قضایای وجودی برای مسائل تعادل برداری ضمنی تعمیم یافته

پرستو زنگنه مهر [۱]، علی فرج زاده [۲]، اردشیر کرمیان [*، ۳]

پرستو زنگنه مهر [۱]، علی فرج زاده [۲]، اردشیر کرمیان [*†، ۳]

۱- گروه ریاضی، واحد کرمانشاه، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمانشاه، ایران

۲- گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران

۳- دکتری آنالیز ریاضی، مدرس ریاضی و دبیر آموزش و پرورش

چکیده

این مقاله ابتدا به معرفی و تاریخچه مختصر از مسأله تعادل و مسائل تعادل برداری ضمنی تعمیم یافته (GIVEP) می پردازد. سپس قضایای وجودی برای (GIVEP) و برخی شرایط فشرده و محدب بودن مجموعه جواب توابع مجموعه مقدار که دامنه زیر مجموعه ای از حاصل‌ضرب دکارتی از یک فضای برداری توپولوژیک هاسدورف با مقادیر در فضاهای توپولوژیک Y (نه لزوماً برداری توپولوژیک یا موضعاً محدب) را ارائه می دهد. برای اثبات قضایای وجودی از قضایای اشتراک متناهی و قضیه کی- فن استفاده می شود.

کلمات کلیدی: خاصیت اشتراک متناهی ، نگاشت مجموعه مقدار، نگاشت KKM، نگاشت نیم پیوسته پایینی

۱. مقدمه

مسأله تعادل برداری ضمنی (IVEP) توسط هانگ و همکاران [۵] برای توابع $f: K \times K \to Y$ و $g: K \to K$ به صورت زیر معرفی گردید:

یافتن $x \in K$ به‌طوری که

$$f(g(x), y) \not\subseteq -intC, \quad \forall y \in K.$$

که در آن X و Y فضاهای برداری توپولوژیک هاسدورف و K زیرمجموعه ناتهی، محدب و بسته از X و $C \subseteq Y$ مخروطی محدب و بسته می‌باشد.

قابل ذکر است که مسأله تعادل برداری ضمنی دربرگیرنده دسته مهمی از مسائل از جمله مسأله نابرابری تغییراتی تعمیم یافته است که عبارت است از یافتن $x \in K$ به‌طوری که

$$\langle T(g(x)), \theta(y, g(x)) \rangle \not\subseteq -intC(x), \quad \forall y \in K,$$

که در آن $L(X,Y)$ نمایش فضای همه عملگرهای خطی پیوسته از X به Y، $T: K \to L(X,Y)$، $\theta: K \times K \to X$ و $g: K \to K$ و $\langle T(z), y \rangle = T(z)(y)$ و $C(x) \subseteq X$ مخروطی محدب و بسته می‌باشد.

[1*] **Corresponding author:** اردشیر کرمیان
Email: ar_karamian1979@yahoo.com

مسأله تعادل برداری تعمیم یافته برای اولین بار در سال ۱۹۹۷ در [۱] به صورت زیر معرفی شد.
فرض کنید K زیرمجموعه محدب، بسته و ناتهی از فضای برداری توپولوژیک X و C مخروط محدب و بسته در Y باشد و $intC \neq \emptyset$. اگر $F: K \times K \to 2^Y$ یک نگاشت مجموعه مقدار باشد. مسأله تعادل برداری تعمیم یافته (GVEP) عبارت است از یافتن $x \in K$ به‌طوری که

$$F(x,y) \nsubseteq -intC, \quad \forall y \in K.$$

نویسندگان در [۸] مسأله تعادل عملگری ضمنی تعمیم یافته (GIOEP) که به صورت زیر معرفی می شود را بررسی کرده اند:
یافتن $f^* \in K$ به‌طوری که

$$F(h(f^*), g) \nsubseteq -intC(f^*), \forall g \in K$$

که در آن $F: K \times K \longrightarrow 2^Y$ نگاشت مجموعه مقدار، $h: K \longrightarrow K$ یک نگاشت، X و Y فضاهای برداری توپولوژیک هاسدورف، $L(X,Y)$ فضای همه عملگرهای خطی پیوسته از X به Y، $K \subseteq L(X,Y)$ مجموعه ناتهی و محدب، $C: K \longrightarrow 2^Y$ نگاشت مجموعه مقدار به‌طوری که برای هر $f \in K$، $C(f)$ مخروطی محدب و بسته در Y با درون ناتهی($intC(f) \neq \emptyset$) و 2^Y نمایش مجموعه همه زیرمجموعه های ناتهی Y است.
توجه. اگر در مسأله فوق (GIOEP) شرط $K \subseteq X$ را با شرط $K \subseteq L(X,Y)$ جایگزین کنیم آن را مسأله تعادل برداری ضمنی تعمیم یافته می‌نامیم و با GIVEP نمایش می‌دهیم.

این مقاله با الهام گرفتن از مقاله [8] نگارش شده است و هدف آن گسترش نتایج ارائه شده در [8] با جایگزین کردن فضاهای برداری توپولوژیکی هاسدورف و حذف برخی شرایط است.
در ادامه این بخش، برخی از تعاریف و نتایجی را که در بخش بعدی به آنها نیاز داریم، یادآوری می شود.
زیرمجموعه C از Y مخروط محدب و نوک‌دار است اگر

$$C + C \subseteq C, tC \subseteq C, \forall t \geq 0 \text{ و } C \cap -C = \{0_Y\}$$

(برای مثال مراجع [۱، ۲، ۴، ۵ و ۶] را ببینید.)
دامنه و گراف نگاشت مجموعه مقدار $W: X \longrightarrow 2^Y$ به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D(W) = \{x \in X: W(x) \neq \emptyset\}$$

$$Gr(W) = \{(x,z) \in X \times Y: z \in W(x)\}.$$

همچنین W بسته نامیده می‌شود هرگاه گراف آن بسته باشد؛ یعنی $Gr(W)$ زیرمجموعه ای بسته از $X \times Y$ باشد. نگاشت مجموعه مقدار $T: X \longrightarrow 2^Y$ در $x_0 \in X$ نیم‌پیوسته بالایی($u.s.c.$) نامیده می شود، هرگاه برای هر مجموعه باز $V \subseteq Y$ شامل $T(x_0)$ مجموعه بازی مانند $U \subseteq X$ و شامل x_0 موجود باشد به‌طوری که برای هر $u \in U$، $T(u) \subseteq V$.
نگاشت مجموعه مقدار $T: X \longrightarrow 2^Y$ در $x_0 \in X$ نیم پیوسته پایینی(به اختصار $l.s.c.$) نامیده می شود، هرگاه برای هر مجموعه باز $V \subseteq Y$ که $T(x_0) \cap V \neq \emptyset$، مجموعه بازی مانند $U \subseteq X$ و شامل x_0 موجود باشد به‌طوری که برای هر $u \in U$، $T(u) \cap V \neq \emptyset$.
نگاشت مجموعه مقدار $T: X \longrightarrow 2^Y$ در $x_0 \in X$ پیوسته نامیده می‌شود، هرگاه در $x_0 \in X$ نیم‌پیوسته بالایی و نیم‌پیوسته پایینی باشد.
بعلاوه، T روی X، $u.s.c.$ ($l.s.c.$) نامیده می‌شود هرگاه در هرنقطه از X، $u.s.c.$ ($l.s.c.$) باشد.
در ادامه تعاریف پایه‌ای و نتایج زیر را احتیاج داریم.

گزاره ۱-۱ [۹]. فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژیک هاسدورف و $T: X \longrightarrow 2^Y$ یک نگاشت باشد، آنگاه گزاره های زیر برقرارند:

الف) برای هر $x_0 \in X$ اگر T دارای مقدار فشرده در x_0 باشد (یعنی $T(x_0)$ فشرده باشد)، آنگاه T در $x_0 \in X$ نیم پیوسته بالایی است اگر و تنها اگر برای هر تور $\{x_\alpha\} \subseteq X$ که
$x_\alpha \longrightarrow x_0$
و برای هر $y_\alpha \in T(x_\alpha)$، $y_0 \in T(x_0)$ و زیر تور $\{y_{\alpha_\beta}\} \subseteq \{y_\alpha\}$ موجود باشند به‌طوری که $y_{\alpha_\beta} \longrightarrow y_0$؛

ب) T در $x_0 \in X$ نیم پیوسته پایینی است اگر و تنها اگر برای هر تور $\{x_\alpha\} \subseteq X$ که $x_\alpha \longrightarrow x_0$ و برای هر $y_0 \in T(x_0)$، $y_\alpha \in T(x_\alpha)$ موجود باشد به‌طوری که $y_\alpha \longrightarrow y_0$.

گزاره ۱-۲. فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژیک هاسدورف و $T: X \longrightarrow 2^Y$ یک نگاشت مجموعه مقدار ناتهی باشد، اگر T مقدار بسته و نیم پیوسته بالایی باشد آنگاه گراف T بسته است.

تعریف ۱-۳ [۱۱]. فرض کنید K زیرمجموعه ناتهی از فضای برداری توپولوژیک X باشد. نگاشت مجموعه مقدار $T: K \to 2^X$ نگاشت KKM نامیده می‌شود هرگاه برای هر زیرمجموعه متناهی $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ از K، $Co\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ مشمول در $\bigcup_{i=1}^{n} T(x_i)$ باشد که در آن Co نمایش غلاف محدب است.
نگاشت های KKM برای اولین بار توسط Knaster، Kuratowski و Mazurkiewicz در سال ۱۹۲۰ در [۱۱] مورد بررسی قرار گرفت تا خاصیت اشتراک متناهی برای مقادیر نگاشت تضمین شود.

لم ۱-۴ [۳]. فرض کنید K زیرمجموعه ناتهی از فضای برداری توپولوژیک X و نگاشت مجموعه مقدار $F: K \to 2^X$، نگاشت KKM با مقادیر بسته در K باشد. همچنین فرض کنید زیرمجموعه محدب، فشرده و ناتهی B از K موجود باشد به‌طوری که $\bigcap_{x \in B} F(x)$ فشرده باشد، آنگاه
$\bigcap_{x \in K} F(x) \neq \emptyset$

۲. نتایج اصلی

یکی از اهداف این بخش تعمیم قضیه ۱-۳ ارائه شده در مرجع [۸] و قضایای ۱-۳ و ۳-۲ و نتیجه ۲ در [۱] برای نگاشت‌های مجموعه مقدار با مقادیر در فضاهای توپولوژیک (نه لزوماً برداری توپولوژیک یا برداری توپولوژیک موضعاً محدب) با شرایط ضعیف‌تر می‌باشد. در سراسر این بخش فرض کنید X فضای برداری توپولوژیک هاسدورف و Y فضای توپولوژیک هاسدورف است.
قضیه زیر شرایط کافی برای اینکه مجموعه جواب GIVEP ناتهی و فشرده باشد را برای نگاشت‌های مجموعه مقدار با مقادیر در فضاهای توپولوژیک ارائه می‌کند.

قضیه۲-۱. فرض کنید K زیرمجموعه محدب و ناتهی از X و $h: K \longrightarrow K$ یک نگاشت و $F: K \times K \longrightarrow 2^Y$ و $S: K \longrightarrow 2^Y$ نگاشت‌هایی مجموعه مقدار باشند، به‌طوری که به ازای هر $x \in K$، $S(x)$ باز باشد. همچنین فرض کنید شرایط زیر برقرار باشند:

الف) به ازای هر $y \in K$، نگاشت مجموعه مقدار

$x \longrightarrow F(h(x), y)$

نیم‌پیوسته بالایی با مقادیر فشرده است؛

ب) نگاشت $x \longrightarrow Y \backslash S(x)$، نیم‌پیوسته بالایی است؛

ج) $F(h(x), x) \nsubseteq S(x), \forall x \in K$؛

د) برای هر $x \in K$، مجموعه زیر محدب است؛

$$\{y \in K : F(h(x), y) \subseteq S(x)\}$$

آنگاه مجموعه جواب $GIVEP$ ناتهی است؛ یعنی $x^* \in K$ موجود است به‌طوری که

$$F(h(x^*), y) \nsubseteq S(x^*), \forall y \in K.$$

بعلاوه اگر شرط زیر برقرار باشد، مجموعه جواب فشرده است:

ه) زیرمجموعه محدب، فشرده و ناتهی B از K موجود باشد به‌طوری که برای هر $x \in K \backslash B$، $y \in B$ موجود باشد که

$$F(h(x), y) \subseteq S(x)$$

قضیه ۲-۲. فرض کنید K زیرمجموعه محدب و ناتهی از فضای برداری توپولوژیک هاسدورف X و $S: K \to 2^Y$ نگاشت مجموعه مقدار باشد که در آن Y فضای توپولوژیک است. نگاشت مجموعه مقدار $F: K \times K \to 2^Y$ و نگاشت تک مقداری $g: K \to K$ در شرایط زیر صدق کنند:

الف) برای هر $x \in K$، $F(g(x), x) \cap S(g(x)) \neq \emptyset$؛

ب) برای هر $x \in K$، $\{y \in K : F(x, y) \cap S(x) = \emptyset\}$

محدب است؛

ج) برای هر $x \in K$، مجموعه زیر بسته است:

$$\{x \in K : F(g(x), y) \cap S(g(x)) \neq \emptyset\};$$

د) مجموعه محدب و فشرده D و مجموعه فشرده M از K موجود است به‌طوری که

$$\forall x \in K \backslash M, \exists y \in D, F(x, y) \cap S(x) = \emptyset.$$

آنگاه $x \in K$ موجود است به‌طوری که مجموعه زیر ناتهی و فشرده است:

$$\{x \in K : F(x, y) \cap S(x) \neq \emptyset, \forall y \in K\},$$

۳. نتیجه‌گیری

این مقاله قضایایی وجودی برای مسائل تعادل برداری ضمنی را برای توابع مجموعه مقدار که برد آنها زیرمجموعه ای از فضای توپولوژیک می‌باشد را ارائه می‌دهد. همچنین شرایطی که این مجموعه جوابها فشرده و محدب هستند را فراهم می‌کند. نتایج این مقاله را می‌توان به عنوان تعمیم و حذف فرضیاتی از نتایج موجود در مقالات [۵و۸] در نظر گرفت.

منابع

[1] Q.H. Ansari, W. Oettli, D. SchlOager, A generalization of vector equilibria, Math. Methods Oper. Res 46 (1997) 147–152.

[2] E. Blum and W. Oettli, *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Student 63 (1-4) (1994) 123–145.

[3] K. Fan, Some properties of convex sets related to fixed point theorems. Math. Ann 266 (1984) 519–537.

[4] N. Hadjisavvas, S. Schaible, From scalar to vector equilibrium problems in the quasimonotone case, J. Optim. Theory Appl 96 (2) (1998) 297–309.

[5] N.J. Huang, J. Li, H.B. Thompson, Implicit vector equilibrium problems with applications. Math. Comput. Model 37 (2003) 1343–1356.

[6] M.A. Noor, W. Oettli, On generalized nonlinear complementarity problems and quasi equilibria, Matematiche 49 (1994) 313–331.

[7] Promsinchai, P., Farajzadeh, A., and Petrot, N., *Stochastic Heavy-Ball Method for Constrained Stochastic Optimization Problems*, Acta Mathematica Vietnamica, 2020, **45**, P.501–514.

[8] T. Rama, A. K. Khannaa, On Generalized Implicit Operator Equilibrium Problems, Filomat 33:12 (2019) 3823–3831.

[9] W. Song, On generalized vector equilibrium problems, J. Compu. Appl. Math 146 (2002) 167–177.

[10] N.X. Tan, Quasi-variational inequalities in topological linear locally convex Hausdorff spaces. Math. Nachr 122 (1985) 231–245.

[11] X.Z. Yuan, KKM Theory and Applications in Nonlinear Analysis. Dekker, New York, 1999.