کاربردهای الگوریتم ژنتیک فازی در حل مسائل بهینه‌سازی فازی

عباس اکرمی [۱،*]

گروه ریاضی دانشگاه زابل

چکیده

در این مقاله الگوریتم‌های ژنتیک فازی را برای حل مسائل بهینه‌سازی فازی بررسی کرده و نشان می‌دهیم که این روش یک تقریب خوب از جوابهای یک مسئله بهینه‌سازی فازی را تولید می‌کند. همچنین کاربرد این الگوریتم را در مسئله شار فازی، رگرسیون فازی و یک کنترل‌کننده فازی نشان می‌دهیم.

کلمات کلیدی: الگوریتم ژنتیک، بهینه‌سازی فازی، برنامه‌ریزی خطی فازی، رگرسیون فازی

۱. مقدمه

الگوریتم‌های ژنتیک به عنوان یک روش جستجوی تصادفی در حوزه‌های وسیعی کاربرد دارند. [1] ، [2] و [3]. تکنیک جستجو در علم رایانه برای یافتن راه‌حل تقریبی برای بهینه‌سازی مدل، ریاضی و مسائل جستجو است. الگوریتم ژنتیک نوع خاصی از الگوریتم‌های تکاملی است که از تکنیک‌های زیست‌شناسی فرگشتی مانند وراثت، جهش زیست‌شناسی و اصول انتخابی داروین برای یافتن فرمول بهینه جهت پیش‌بینی یا تطبیق الگو استفاده می شود. الگوریتم‌های ژنتیک اغلب گزینه خوبی برای تکنیک‌های پیش‌بینی بر مبنای رگرسیون هستند. در مدل‌سازی الگوریتم ژنتیک یک تکنیک برنامه‌نویسی است که از تکامل ژنتیکی به عنوان یک الگوی حل مسئله استفاده می‌کند. مسئله‌ای که باید حل شود دارای ورودی‌هایی می‌باشد که طی یک فرایند الگوبرداری شده از تکامل ژنتیکی به راه‌حل‌ها تبدیل می‌شود سپس راه حل‌ها به عنوان کاندیداها توسط تابع برازش یا تابع برازندگی مورد ارزیابی قرار می‌گیرند و چنانچه شرط خروج مسئله فراهم شده باشد الگوریتم خاتمه می‌یابد. به‌طور کلی یک الگوریتم مبتنی بر تکرار است که اغلب بخش‌های آن به صورت فرایندهای تصادفی انتخاب می‌شوند که این الگوریتم‌ها از بخش‌های تابع برازش، نمایش، انتخاب و تغییر تشکیل می‌شوند. در [4] نویسندگان از شبیه سازی فازی برای حل یک مسئله بهینه سازی فازی استفاده کرده‌اند. در [5]، [6] و [7] نویسندگان مسائل بهینه‌سازی فازی با اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای و متغیرهای غیرفازی حل کرده‌اند. در این مقاله یک الگوریتم ژنتیک فازی برای حل مسائل بهینه‌سازی فازی ارائه می‌شود. همچنین کاربرد این الگوریتم در چند مسئله مهم بررسی شده‌است.

* Corresponding author: توضیحات مربوط به نویسنده اوّل
Email:

۲. الگوریتم ژنتیک فازی

در این بخش تعاریف و نمادهایی که در مقاله استفاده شده‌اند را معرفی می‌کنیم.

تابع F را به صورت زیر در نظر بگیرید: [8]

$$Y = F(X)$$

که X یک زیر مجموعه فازی از بازه $U>0,[0,U]$، است. هدف یافتن X^*، نقطه ماکزیمم تابع، در بازه $[0,U]$ است. برای این منظور فرض کنید $\mu(Y)=\eta$ که تابع اندازه μ هر مجموعه فازی را به مجموعه اعداد حقیقی می‌برد. حال بایستی X^* را طوری بیابیم که η ماکزیمم شود.

برای استفاده از الگوریتم ژنتیک فازی ابتدا باید مجموعه‌های فازی X را گسسته سازی نماییم. لذا فرض کنید N یک عدد صحیح مثبت باشد. قرار می‌دهیم $v_0=0$ بنابراین

$$v_i = i.\frac{U}{N}, i=1,2,...,N;\ X=(x_0,x_1,...,x_N),$$

که $x_i = X(v_i), i=0,1,...,N$. اکنون با به‌کاربردن شکل گسسته X را برای F، η را به‌دست می‌آوریم. لذا F یک نگاشت از بازه $[0,1]^{N+1}$ را به مجموعه اعداد حقیقی خواهد بود. حال بردار σ را در $[0,1]^{N+1}$ طوری به‌دست می‌آوریم که η ماکزیمم شود. الگوریتم زنتیک فازی به صورت زیر است:

I. تولید جمعیت اولیه تصادفی به اندازه n از $[0,1]^{N+1}$، فرض کنید:

$$X_1=(x_{10},x_{11},...,x_{1n}),\ldots,X_n=(x_{n0},x_{n1},...,x_{nN}), x_{ij}\in[0,1].$$

II. محاسبه η_i $(i=1,2,...,n)$.

فرض کنید $S=\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n$، همچنین مجموع‌های جزئی عبارتند از:

$$S_k=\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_k, k=1,2,...,n.$$

زیر بازه‌های I_i را به صورت زیر می‌سازیم.

$$I_1=[0,S_1), I_i=[S_{i-1},S_i), i=2,...,n,$$
$$I_n=[S_{n-1},S_n].$$

III. ایجاد یک جمعیت جدید. فرض کنید w_i $(1\le i\le n)$ یک عدد تصادفی در بازه $[0,T]$ است. اگر $w_i\in I_i$، آنگاه X_i را طوری انتخاب می‌کنیم که در جمعیت جدید (P_i) باشد.

IV. جفت‌گیری. هر جفت (P_1,P_2) و (P_3,P_4) دو نوزاد با تقاطع تولید می‌کنند. فرض کنید p $(0\le p\le 1)$ احتمال یک تقاطع باشد اکنون جفت گیری P_1 و P_2 را شرح می‌دهیم:

فرض کنید $x\in[0,1]$، اگر $x\le p$ آنگاه عمل تقاطع روی P_1 و P_2 انجام می‌شود. در غیر اینصورت $(x>p)$ هیچ‌گونه تغییری انجام نمی‌شود. حال فرض کنید عمل تقاطع انجام شود $(x\le p)$. اگر $r=3$ یک عدد تصارفی بین 0 و $N-1$ باشد آنگاه عمل تقاطع از والدین

$$P_1=(p_{10},p_{11},p_{12},p_{13},*,*,...), P_2=(p_{20},p_{21},p_{22},p_{23},\square,\square,...)$$

به فرزندان زیر انجام می‌شود:

$$P_1'=(p_{10},p_{11},p_{12},p_{13},\square,\square,...), P_2'=(p_{20},p_{21},p_{22},p_{23},*,*,...)$$

عمل تقاطع را روی تمام جفت‌های (P_i,P_{i+1}) انجام می‌دهیم و جمعیت جدید P_1'، P_2' و ... از فرزندان

ایجاد می‌شود. اگر $x > p$، آنگاه $P_i' = P_i$ و $P_{i+1}' = P_{i+1}$.

V. جهش. فرض کنید $q\ (0 \le q \le 1)$ احتمال یک جهش باشد. عمل جهش روی هر فرزند P_i' انجام می‌شود. اگر $w_i \in [0,1]\ (0 \le i \le N)$ یک عدد تصادفی و $w_i \le q_i$ آنگاه iامین جایگاه در P_i' جهش می‌یابد. بعد از اینکه جهش روی همه اعضای جمعیت جدید کامل شد آنگاه X_i با $P_i'(1 \le i \le N)$ شناخته شده و سپس به مرحله II می‌رویم.

VI. تکرار مرحله II تا V به تعداد M بار انجام می‌گردد که M ماکزیمم تعداد تکرارها است. حال ماکزیمم مقدار η با الگوریتم ژنتیک تعیین می‌شود.

۳. نتایج عددی

در این بخش از الگوریتم ژنتیک فازی برای محاسبه جواب تقریبی یک مسئله بهینه سازی فازی استفاده می‌کنیم.

مثال ۱. مسئله بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\max Y = X(1-X)$$

که X یک زیرمجموعه فازی از بازه $[0,1]$ است. قرار می‌دهیم $\mu(Y) = \eta$ حال میخواهیم X را طوری بیابیم که η ماکزیمم شود. فرض کنید X یک زیر مجموعه فازی گسسته از بازه $[0,1]$ باشد. داریم:

$$X(v_i) = x_i; v_i = \frac{i}{N}, i = 0,1,2,\dots,N.$$

حال الگوریتم ژنتیک فازی را برای مسئله به‌کار می‌بریم:

i. اندازه جمعیت را برابر ۱۰۰ در نظر می‌گیریم.

ii. احتمال تقاطع، $p = 0.60$ قرار می‌دهیم.

iii. احتمال جهش، $q = 0.03$ یا $q = 0.003$.

iv. حداکثر تعداد تکرارها، $L = 10000$.

v. شکل گسسته بازه $[0,1]$ به صورت زیر است:

$$v_0 = 0, v_1 = 0.1, \dots, v_{10} = 1, (N = 10)$$

نتایج در جدول ۱ نشان داده شده‌اند:

v_i	$X(v_i)$	
	$q = 0.03$	$q = 0.003$
0.0	0.95	0.90
0.1	0.02	0.00
0.2	0.04	0.06
0.3	0.21	0.02
0.4	0.69	0.01
0.5	0.10	0.06
0.6	0.37	0.79
0.7	0.05	0.05
0.8	0.10	0.01
0.9	0.03	0.01
1.0	0.95	0.89
$\max(\eta)$	0.4263	0.4691

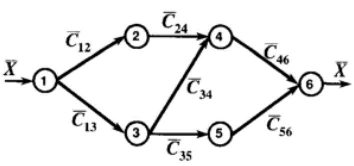
جدول ۱. جواب تقریبی مثال ۱ با الگوریتم ژنتیک فازی

۴. کاربردهای الگوریتم ژنتیک فازی

در این بخش سه کاربرد الگوریتم ژنتیک فازی را شرح می‌دهیم.

۱. مسئله ماکزیمم شار فازی[9]

مسئله ماکزیمم شار یک مسئله بهینه‌سازی شبکه مشهور است. [12] شبکه فازی شکل ۱ را در نظر بگیرید. اعداد $\bar{C}_{ij}$ فازی مثلثی نامنفی هستند که حداکثر جریان روی قطعه منحنی از گره i تا گره j را نشان می‌دهند.



شکل ۱. مسئله ماکزیمم شار فازی

فرض کنید $\bar{X}_{ij}$ اعداد فازی نامنفی هستند به طوری که روی تمام قطعه منحنی‌ها داریم: $\bar{X}_{ij} \le \bar{C}_{ij}$.

فرم ریاضی مسئله به صورت زیر است:

$$\max \bar{X}$$
$$s.t.$$
$$\bar{X} = \bar{X}_{12} + \bar{X}_{13},$$
$$\bar{X}_{24} = \bar{X}_{12},$$
$$\bar{X}_{13} = \bar{X}_{34} + \bar{X}_{35},$$
$$\bar{X}_{46} = \bar{X}_{24} + \bar{X}_{34},$$
$$\bar{X}_{56} = \bar{X}_{35},$$
$$\bar{X} = \bar{X}_{46} + \bar{X}_{56},$$
$$0 \le \bar{X}_{ij} \le \bar{C}_{ij}.$$

محدودیت $\bar{X}_{13} = \bar{X}_{34} + \bar{X}_{35}$، در گره ۳ بیان کننده این است که شار ورودی به گره ۳ و شار خروجی از آن با هم برابرند. هیچ گونه جریانی در شبکه کم یا زیاد نمی‌شود. حال راه حل مسئله را بررسی می‌کنیم:

فرض کنید $U_1 > 0$ به طوری که اگر $\bar{X}_{13} \subseteq [0, U_1]$ یک مجموعه فازی باشد آنگاه $\bar{X}_{13} \le \bar{C}_{13}$. حال $U_2 > 0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\bar{X}_{12} \subseteq [0, U_2]$، لذا $\bar{X}_{12} \le \bar{C}_{12}$ و $\bar{X}_{12} \le \bar{C}_{24}$.

بالاخره $U_3 > 0$ را به گونه‌ای اختیار می‌کنیم که $\bar{X}_{35} \subseteq [0, U_3]$، در نتیجه $\bar{X}_{35} \le \bar{C}_{35}$ و $\bar{X}_{35} \le \bar{C}_{56}$. اکنون تابع جریمه را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$\Omega_1 = \bar{C}_{34} - (\bar{X}_{13} - \bar{X}_{35}),$$
$$\Omega_2 = \bar{C}_{46} - (\bar{X}_{12} + \bar{X}_{13} - \bar{X}_{35}),$$
$$\Omega_3 = \bar{X}_{13} - \bar{X}_{35}.$$

بنابراین مسئله به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\max(\bar{X} + \Psi_1 \Omega_1 + \Psi_2 \Omega_2 + \Psi_3 \Omega_3)$$

حال الگوریتم ژنتیک فازی را برای حل مسئله بهینه‌سازی فازی به کار می‌بریم. ابتدا η را تشکیل می‌دهیم و بازه‌های $U_i(i=1,2,3)$ را گسسته‌سازی کرده و الگوریتم را اجرا می‌کنیم.

۲. رگرسیون فازی. یک مسئله شناسایی سیستم را در نظر بگیرید. برخی داده‌های ورودی X_i و خروجی Y_i از تابع H را می‌دانیم، در صورتی که از ساختار دقیق H اطلاعی نداریم. لذا H یک تابع مجهول است و داریم:

$$Y_i = H(X_i), i=1,2,\dots,n.$$

حال رابطه خطی $Y = AX + B$ برای مجموعه‌های فازی مجهول A و B را در بازه‌های خاص در نظر بگیرید. هدف برازش داده‌ها با این معادله است. می‌خواهیم A و B را به قسمی بیابیم که در رابطه زیر خطا می‌نیمم شود:

$$W_i = AX_i + B, i=1,2,\dots,n.$$

اگر $d(Y_i, W_i)$ اندازه فاصله بین دو مجموعه فازی W_i و Y_i باشد آنگاه رابطه خطای اندازه عبارت است از:

$$E = \sum_{i=1}^{n} d(Y_i, W_i)$$

که بایستی آن را می‌نیمم کنیم. الگوریتم ژنتیک فازی برای مسئل از نوع ماکزیمم‌سازی است لذا تغییر متغیر زیر را انجان داده و η را ماکزیمم می‌کنیم:

$$\eta = M - E, M > 0.$$

فرض می‌کنیم $A \subseteq [0, M_1], M_1 > 0$ و $B \subseteq [-M_2, M_2], M_2 > 0$. بازه‌های $[-M_2, M_2]$ و $[0, M_1]$ را گسسته‌سازی نموده و الگوریتم ژنتیک فازی را به‌کار می‌بریم. این الگوریتم را می‌توان برای رگرسیون چندجمله‌ای فازی زیر و مدل‌های تابعی دیگر در رگرسیون تعمیم داد:

$$Y = AX^2 + BX + C$$

۳. کنترل کننده فازی. فرض کنید کنترل کننده دارای دو ورودی شامل خطا (e) و تغییرات خطا (Δe) و یک خروجی غیرفازی δ می‌باشد. متناظر با e و Δe سه متغیر مشخص منفی، صفر و مثبت در بازه $[-1,1]$ وجود دارد. مجموعه‌های فازی متناظر با این متغیرها می‌توانند هر زیر بازه فازی از $[-1,1]$ باشند.

فرض کنید $\Delta e = \Delta e_i, e = e_i$ ورودی‌ها و δ_i^* کنترل کننده خروجی باشد. همچنین از $\overline{F}$ برای حالت منفی، $\overline{Z}$ صفر و از $\overline{P}$ برای حالت مثبت استفاده می‌کنیم. هدف یافتن زیرمجموعه‌های فازی $\overline{F}$، $\overline{Z}$ و $\overline{P}$ از $[-1,1]$ است به طوری که رابطه خطای زیر می‌نیمم شود:

$$E = \sum_{i=1}^{n} (\delta_i - \delta_i^*)^2$$

برای مقادیر به اندازه کافی بزرگ M قرار می‌دهیم: $\eta = M - E$ و بازه $[-1,1]$ را گسسته سازی می‌کنیم. با استفاده از الگوریتم ژنتیک فازی مسئله راحل می‌کنیم.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله یک الگوریتم ژنتیک فازی برای حل یک مسئله بهینه‌سازی فازی ارائه شده است. نشان دادیم می‌توان با این الگوریتم یک تقریب خوب از جواب مسئله به‌دست آورد. همچنین این الگوریتم را برای حل مسئله ماکزیمم شار فازی، رگرسیون فازی و یک کنترل کننده فازی به کار بردیم. اساس کارالگوریتم‌های ژنتیک فازی گسسته‌سازی زیرمجموعه‌های فازی یک بازه است. این الگوریتم‌ها روشی جالب برای تولید جواب تقریبی مسائل بهینه‌سازی فازی هستند که متغیرهای آنها زیرمجموعه‌های فازی دلخواه از بازه‌های خاص هستند و می‌توان آنها را برای رده وسیعی از مسائل به کار برد.

۶. مراجع

[1] L.Davis, Handbook of Genetic Algorithm (*Van Nostrand Reinhold*, *New York*, 1991)

[2] D.E. Goldberg, Genetic Algorithms in search, Optimization and machine learning, *Addison Wesley Reading*, 1989.

[3] R.Serra, G.Zanarini, Comlex systems and cognitive processes, *Springer verlag*, *Berlin*, 1990.

[4] J.J. Buckley, Y. Hayashi, Applications of fuzzy chaos simulation, Fuzzy Sets and Systems,

[5] C.L. Karr, D.A., Stanley, Fuzzy Logic and genetic algorithms in time varying controll problems, *Fuzzy Information Processing Society*, pp. 285-290, 1991.

[6] H. Nomura and et all., A self tuning method of fuzzy reasoning by genetic algorithm, *Fuzzy systems and intelligent control*, pp.236-245, 1992.

[7] R.Wiggins, A genetic fuzzy approach, *Al Expert*, pp.28-35, 1992.

[8] J.J. Buckley, Y. Hayashi, Fuzzy genetic algorithm and applications, *Fuzzy sets and systems*, pp.129-136, 1994.

[9] H.A., Taha, Operatin Research, Fifth edition, New York, 1992.