2}}-6.018x^{\frac{3}{2}}+4.814x^{\frac{5}{2}}\end{bmatrix}$$

در ادامه A_2 را نمایش می‌دهیم:

$$A_2=\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0\\ 0.5 & 0.1667 & 0\\ 0.5 & 0.1667 & 0.0833\end{bmatrix}$$

و طبق رابطه(۴):

$$I^2(WX)=\begin{bmatrix}\frac{x^2}{2}\\ \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\\ \frac{2x^4}{3}-\frac{4x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\end{bmatrix}$$

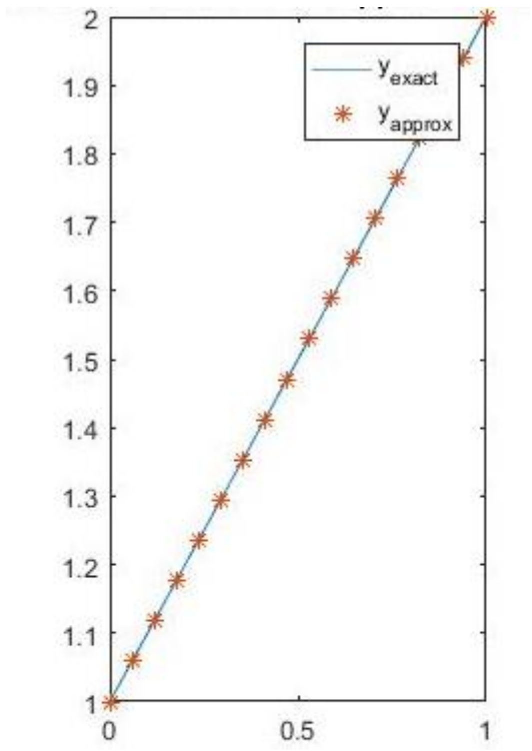
سرانجام:

$$y_{\text{تقریبی}}=-4.5e-80x^4+9.0e-80x^3-1.69e-80x^2+x+1$$

و باقراردادن نقاط هم‌محلی دربازه $[0,1]$جواب‌های تقریبی در یک بردار ستونی به فرم زیر بدست می‌آیند:

$$y_{\text{تقریبی}}=\begin{bmatrix}1\\ 1.1\\ 1.2\\ 1.3\\ 1.4\\ 1.5\\ 1.6\\ 1.7\\ 1.8\\ 1.9\\ 2\end{bmatrix}$$

بنابراین داریم:$y(x)=x+1$، که باجواب دقیق برابر می‌باشد.



شکل ۱ – مقایسه جواب‌های دقیق و تقریبی مثال۴,۲

۵. نتیجه‌گیری

براساس ماتریس‌های عملیاتی چندجمله‌ای‌های چبیشف انتقال‌یافته نوع اول، معادله بگلی-توروبک در دو مثال توسط نرم افزار متلب با روش مذکور حل شد. نتایج جدول و نمودارها نشان دهنده دقت و کارایی روش بوده، با افزایشn(تعدادافرازهای چندجمله ای های چبیشف)، جواب های تقریبی توسط روش ارائه شده به جواب دقیق نزدیک تر و خطای مطلق کاهش می یابد. بامقایسه نتایج با روش هم‌محلی تیلور ملاحظه می شود، جواب های دقیق تر و خطای کم تری نسبت به روش هم‌محلی تیلور حاصل می شود، همچنین زمان اجرای برنامه با افزایشnدر روش ارائه شده و روش [7]افزایش می‌یابد.

۶. مراجع

[1] A.A. Kilbas , H.M. Srivastava and J.J. Trujillo,"Theory and applications of fractional differential equations," *Elsevier Science, Amsterdam,2006.*

[2] Q.M.Al-Mdallal ,M.I. Syam and M.N. Anwar, "A coolocation shooting method for solving fractional boundary value problems," *Commun Nonlinear Sci Numer Simul 15(12):3814-3822,2010.*

[3] S.Kumar , D.Kumar, S.Abbasbandi and M.M. Rashidi,"Analytical solution of fractional Navier-Stokes equation by using modified Laplace decomposition method," *ain Shams, Eng J 5(2):569-574,2014.*

[4] M.G.Sakar and H.Ergoren,"Alternative variational iteration method for solving the time-fractional fornberg-whitham equation," *Appl Math Model 39(14):3972-3979,2015.*

[5] A.Saadatmandi and M.Dehghan,"A new operational matrix for solving fractional-order differential equations," *Comput, Math, Appl59(3):1326-1336,2010.*

[6] M.N.Sahlan and H.Feyzollahzadeh," Operational matrices of Chebyshev polynomials for solvingsingular Volterra integral equations," Math. Sci. *10.1007/s40096-017-0222-4,2017.*

[7] Y. Cenesiz , Y. Keskin and A. Kurnaz,"The solution of the Bagley–Torvik equation with the generalized Taylor collocation method," *Journal ofthe Franklin Institute 347(452–466), 2010.*