

بررسی حل مسئله بازسازی تصویر در CT با منظم سازی تغییرات کل

عبدالرازق رحمانی^۱، مهدی میرزاپور^۲

۱- دانشجو کارشناسی ارشد، دانشگاه بوعلی سینا، همدان

Raziqrahmani23@yahoo.com

۲- استادیار گروه ریاضی، دانشگاه بوعلی سینا، همدان، ایران

چکیده

مسئله بازسازی تصویر پس از گسسته سازی به یک دستگاه معادلات خطی بد وضع، دارای نویز، بدون ساختار و با ابعاد بزرگ تبدیل می‌شود. با توجه به وجود نویز در بردار سمت راست مسئله فوق، روش‌های تکراری جبری بعد از چند تکرار از جواب اصلی فاصله گرفته و به جواب کمترین مربعات آن همگرا می‌شود. یک روش متداول برای کنترل اثر نویز، استفاده از یک جمله منظم‌ساز در تابع هدف است. گزینه‌های بسیار زیادی برای انتخاب جمله منظم‌ساز وجود دارد. در این مقاله از تابع ناهموار منظم‌ساز تغییرات کل را در نظر گرفته و با استفاده از یک جایگزین درجه دوم جدایی‌پذیر تابع هدف خود را به یک مسئله محدب تبدیل می‌کنیم. با استفاده از جایگذاری‌های مناسب، مسئله بهینه‌سازی حاصل را یک دستگاه معادلات خطی زیر معین تبدیل کرده و با استفاده از روش‌های بازسازی جبری تکراری بلوکی^۱ TV-RSART جواب دستگاه معادلات حاصل را به دست می‌آوریم. همچنین با تعریف یک تابع طول گام مناسب، روش Acc-TV-RSART را که دارای همگرایی سریع‌تری است معرفی می‌کنیم. در پایان با استفاده از داده‌های توموگرافی کامپیوتری کارایی هر یک از روش‌های فوق را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

کلمات کلیدی: بازسازی، تغییرات کل، منظم‌سازی، مشتق‌پذیر، همگرایی.

1. مقدمه

سیستم معادلات خطی $y = Af$ را در نظر می‌گیریم که در آن ماتریس $A: R^N \rightarrow R^{MP}$ تعریف گردیده است. این مدل سیستم از بازسازی تصویر $f \in R^N$ ، از گسسته سازی N پیکسل با استفاده از مجموعه M تابش اندازه‌گیری شده با P پیکسل حاصل می‌گردد. بردار داده‌ها $y = (y_1, y_2, \dots, y_M)$ از M تابش‌ها همراه با $y_j \in R^P$ برای هر $j = 1, 2, \dots, M$ به دست می‌آید [7]. با فرض این‌که توزیع گوسین اندازه‌گیری شده، جریمه کمترین مربعات وزنی زیر حاصل می‌گردد.

$$f_{\beta}^* = \arg \min_{f \in R^N} \Phi(f) \quad (2)$$

¹ Total Variation Regularized SART

که تابع هزینه زیر را به حداقل می‌رساند

$$\Phi(f) = \left\| \frac{y - Af}{\sigma} \right\|^2 + \beta P(f) \quad (3)$$

جمله اول رابطه (۳) را جمله تطابق داده‌ها و جمله دوم آن را جمله منظم‌ساز با پارامتر منظم‌ساز $\beta > 0$ می‌گویند. در قسمت تابع منظم‌ساز از تابع تغییرات کل استفاده می‌نماییم که می‌کوشد فاصله هر پیکسل با پیکسل سمت راست و پیکسل پایینش کمترین مقدار ممکن باشد. تابع TV را همراه با جایگزین (۴) تعویض می‌کنیم که این جایگزین P_{sur} قابلیت جدایی‌پذیری به‌عنوان مجموعه شرایط وابسته به یک پارامتر f_i را دارا است و این ویژگی باعث می‌گردد که بتوانیم از الگوریتم تکراری بلوکی استفاده کنیم.

$$P_{sur}(f, \hat{f}) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\varepsilon^2 + \sum_{j \in B_i} \left\{ (f_i - f_j)(\hat{f}_i - \hat{f}_j) + (\hat{f}_j - f_j)^2 + (\hat{f}_i - f_i)^2 \right\}}{|\nabla_i \hat{f}|} \right) \quad (4)$$

برای این که رابطه (۴) مشتق‌پذیر گردد ε را اضافه نمودیم. برای مقادیر بزرگ ε و $P(f)$ با حفظ لبه‌ها تصویر جریمه‌های مانند جریمه هابر و جریمه تیلت پیشنهاد می‌گردد [7].

روش‌های بهینه‌سازی متنوعی برای حل مسئله مینیمم سازی با منظم‌ساز TV پیشنهاد شده است که این روش‌ها بیشتر مسئله را به صورت تقریب احتمالی تابع جریمه [2] و یا به صورت مینیمم سازی TV [5] و یا به صورت الگوریتم‌های برتر سازی ارائه کرده‌اند. هر کدام از این روش‌ها دارای معایب و محاسنی می‌باشند. یک روش برای بهینه‌سازی مسئله فوق که در این مقاله با جزئیات به آن می‌پردازیم، الگوریتم جایگزینی درجه دوم از TV است. در این روش تابع TV با یک تابع جایگزین مشتق‌پذیر درجه دوم مانند SQS² جایگزین می‌شود. در این صورت می‌توان مسئله بهینه‌سازی فوق را به یک دستگاه معادلات خطی تبدیل کرد. دستگاه معادلات به دست آمده را با یک روش تلفیقی تکراری، که شامل تکرارهای خارجی و داخلی است، حل می‌کنیم. در این مقاله با تعریف یک تابع طول گام مناسب، روش Acc-TV-RSART را که دارای همگرایی سریع‌تری است معرفی می‌کنیم. در پایان با استفاده از داده‌های توموگرافی کامپیوتری کارایی هر یک از روش‌های فوق را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲. الگوریتم SART با منظم‌ساز TV

در این بخش مسئله (۲) و تابع جایگزین (۴) را در نظر گرفته و مسئله بهینه‌سازی (۲) را به یک دستگاه معادلات تبدیل می‌کنیم که فرم ماتریسی آن عبارت است از:

$$y - Az = \begin{bmatrix} AW & D \\ & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ n \end{bmatrix} \quad (5)$$

همراه با ماتریس قطری D ، $MP \times MP$ با درایه‌های

$$D_{(j,p),(j',p')} = \delta_{j,j'} \delta_{p,p'} \sqrt{\beta} \delta_{j,p} \quad (6)$$

² Separability Quadratic Surrogate

این سیستم (۶) سازگار است زیرا

$$\begin{aligned}
 y - Az &= [AW \quad D] \begin{bmatrix} h \\ n \end{bmatrix} \Rightarrow y - Az = AWh + Dn \\
 &\Rightarrow y - Az - AWh = Dn \\
 &\Rightarrow n = D^{-1}(y - Az - AWh)
 \end{aligned} \tag{7}$$

در نتیجه $(h, D^{-1}(y - Az - AWh))$ یک جواب برای هر بردار h است. جواب کمترین نرم را از سیستم معادلات خطی سازگار با تخمین اولیه $(h^0, n^0) = 0$ با استفاده از الگوریتم SART می‌توانیم به دست آوریم. SART یک روش تکراری بلوکی است و انتخاب طبیعی برای CT با در نظر گرفتن M بلوک‌ها متناظر با تابش‌ها y_1, y_2, \dots, y_m همراه $J(s) = j$ که از تاش حاصل شده است؛ مانند تعریف شده (۳) تکرار SART تخمین جواب فعلی (h^s, n^s) را در S تکرار به سوی تکرار بعدی (h^{s+1}, n^{s+1}) سوق می‌دهد. عبارت است از:

$$\begin{aligned}
 h^{s+1} &= h^s + WW^t A_j^t C_j^{-1} (y_j - A_j z - A_j W h_j^s - D_j n_j^s) \\
 &= n_j^s + W D_j C_j^{-1} (y_j - A_j z - A_j W h_j^s - D_j n_j^s) \\
 n_j^{s+1} &= n_j^s \quad j' \neq j
 \end{aligned} \tag{8}$$

همراه با $j = J(s)$ و D_j یک ماتریس قطری $P \times P$ از بلوک j -ام ماتریس است. با تعریف مجدد و مناسب (۸) معادل است با معادلاتی که نیترو و ویبلنگ [3] تعریف کرده است. الگوریتم (۸) با مقداردهی اولیه $h^0 = n^0 = 0$ به جواب کمترین نرم از (۷) همگرا می‌گردد. اگر $0 < \omega < 2$ و ماتریس تخفیف $P \times P$ ، C_j در رابطه زیر صدق کند

$C_j \geq A_j W W^t A_j^t + D_j^2$ منظم سازی TV-RSART با به‌روزرسانی بیان مجدد نگاشت تکراری (۸) از نظر f به دست می‌آید و $\hat{f}^s = W h^s + z$ تخمین شده از تصویر در تکرار s -ام است. یک متغییر جدید $\rho \rho^s = y - D n^s$ تعریف می‌کنیم.

با اضافه کردن تسریع‌کننده

$$\sigma_{\max} = \frac{\sum_{t=1}^E \omega_t \left(\sum_{i=1}^{m_t} \left(\frac{1}{\alpha_i} - \frac{1}{2} \right) \|y^i\| + \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^{m_t} y^i \right\|^2 \right)}{\|T(f) - f\|^2} \tag{9}$$

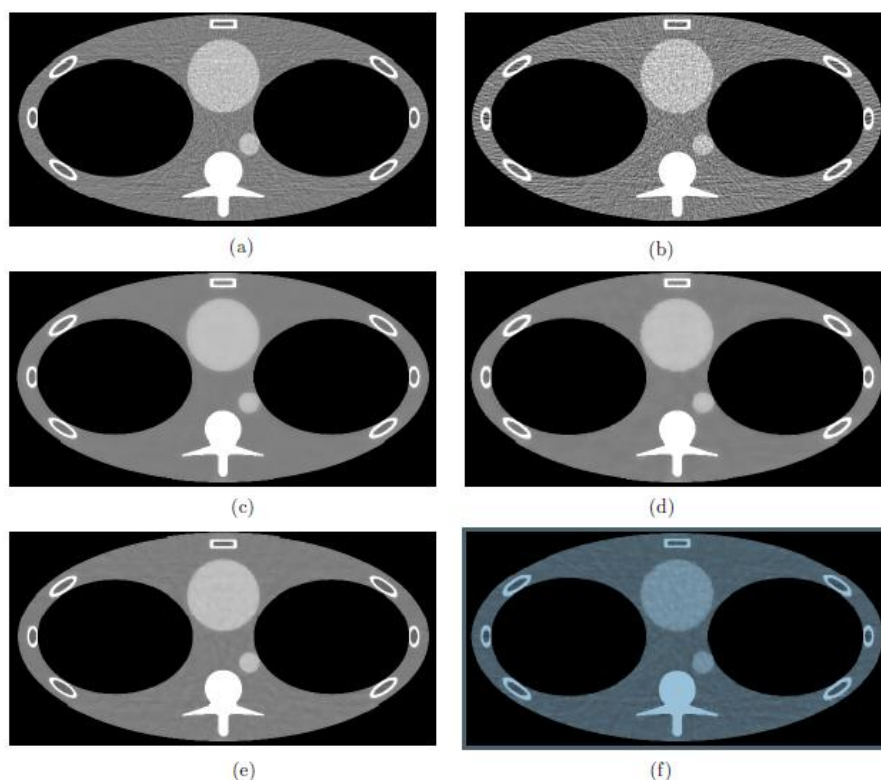
که در آن $f \in H$ یک نقطه ثابت در فضای هیلبرت، $T(f) = f + \frac{\alpha}{\rho(A^T M A)} A^T M (y - A f)$ ، پارامتر α

تخفیف و M ماتریس متقارن معین مثبت است.

در الگوریتم TV-RSART؛ بنابراین الگوریتم ما را سریع‌تر به سمت جواب سوق می‌دهد و در قسمت نتایج عددی نتایج عددی این الگوریتم تسریع‌کننده را با الگوریتم TV-RSART مقایسه نمودیم [8].

۳. نتایج عددی TV-RSART

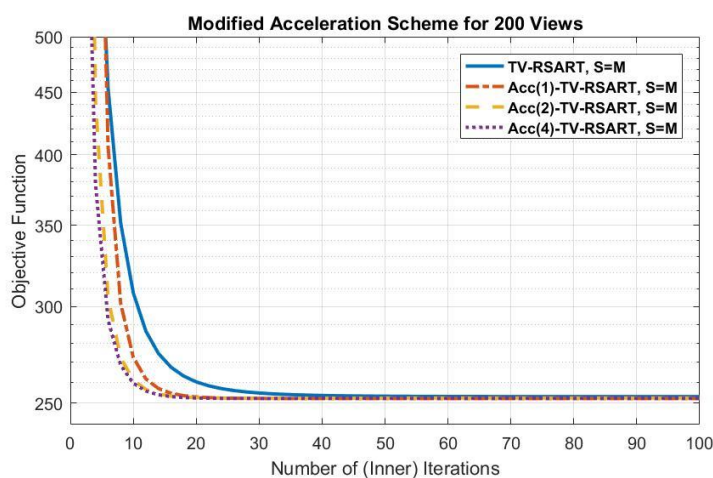
الگوریتم TV-RSART با کاربرد در CT با پرتو مخروطی ایجاد می‌شود که در آن از روش‌های تکراری بلوکی (عمل سطری با عمل تابش) برای پردازش عملی مجموعه داده‌ها بسیار بزرگ مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این بخش یک مسئله دوبعدی را در نظر می‌گیریم که امکان تجزیه و تحلیل همگرایی و پایداری با انجام تعداد زیادی تکرار را فراهم می‌سازد. دوباره تأکید می‌کنم که هدف از آزمایش‌های عددی ارزیابی مزایای منظم سازی TV برای مسائل بازسازی تصاویر بالینی خاص، در مقایسه با الگوریتم‌های تحلیلی مانند بازتابش فیلتر شده است. به همین دلیل است که اثرات فیزیکی مثل پراکنده کردن و چندرنگی در نظر گرفته نمی‌شود. با داده‌های پرتو موازی دوبعدی یک بُرش از یک قطعه فانتوم قفسه سینه را شبیه‌سازی می‌کنیم. این فانتوم بیضوی دارای قطر خارجی برابر با 400 و 200 میلی‌متر است، با ضرایب میرایی (کاهش خطی) برابر با $0.017mm^{-1}$ در پس‌زمینه و $0.044mm^{-1}$ در ریه‌ها است. تصویر در یک شبکه 600×600 به اندازه پیکسل $\Delta = 0.7mm$ دیجیتالی شده است. این داده‌ها شامل $M = 200$ یا $M = 600$ نماهای زاویه با فاصله یکنواخت از $[0, \pi]$ و برای هر نمونه زاویه از $P = 600$ خطوط پاسخ موازی $LORs^3$ با نمونه‌برداری شعاعی Δ . هر LOR به صورت میانگین سه انتگرال خطی تحلیلی از طریق فانتوم محاسبه می‌شود، به طوری که اندازه محدود آشکارساز را شبیه‌سازی می‌کند و نویز پواسون با 3×10^5 فوتون به ازای هر LOR اضافه می‌شود [7].



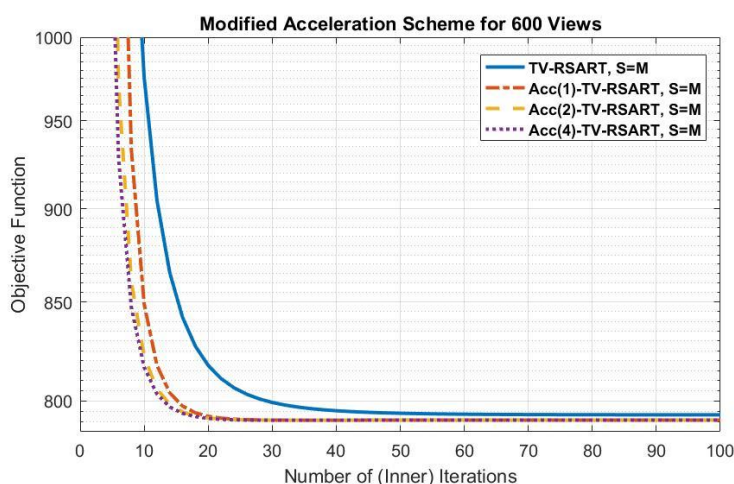
شکل ۱- بازسازی فانتوم قفسه سینه از داده‌های نویزی دوبعدی با مقیاس خاکستری $[0.0153, 0.0187]mm^{-1}$ بازتابش فیلتر شده. (a) $M = 600$ بازتابش فیلتر شده. (b) $M = 200$ بازتابش فیلتر شده. (c) $M = 600$ با TV-RSART 100 تکرار. (d) $M = 200$ با TV-RSART 1000 تکرار. (e) $M = 600$ با TV-RSART 40 تکرار. (f) $M = 200$ با TV-RSART 40 تکرار.

³ Lines of Respond

نتایج برای برآورد حداقل مربعات بدون وزن ($\sigma_z = 1$) و پارامتر منظم سازی TV در معادله (۳) برابر $\beta = 0.25$ و $\beta = 0.08$ برای $M = 200$ و $M = 600$ به ترتیب است. این مقادیر به‌طور تجربی انتخاب شده تا منظم سازی خوبی ارائه دهند؛ اما بهینه‌سازی نشدند. همگرایی برای $\beta = 2.5$ و $\beta = 0.025$ تأیید شده؛ اگرچه تصویر همان‌طوری انتظار می‌رود بیش از حد صاف با نویز دار هستند (نتایج نشان نداده‌اند)؛ مگر این که برخلاف آن مشخص شده باشد، ما با الگوریتم FBP داده‌ها شروع می‌کنیم [4]. برای TV-RSART پارامتر تخفیف $\omega = 1$ است. زمان محاسبه $M = 600$ برای TV-RSART در هر تکرار در مقایسه با 5.85sec FBP 2.10sec است. یکی از معایب عملی TV-RSART این است که نیاز به ذخیره‌سازی یک مجموعه داده‌های کامل $\rho \in R^{MP}$ است. با اضافه کردن یک تسریع کننده در الگوریتم TV-RSART می‌توان جواب‌های بهتری را برای تابع هدف به دست آورد. در این قسمت $M = 200$ و $M = 600$ نماها برای $S = M, S = 2M, S = 5M$ نتایج عددی را به دست آورده و آن را با TV-RSART مقایسه می‌کنیم.



شکل ۲- طرح تسریع کننده اصلاح شده TV-RSART، $M = 200$.



شکل ۳- طرح تسریع کننده اصلاح شده TV-RSART، $M = 600$.

از نتایج عددی معلوم می‌گردد که الگوریتم تسریع کننده TV-RSART جواب‌های بهتر به دست می‌آید [8].

۴. مراجع

- [1] L. Rudin, S. Osher and E. Fatemi, "Nonlinear total variation based noise removal algorithms," *Physica, D* 60 259–68, 1992.
- [2] V. Panin, G. Zeng and G.T. Gullberg, "Total variation regulated EM Algorithm, " *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 46 2202–10, 1999.
- [3] B. Eggermont, P. Herman and A. Lent, "Iterative algorithms for large partitioned linear systems with applications to image reconstruction Linear Algebra," *Appl.* 40 37–67. 1981.
- [4] J. Velikina, S. Leng and G. Chen, "Limited view angle tomographic image reconstruction via total variation Minimization," *Proc. SPIE* 6510 651020, 2007.
- [5] E. Sidky, C. Kao and X. Pan, "Accurate image reconstruction from few-views and limited-angle data in divergent-beam CT," *J. X-Ray Sci. Technol.* 14 119–39, 2006.
- [6] D. Michel, V. Christian and L. Xuan, "An algorithm for total variation regularization in high-dimensional linear Problems," *IOP PUBLISHING*, doi:10.1088/0266-5611/27/6/065002, 2011.
- [7] J. Thibault, K. Sauer, C. Bouman and C. Hsieh, "A three-dimensional statistical approach to improved image quality for multislice helical CT," *Med. Phys.* 34 4526–44. 2007
- [8] T. Nikazad, M. Mirzapour, "Generalized Relaxation Of String Averaging Operators Based On Strictly Relaxed Cutter Operators," *Math.in*, ar Xiv: 1706.06675v1. 2017.