ششمین کنفرانس بین‌المللی
ترکیبیات، رمزنگاری، علوم کامپیوتر و محاسبات
۲۶ و ۲۷ آبان ۱۴۰۰

مونوپلی‌های تام در گراف‌ها

مهسا احمدعلی‌پور[۱]
حسین سلطانی صوفیانی
دانشکده علوم، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران

چکیده

فرض کنید G گرافی ساده باشد و به هر رأس $v \in V(G)$ آستانه $\tau(v)$ تخصیص داده شده که عددی صحیح است و $\circ \leq \tau(v) \leq \deg(v)$. زیرمجموعه S از رئوس گراف را τ-مونوپلی ایستای تام یا به اختصار τ-مونوپلی تام گوییم هرگاه هر رأس $v \in V(G)$ دارای حداقل $\tau(v)$ همسایه در S باشد. در این مقاله مونوپلی تام برای اولین بار به عنوان تعمیمی از مفهوم مونوپلی (مشابه مفهوم مجموعه احاطه‌گر تام به عنوان تعمیمی از مجموعه احاطه‌گر) تعریف می‌شود. NP-کامل بودن مساله یافتن مونوپلی تام در گراف‌ها بیان می‌شود. سپس نشان داده می‌شود مساله یافتن کوچکترین مونوپلی تام در گراف‌ها را می‌توان به یافتن کوچکترین مونوپلی تام در گراف‌های دوبخشی کاهش داد. سپس صورت برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح برای پیدا کردن مونوپلی تام از کوچکترین اندازه ارائه می‌شود. برخی نتایج بدست آمده در مورد مونوپلی پویای بازگشت‌پذیر که برای مونوپلی تام نیز برقرار است، معرفی می‌شوند. از جمله الگوریتمی حریصانه برای بدست آوردن مونوپلی تام ارائه می‌شود که در نتیجه آن کرانی بالا برای مونوپلی تام نیز بدست می‌آید. در ادامه برای برخی خانواده‌های خاص از گراف‌ها مانند دورها، مسیرها و گراف‌های کامل، اندازه کوچکترین مونوپلی تام به صورت دقیق تعیین می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: مونوپلی تام، مونوپلی ایستای بازگشت‌پذیر، برنامه‌ریزی عدد صحیح
[2010]: 68R05, 90C10, 94C15

۱ مقدمه

در این مقاله کلیه گراف‌های مورد بحث گراف ساده می‌باشند. برای گراف $G = (V, E)$ و راس $v \in V$ مجموعه همه همسایه‌های v را با $N_G(v)$ و در صورتی که ابهامی در گراف مورد بحث ایجاد نشود با $N(v)$ نشان می‌دهند. $\deg_G(v) = |N_G(v)|$ و یا معادلا $\deg(v) = |N(v)|$ نشان دهنده درجه راس v می‌باشد. برای گراف داده شده $G = (V, E)$ مجموعه احاطه‌گر زیرمجموعه‌ای مانند S از رئوس گراف است که به ازای هر راس $u \in V \setminus S$ راسی مانند $v \in S$ وجود داشته باشد که $uv \in E$. مجموعه احاطه‌گر تام نیز زیرمجموعه‌ای مانند S از رئوس گراف است که به ازای هر راس $u \in V$ راسی مانند $v \in S$ وجود داشته باشد که $uv \in E$. یعنی در حقیقت شرط احاطه شدن نه تنها فقط برای رئوس خارج از S بلکه برای رئوس خود S نیز باید برقرار باشد. احاطه‌گر تام نخستین بار در [۱] تعریف و در مقالات بسیاری مورد مطالعه قرار گرفت.

مونوپلی ایستا را می‌توان تعمیمی از مجموعه احاطه‌گر به صورت زیر در نظر گرفت [۳]. برای گراف $G = (V, E)$ به هر رأس $v \in V$ آستانه $\tau(v)$ تخصیص داده می‌شود که $\tau(v)$ عدد صحیحی است که $\circ \leq \tau(v) \leq \deg(v)$. زیرمجموعه S از رئوس گراف را τ-مونوپلی ایستا یا به اختصار τ-مونوپلی گوییم هرگاه هر رأس $v \in V \setminus S$ دارای حداقل $\tau(v)$ همسایه در S باشد. شایان ذکر است مفهوم مونوپلی در مقالات تحت عنوان اتحادهای تهاجمی فراگیر نیز مورد مطالعه قرار گرفته است [۶]. در این مقاله مفهوم مونوپلی تام به صورت زیر تعریف و مورد مطالعه قرار می‌گیرد. زیرمجموعه S از رئوس گراف را τ-مونوپلی ایستای تام (یا معادلا مونوپلی ایستای بازگشت‌پذیر) یا به اختصار مونوپلی تام گوییم هرگاه هر رأس $v \in V$ دارای حداقل $\tau(v)$ همسایه در S باشد. اندازه کوچکترین مونوپلی تام گراف G را با نماد $\mathrm{TM}_\tau(G)$ و در صورتی که ابهامی در تابع آستانه τ نباشد با نماد $\mathrm{TM}(G)$ نشان می‌دهیم. اگر آستانه تمامی رئوس گراف را برابر ۱ فرض کنیم، مونوپلی ایستای تام معادل با مجموعه احاطه‌گر تام در گراف‌ها خواهد شد. شایان ذکر است که در مطالعه مونوپلی‌ها اغلب از آستانه اکثریت ساده $\tau(v) = \left\lceil \frac{\deg(v)}{۲} \right\rceil$ و یا اکثریت مطلق $\tau(v) = \left\lceil \frac{\deg(v)+۱}{۲} \right\rceil$ همسایه‌ها به عنوان آستانه رئوس استفاده می‌شود.

[۱] سخنران

مونوپلی تام را همچنین می‌توان حالت خاصی از مونوپلی پویای بازگشت‌پذیر در نظر گرفت که فعال شدن رئوس تنها در یک مرحله انجام می‌شود. برای تعریف مونوپلی پویای بازگشت‌پذیر گراف $G = (V, E)$ با آستانه رئوس τ را در نظر بگیرید. تابع $f_i : V(G) \longrightarrow \{۰, ۱\}$ تابع وضعیت رئوس در مرحله iام فرآیند گسترش تاثیر می‌باشد که $f_i(v) = ۰$ نشان‌دهنده غیرفعال بودن رأس v در مرحله iام و $f_i(v) = ۱$ نشان‌دهنده فعال بودن آن در مرحله iام است. مجموعه رئوس فعال در مرحله iام که با D_i نشان داده می‌شود، مجموعه تمامی رئوسی است که برای آن‌ها داریم $f_i(v) = ۱$. با فرض مشخص بودن وضعیت رئوس در شروع فرآیند یا همان تابع $f_۰$ وضعیت آنها در مرحله iام، $i \geq ۱$ با رابطه بازگشتی به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$f_i(v) = \begin{cases} ۰ & \sum\limits_{u \in N(v)} f_{i-۱}(u) < \tau(v) \\ ۱ & \sum\limits_{u \in N(v)} f_{i-۱}(u) \geq \tau(v) \end{cases}$$

مجموعه D مونوپلی پویای بازگشت‌پذیر گفته می‌شود هرگاه با در نظر گرفتن $D_۰ = D$ و فرآیند گسترش تاثیر به شکل فوق، kای وجود داشته باشد که $D_k = V(G)$. اندازه‌ی کوچکترین مونوپلی پویای بازگشت‌پذیر گراف G با آستانه τ با نماد $\mathrm{dyn}_\tau(G)$ نشان داده می‌شود. واضح است که در حالت $k = ۱$ مونوپلی پویای بازگشت‌پذیر تبدیل به مونوپلی تام خواهد شد که فقط در یک مرحله تمامی رئوس فعال می‌شوند.

مساله یافتن τ-مونوپلی تام مینیمم برای گراف با آستانه‌های داده شده مساله‌ای NP-کامل است زیرا در حالت خاص $\tau(v) = ۱$ به ازای همه رئوس که مساله تبدیل به مساله یافتن مجموعه احاطه‌گر مینیمم می‌شود که در [۵] اثبات شده است که NP-کامل است.

۲ نتایج اصلی

این بخش را با گزاره زیر شروع می‌کنیم که به وضوح در مورد مونوپلی تام مینیمال برقرار است.

گزاره ۱.۲. فرض کنید D مونوپلی تام مینیمال گراف همبند G باشد. در اینصورت به ازای هر راس $v \in D$ حداقل یکی از دو شرط زیر برقرار است:

۱. راس $w \in V \setminus D$ وجود دارد به طوری که $|N(w) \cap D| = \tau(w)$ و $v \in N(w)$.

۲. $H = G[D \setminus \{v\}]$ شامل راسی مانند u است که $\deg_H(u) < \tau(u)$.

برای مساله یافتن مونوپلی مینیمم صورت برنامه ریزی خطی عدد صحیح در [۴] ارائه شده و چندوجهی آن نیز مورد مطالعه قرارگرفته است. در قضیه زیر برای مساله یافتن مونوپلی تام مینیمم یک صورت برنامه‌ریزی عدد صحیح ارائه شده است.

قضیه ۲.۲. برای گراف داده شده $G = (V, E)$ با آستانه رئوس τ مساله مینیمم مونوپلی تام دارای صورت برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح به شکل زیر است.

$$\begin{aligned} \min \ & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{s.t.} \ & \sum_{u \in N(v)} x_u \geq \tau(v) \qquad \forall\, v \in V \\ & x_v \in \{۰, ۱\} \qquad\qquad \forall\, v \in V. \end{aligned}$$

اثبات. هدف مساله یافتن مونوپلی تام از اندازه مینیمم است. می‌خواهیم مجموعه $D \subseteq V(G)$ مونوپلی تام باشد. به ازای هر راس $v \in V$ متغیر باینری x_v را طوری در نظر بگیرید که:

$$x_v \in \{۰, ۱\} \rightarrow \begin{cases} x_v = ۱, \ \ v \in D & \text{(یعنی } v \text{ عضو مونوپلی تام باشد)} \\ x_v = ۰, \ \ v \notin D & \text{(یعنی } v \text{ عضو مونوپلی تام نباشد)} \end{cases}$$

در این صورت واضح است که اندازه مونوپلی تام به صورت $|D| = \sum_{v\in V} x_v$ خواهد بود که در حقیقت همان تابع هدف مساله برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح می‌باشد. حال برای اینکه راس v فعال شود، باید حداقل $\tau(v)$ همسایه در مجموعه D داشته باشد. بنابراین باید به ازای هر راس $v \in V$ قیدی به صورت زیر داشته باشیم:

$$\sum_{u\in N(v)} x_u \geq \tau(v).$$

□

قضیه زیر اهمیت مطالعه مونوپلی تام در گراف‌های دو بخشی را نشان می‌دهد که مطالعه مونوپلی تام در گراف‌های دو بخشی معادل مطالعه آن در حالت کلی گراف‌ها است.

قضیه ۳.۲. فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی با مجموعه رئوس $V = \{v_۱, v_۲, \dots, v_n\}$ و آستانه رئوس τ باشد. گراف دوبخشی H با بخش‌های $X = \{x_۱, x_۲, \dots, x_n\}$ و $Y = \{y_۱, y_۲, \dots, y_n\}$ باشد. مجموعه یال‌های H را به صورت $E(H) = \{x_iy_j | v_iv_j \in E(G)\}$ در نظر بگیرید. تابع آستانه τ' را برای رئوس H به صورت زیر در نظر بگیرید که به ازای هر $۱ \leq i \leq n$ داشته باشیم $\tau'(x_i) = \tau'(y_i) = \tau(v_i)$. در اینصورت

$$\mathrm{TM}_{\tau'}(H) = ۲\mathrm{TM}_{\tau}(G).$$

اثبات. فرض کنید M مونوپلی تام از اندازه مینیمم برای گراف G باشد. مجموعه $M' = \{x_i | v_i \in M\} \cup \{y_i | v_i \in M\}$ را در بگیرید. می‌خواهیم نشان دهیم M' مونوپلی تام برای گراف دوبخشی H می‌باشد. همسایه‌های x_i در بخش Y قرار دارند. طبق تعریف واضح است که تعداد همسایه‌های x_i در M' با تعداد همسایه‌های v_i در M برابرند. همچنین تعداد همسایه‌های y_i در M' با تعداد همسایه‌های v_i در M برابرند. بنابراین فعال شدن راس v_i در گراف G با فعال شدن رئوس x_i و y_i در H معادل است. لذا چون M مونوپلی تام G است، پس M' نیز مونوپلی تام H می‌باشد. بنابراین تساوی $|M'| = ۲|M|$ که از تعریف M' بدست می‌آید، نتیجه می‌دهد $\mathrm{TM}_{\tau'}(H) \leq ۲\mathrm{TM}_{\tau}(G)$.

حال برعکس می‌خواهیم ثابت کنیم $\mathrm{TM}_{\tau'}(H) \geq ۲\mathrm{TM}_{\tau}(G)$. فرض کنید M' مونوپلی تام مینیمم برای H باشد. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید $|M' \cap X| \leq |M' \cap Y|$. فرض کنید M زیرمجموعه‌ای از رئوس G در نظر بگیرید به طوری که $M = \{v_i \in V(G) | x_i \in M'\}$. حال ادعا می‌کنیم که M مونوپلی تام G است. کافیست نشان دهیم همه رئوس G با مجموعه M فعال می‌شوند. فرض کنید $v_i \in V(G)$ راس دلخواه باشد. چون $y_i \in Y$ توسط M' که مونوپلی تام است فعال می‌شود، لذا $|N_H(y_i) \cap M'| \geq \tau'(y_i)$. از طرفی چون تمامی همسایه‌های y_i در X هستند، بنابراین

$$|N_H(y_i) \cap M' \cap X| \geq \tau'(y_i).$$

حال با توجه به تعریف گراف H از روی گراف G و همچنین توابع آستانه و نحوه تعریف M از روی M' نتیجه می‌شود

$$|N_G(v_i) \cap M| \geq \tau(v_i).$$

لذا راس v_i توسط M فعال می‌شود و چون $v_i \in V(G)$ راس دلخواه بود، در نتیجه M مونوپلی تام G است. بنابراین

$$۲\mathrm{TM}_{\tau}(G) \leq ۲|M| = ۲|M' \cap X| \leq |M' \cap X| + |M' \cap Y| = |M'| = \mathrm{TM}_{\tau'}(H).$$

که در آن از فرض $|M' \cap X| \leq |M' \cap Y|$ استفاده شده است. □

نتیجه ۴.۲. فرض کنید α و β پارامترهای گرافی باشند به طوری که برای هر گراف G و گراف دوبخشی H بدست آمده از آن مشابه قضیه فوق، داشته باشیم $\alpha(G) = \alpha(H)$ و $\beta(G) = \beta(H)$. در اینصورت از نامساوی

$$\alpha(H)|V(H)| \leq \mathrm{TM}_{\tau'}(H) \leq \beta(H)|V(H)|$$

نتیجه می‌شود:

$$\alpha(G)|V(G)| \leq \mathrm{TM}_{\tau}(G) \leq \beta(G)|V(G)|.$$

در زیر با استفاده از الگوریتم حریصانه یک مونوپلی تام ارائه می‌شود که لزوما مینیمم نیست. این الگوریتم برای مونوپلی پویای بازگشت‌پذیر در مقاله [۲] ارائه شده است. اما چون در یک مرحله رئوس فعال می‌شوند، لذا مونوپلی تام نیز می‌باشد.

الگوریتم ۱ الگوریتم حریصانه.

ورودی. گراف، τ: تابع آستانه
خروجی. f_0 یک مونوپلی تام است.

رئوس را در G به ترتیب صعودی درجه‌ها در دنباله $v_1, \ldots, v_n$ مرتب کنید.
برای $i = 1$ تا n انجام دهید
  $\mathrm{whiteadj}[v_i] = 0$
  $\mathrm{blocked}[v_i] = 0$
پایان برای
برای $i = 1$ تا n انجام دهید
  برای هر $u \in N(v_i)$ انجام دهید
    اگر $\mathrm{whiteadj}[u] = \deg(u) - \tau(u)$، آنگاه
      $\mathrm{blocked}[v_i] = 1$
    پایان اگر
  پایان برای
  اگر $\mathrm{blocked}[v_i] = 1$، آنگاه
    $f_0(v_i) = 1$
  در غیر اینصورت
    $f_0(v_i) = 0$
    برای هر $u \in N(v_i)$ انجام دهید
      $\mathrm{whiteadj}[u] += 1$
    پایان برای
  پایان اگر
پایان برای

لم ۵.۲. مجموعه S که تابع f_0 بدست آمده از الگوریتم حریصانه فوق تابع مشخصه آن باشد، τ-مونوپلی تام است.

اثبات. با استقرا روی تعداد رئوس v که مقدار $f_0(v)$ توسط الگوریتم مشخص شده است (برای سایر رئوس $f_0(v)$ را برابر ۱ فرض می‌کنیم) ثابت می‌کنیم در هر مرحله از اجرای الگوریتم τ-مونوپلی تام G است.

شروع استقرا: در ابتدای الگوریتم که تعداد رئوسی که مقدار f_0 آن‌ها توسط الگوریتم مشخص شده، برابر صفر است و لذا برای همه رئوس $v \in V(G)$ داریم $f_0(v) = 1$ و این یعنی $S = V(G)$ که به وضوح مونوپلی تام است.

فرض استقرا: فرض کنیم الگوریتم مقدار f_0 را برای k راس مشخص کرده است، اگر f_0 را برای مقادیر نامشخص برابر یک قرار دهیم مجموعه S بدست آمده توسط تابع مشخصه f_0 مونوپلی تام است.

حکم استقرا: فرض می‌کنیم الگوریتم یک مرحله دیگر تکرار شود. یعنی مقدار f_0 برای $k+1$امین راس را مشخص کند. اگر مقدار f_0 برای راس $k+1$ام برابر یک باشد، مقادیر f_0 دقیقا مشابه فرض استقرا می‌باشد و لذا طبق فرض استقرا مجموعه S بدست آمده توسط تابع مشخصه f_0 مونوپلی تام است. اما اگر الگوریتم در مرحله $k+1$ام برای راس v مقدار $f_0(v)$ را برابر صفر قرار دهد، در این صورت طبق مراحل اجرای الگوریتم داریم $\mathrm{blocked}[v] = 0$. یعنی هیچ کدام از همسایه‌های راس v، مانند u، دقیقا $\deg(u) - \tau(u)$ همسایه خارج از S نداشته باشند. لذا تعداد همسایه‌های خارج از S راس u اکیدا کمتر از $\deg(u) - \tau(u)$ است. یا معادلا تعداد همسایه‌های u در S اکیدا بزرگتر از $\tau(u)$ است. در نتیجه اگر قرار دهیم $f_0(v) = 0$، همه همسایه‌های v حداقل $\tau(u)$ همسایه در S خواهند داشت و برای رئوس w که همسایه v نیستند و همچنین خود v طبق فرض استقرا حداقل $t(w)$ همسایه در S خواهند داشت. بنابراین همه رئوس فعال می‌شوند و لذا مجموعه S با تابع مشخصه f_0 یک مونوپلی تام باقی می‌ماند. پس حکم استقرا ثابت شد. بنابراین برای هر تعداد رئوس که الگوریتم f_0 آن را مشخص می‌کند و برای بقیه رئوس قرار می‌دهیم $f_0(V) = 1$. حال اگر تعداد رئوس مشخص شده توسط الگوریتم را برابر n فرض کنیم، یعنی همان پایان الگوریتم که مقدار f_0 تمامی رئوس توسط الگوریتم مشخص شده است، حاصل یک مونوپلی تام خواهد بود و درستی الگوریتم اثبات می‌شود. $\square$

با استفاده از الگوریتم حریصانه قبلی کران بالایی برای مونوپلی پویای بازگشت‌پذیر در [۲] ارائه شده است اما چون خروجی این الگوریتم مونوپلی تام می‌باشد، این کران برای مونوپلی تام نیز برقرار است که در قضیه زیر آن را بیان می‌کنیم.

قضیه ۶.۲. فرض کنید G گرافی دلخواه از مرتبه n باشد که Δ و δ به ترتیب نشان دهنده ماکسیمم و مینیمم درجه رئوس این گراف هستند. در اینصورت

با در نظر گرفتن τ به عنوان آستانه اکثریت مطلق اندازه مونوپلی تام بدست آمده توسط الگوریتم حریصانه قبلی حداکثر $\frac{n\Delta(\delta+۲)}{۴\Delta+(\Delta+۱)(\delta-۲)}$ است.

چون $\mathrm{TM}_\tau(G)$ نشان دهنده اندازه کوچکترین مونوپلی تام است، لذا نتیجه زیر به صورت بدیهی از قضیه قبلی بدست می‌آید.

نتیجه ۷.۲. فرض کنید G گرافی دلخواه از مرتبه n باشد که Δ و δ به ترتیب نشان دهنده ماکسیمم و مینیمم درجه رئوس این گراف هستند. در اینصورت با در نظر گرفتن τ به عنوان آستانه اکثریت مطلق کران بالای زیر برای اندازه کوچکترین مونوپلی تام برقرار است.

$$\mathrm{TM}_\tau(G) \leq \frac{n\Delta(\delta+۲)}{۴\Delta+(\Delta+۱)(\delta-۲)}.$$

قضیه زیر اندازه کوچکترین مونوپلی تام را برای دورها و مسیرها با آستانه اکثریت ساده و اکثریت مطلق مشخص می‌کند.

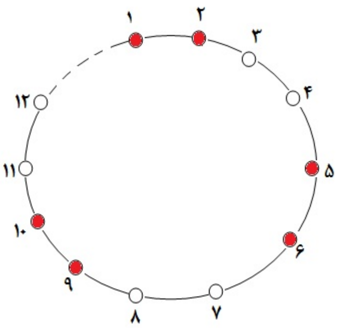
قضیه ۸.۲. برای مسیر n رأسی $G=P_n$ و دور n رأسی $G=C_n$ اندازه مینیمم مونوپلی تام از رابطه زیر به دست می‌آید:

الف) با آستانه اکثریث ساده

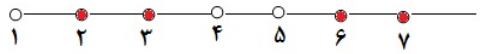
$$\mathrm{TM}(G)=\begin{cases} \frac{n}{۲} & n\equiv ۰ \pmod{۴} \\ \frac{n+۱}{۲} & n\equiv ۱ \text{ یا } ۳ \pmod{۴} \\ \frac{n+۲}{۲} & n\equiv ۲ \pmod{۴} \end{cases}$$

ب) با آستانه اکثریت مطلق $\mathrm{TM}(G)=n$.

اثبات. الف) با توجه به شکل زیر



برای مونوپلی تام به صورت یک در میان دو رأس انتخاب می‌کنیم (رأس‌های توپر) و دو رأس انتخاب نمی‌کنیم (رأس‌های توخالی) در این صورت اندازه مونوپلی تام به مینیمم می‌رسد. به همین علت اندازه مینیمم مونوپلی تام را با استفاده از مضارب ۴ بدست آوردیم. در مسیر n رأسی P_n نیز به همین شکل است.



پس داریم:

$$\mathrm{TM}(G)=\begin{cases} \frac{n}{۲} & n\equiv ۰ \pmod{۴} \\ \frac{n+۱}{۲} & n\equiv ۱ \text{ یا } ۳ \pmod{۴} \\ \frac{n+۲}{۲} & n\equiv ۲ \pmod{۴} \end{cases}$$

ب) واضح است که به ازای همه رئوس آستانه برابر درجه می‌باشد. لذا برای رأس دلخواه v، اگر همسایه‌ای از آن مانند u را در نظر بگیریم برای اینکه نیاز u تامین شود باید همه همسایه‌های آن و از جمله v در مونوپلی تام باشد لذا v عضو همه مونوپلی‌های تام می‌باشد و چون v دلخواه بود نتیجه می‌شود همه رئوس عضو مونوپلی تام می‌باشند و لذا $\mathrm{TM}(G)=n$. □

قضیه زیر نیز اندازه کوچکترین مونوپلی تام را برای گراف‌های کامل ارائه می‌کند.

قضیه ۹.۲. الف) برای گراف n رأسی K_n با آستانه اکثریت ساده،
اگر n زوج باشد داریم $\mathrm{TM}(K_n) = \frac{n+۲}{۲}$.
اگر n فرد باشد، داریم $\mathrm{TM}(K_n) = \frac{n+۱}{۲}$.
ب) برای گراف n رأسی K_n با آستانه اکثریت مطلق،
اگر n زوج باشد داریم $\mathrm{TM}(K_n) = \frac{n+۲}{۲}$
اگر n فرد باشد، داریم $\mathrm{TM}(K_n) = \frac{n+۳}{۲}$.

اثبات. اگر v یک رأس دلخواه از گراف باشد و آستانه آن را با $\tau(v)$ نشان دهیم، واضح است که آستانه همه رئوس دیگر نیز برابر $\tau(v)$ خواهد بود. حال برای فعال شدن یک رأس دلخواه حداقل $\tau(v)$ همسایه آن باید در مونوپلی تام باشد اما اگر یکی از رئوس عضو مونوپلی تام را در نظر بگیریم آن رأس نیز حداقل $\tau(v)$ همسایه در مونوپلی تام دارد و لذا حداقل $\tau(v)+۱$ رأس در مونوپلی تام وجود دارد و واضح است که با این تعداد رئوس کل رئوس گراف فعال می‌شوند بنابراین $\mathrm{TM}(K_n) = \tau(v)+۱$.

برای گراف n رأسی K_n درجه هررأس برابر $n-۱$ است، بنابراین:

الف) با آستانه اکثریت ساده داریم:

$$\tau(v) = \left\lceil \frac{\deg(v)}{۲} \right\rceil = \left\lceil \frac{n-۱}{۲} \right\rceil = \begin{cases} \frac{n}{۲} & \text{زوج باشد } n \\ \frac{n-۱}{۲} & \text{فرد باشد } n \end{cases}$$

در نتیجه

$$\mathrm{TM}(K_n) = \tau(v)+۱ = \begin{cases} \frac{n+۲}{۲} & \text{زوج } n \\ \frac{n+۱}{۲} & \text{فرد } n \end{cases}$$

ب) با آستانه اکثریت مطلق داریم:

$$\tau(v) = \left\lceil \frac{\deg(v)+۱}{۲} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{۲} \right\rceil = \begin{cases} \frac{n}{۲} & \text{زوج باشد } n \\ \frac{n+۱}{۲} & \text{فرد باشد } n \end{cases}$$

در نتیجه

$$\mathrm{TM}(K_n) = \tau(v)+۱ = \begin{cases} \frac{n+۲}{۲} & \text{زوج } n \\ \frac{n+۳}{۲} & \text{فرد } n \end{cases}$$

□

مراجع

[1] E.J. Cockayne, R.M. Dawes, S.T. Hedetniemi, *Total domination in graphs*, Networks 10 (1980) 211-219.

[2] M.A. Fazli, M. Ghodsi, J. Habibi, P. Jalaly, *On non-progressive spread of influence through social networks*, Elsevier B.V. All rightsreserved, Theoretical Computer Science 550, 36-50.

[3] K. Khoshkhah, M. Nemati, H. Soltani, M. Zaker, *A Study of Monopolies in Graphs*, Graphs and Combinatorics 29, 1417–1427 (2013). https://doi.org/10.1007/s00373-012-1214-7

[4] B. Moazzez, H. Soltani, *Integer programming approach to static monopolies in graphs*, J Comb Optim 35, 1009–1041 (2018). https://doi.org/10.1007/s10878-018-0256-z

[5] J. Pfaff, R.C. Laskar, S.T. Hedetniemi, *NP-completeness of total and connected domination and irredundance for bipartite graphs*, Technical Report 428, Clemson University, Dept. Math. Sciences, 1983.

[6] J.M. Sigarreta, J.A. Rodríguez, *On the global offensive alliance number of a graph*, Discrete Applied Mathematics, Volume 157, Issue 2, 2009, Pages 219-226, ISSN 0166-218X, https://doi.org/10.1016/j.dam.2008.02.007.

پست الکترونیکی: `ahmadalipourmahsa@gmail.com`
پست الکترونیکی: `h.soltani@uut.ac.ir`