کاربرد روش‌های نوین تنسوری-خمینه‌ای در پردازش تصاویر و بینایی ماشین

حمیدرضا یزدانی [۱،۱]، محسن شاهرضایی[۲]، علیرضا شجاعی‌فرد[۳]، احمدعلی قربان‌پور[۴]

۱- گروه ریاضی و آمار، دانشکده و پژوهشکده علوم پایه، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، تهران، ایران

۲- دانشکده علوم دفاعی، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، تهران، ایران

۳- گروه ریاضی و آمار، دانشکده و پژوهشکده علوم پایه، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، تهران، ایران

۴- دانشکده علوم دفاعی، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، تهران، ایران

چکیده

تنسورها به‌عنوان ساختارهای بزرگ میدان برداری و خمینه‌ها به عنوان بزرگ‌ترین ساختارهای توپولوژیکی-هندسی، کاربردهای گسترده‌ای در زمینه‌های پردازش کلان‌داده‌ها یافته اند. انواع نرم‌ها، مترها و ساختارهای مقیاس‌پذیر در این زمینه ها قابل تعریف هستند. ترکیب این دو دسته الگوریتم ها در پردازش تصاویر دیجیتالی بینایی ماشینی به گواه آزمایشات صورت گرفته با نرم افزارهای محاسباتی نظیر MATLAB-R2020a کارآیی قابل توجهی را از خود به نمایش گذاشته است.

کلمات کلیدی: بازیابی تصاویر، بازشناخت تصاویر، تکمیل تنسوری، تنسورها، یادگیری خمینه‌ای.

۱. مقدمه

روش‌های تکمیل ماتریسی و تنسوری دارای کاربردهای فراوانی در حوزه‌های گوناگون تجزیه و تحلیل کلان‌داده‌ها، پیش‌بینی براساس داده‌های جمع‌آوری شده، پردازش تصاویر و بینایی ماشینی هستند. داده‌های ناقص، پرت و نویزی همواره از چالش¬های بزرگ در زمینه پردازش کلان‌داده‌ها به ویژه داده‌های تصویری بوده‌اند. این مساله در تصاویر دیجیتالی به صورت انواع نویزها و مخدوشی تصویر ظاهر می‌شود. روش-های تکمیل ماتریسی و تنسوری این قابلیت را دارند که تا سطح قابل توجهی(بعضا در حد ۹۰٪ مخدوشی) را جبران نمایند. از طرفی روش‌های یادگیری خمینه ای مبتنی بر نظریه خمینه ها با قابلیت کاهش بعد و حذف داده های نویزی و پرت، صرفه محاسباتی را به میزان قابل توجهی افزایش می دهند. امروزه استفاده از روش‌های ترکیبی (هیبریدی) بسیار رایج شده است. با ترکیب این ساختارهای بزرگ ریاضی در هندسه (خمینه ها) و جبر (تنسورها) می توان به روش‌های پیشرفته و دقیقی دست یافت که در عین کارآیی بالا با نرخ تشخیص و بازیافت قابل توجه، صرفه محاسباتی بالایی نیز داشته باشند.

روش‌های گوناگون حل مسائل تکمیل تنسوری برای تجزیه و تحلیل کلان‌داده‌ها در قالب‌های گوناگون شامل تصاویر دیجیتالی در پردازش تصویر، بینایی ماشینی، متن‌کاوی، صوت‌کاوی و شناسایی اصوات، تجزیه و تحلیل داده‌های شبکه‌های اجتماعی در سیستم‌های پیچیده و کلان‌داده‌های مالی برای رسیدن به هوش تجاری مناسب جهت پیش‌بینی رویدادهای

[1] **Corresponding author:** پژوهشگر همکار و استاد مدعو
Email: hamidreza.yazdani@gmail.com

مالی، کاربرد فراوان دارند. این روش‌ها را می‌توان بسته به نوع مساله و حالات مورد بررسی، بهینه‌سازی نموده و سپس برای رسیدن به الگو و نتیجه مطلوب، به‌کار برد. همان‌طور که پیش تر نیز اشاره شد، روش‌های گوناگونی برای حل مساله تکمیل تنسوری وجود دارد که مبتنی بر تجزیه، نرم، کمترین مربعات و روش‌های نیوتنی هستند. در این بین مساله خطی یا غیرخطی بودن فضای داده مورد بررسی از اهمیت بالایی برخوردار است. در مسائل خطی که در عمل بسیار نادرند، حل مساله چندان دشوار نیست. اما در حالات غیرخطی، دو راهکار برای حل مساله وجود دارد، یکی تقریب خطی یا همان خطی‌سازی و دیگری حل کامل مساله غیرخطی. روش‌هایی که در دسته اول قرار می‌گیرند، به دلیل تقریب‌های به‌کار رفته دارای خطاهایی هستند که کنترل مساله را به ویژه در ابعاد بالا، دشوار می‌سازد. از سویی دیگر روش‌های دسته دوم، بسیار کارآمد هستند. یکی از این روش‌ها در ارتباط با تنسورها، یادگیری خمینه‌ای است. یادگیری خمینه‌ای در ترکیب با تنسورها بسیار کارآمد ظاهر می شود. در این حالت، دیگر سخن از تنسور نیست، بلکه میدان تنسوری مدنظر است. در بررسی‌های صورت گرفته مشخص شده است که روش‌های غیرخطی در حل مسائل بهینه سازی محدب و نامحدب بسیار کارآمد هستند. علت این امر ماهیت غیرخطی داده‌ها و فضاهای داده‌ای مسائل دنیای واقعی در طبیعت است. به هر ترتیب، این حوزه زمینه‌ای بسیار جذاب برای پژوهشگران و دانشمندان در زمینه‌های گوناگون علوم و فناوری است، تا بتوانند مسائل دنیای واقعی را به گونه‌ای کامل و تا جای ممکن بی‌نقص، مدل‌سازی نموده و سپس با حل مدل حاصل، به دانش مفید دست یابند. تنسورها به دلیل ماهیت چندمسیری و قابلیت ذخیره‌سازی و فشرده‌سازی داده‌های حجیم و کار با فضاهای بعد بالا، در زمینه تجزیه و تحلیل کلان‌داده‌ها کاربردهای فراوانی دارند. ترکیب این ابزارهای کارآمد ریاضی با نظریه خمینه‌ها در یادگیری خمینه‌ای، امکان تجزیه و تحلیل داده‌های بعد بالای غیرخطی دنیای واقعی با کمترین خطا و بیشترین دقت را در کوتاه‌ترین زمان ممکن و با صرفه محاسباتی، فراهم می‌آورد.

۲. پیش‌نیازها

در این بخش به بیان پاره ای مفاهیم اولیه درباره تنسورها، حساب تنسوری و خمینه‌ها می پردازیم.

۱,۲.تنسور: آرایه‌ای چندخطی $\mathcal{A} = (a_{i_1 \dots i_m})$ از درآیه‌های $a_{i_1 \dots i_m} \in F$ است که در آن برای هر $j = 1, \dots, m$، $i_j = 1, \cdots, n_j$ و F نیز یک میدان است. در حالتی‌که $F = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد، با تنسورهای حقیقی یا مختلط سروکار داریم. در این تعریف، m مرتبه [۱] تنسور $\mathcal{A}$، $(n_1 . \cdots . n_m)$ بعد [۲] آن نامیده می‌شوند.

زمانی‌که $n = n_1 = \cdots = n_m$، می‌گوییم $\mathcal{A}$ یک تنسور n-بعدی از مرتبه m است. تنسور حقیقی از مرتبه p با بعد n دارای np عدد حقیقی است و درآیه‌های آن برای $1 \leq i_1, i_2, \cdots, i_p \leq n$ به‌صورت

$$\mathcal{A} = (a_{i_1 i_2 \cdots i_p}) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p}$$

نمایش داده می‌شوند [۴].

۲,۲.مثال: اگر $x . y . z \in \mathbb{R}^2$ سه بردار ناصفر باشند، حاصل‌ضرب خارجی آن‌ها به‌صورت

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} z_1 y_1 x_1 & z_1 y_2 x_1 & z_1 y_1 x_2 & z_1 y_2 x_2 \\ z_2 y_1 x_1 & z_2 y_2 x_1 & z_2 y_1 x_2 & z_2 y_2 x_2 \end{array}\right)$$

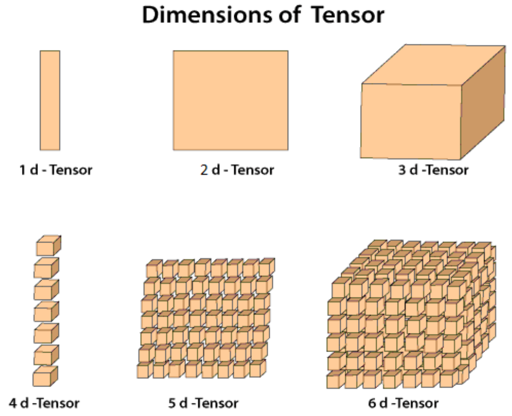
یک تنسور حقیقی ۲×۲×۲ است.

مجموعه همه تنسورهای n -بعدی از مرتبه m را با $T_{m,n}$ نشان می‌دهیم. برای تنسور $\mathcal{A}$، اگر همه درآیه‌های $a_{i_1 \dots i_m}$ تحت هر جایگشت اندیس‌ها، پایا باشند، سپس $\mathcal{A}$ تنسوری متقارن [۳] نامیده می‌شود. مجموعه همه تنسورهای حقیقی متقارن

[1] Order
[2] Dimension
[3] Symmetric Tensor

n-بعدی از مرتبه m را با $S_{m,n}$ نشان می‌دهیم. برای نمایش تنسورها در یک دستگاه مختصاتی از آرایه‌های چندمسیری به نام فراماتریس‌ها استفاده می‌کنیم [۵].

به‌وضوح تنسورها، تعمیم بردارها و ماتریس‌ها هستند، مثلا، یک تنسور مرتبه سوم (یا سه مسیری) دارای سه حالت (اندیس یا بعد) است. یک تنسور مرتبه صفر، در عمل یک اسکالر، تنسور مرتبه یک، یک بردار و تنسور مرتبه دوم، یک ماتریس است. تنسورهای با مرتبه سه یا بالاتر، تنسورهای مرتبه بالا نامیده می‌شوند، شکل ۱ را ببینید.



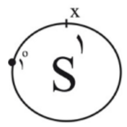
شکل ۱. تجسم داده‌های چندمسیری؛ نمایش گرافیکی تنسورها براساس ابعاد، تنسور با صفر مسیر یا اسکالر، تنسور یک مسیری یک بردار سطری یا ستونی، تنسور دو مسیری، یک ماتریس و تنسورهای n مسیری.

توجه داشته باشید که آن چه در فیزیک و هندسه T تنسور خوانده می شود، در واقع میدان تنسوری است. به‌صورت رسمی، میدان تنسوری یک تابع تنسور مقدار است، که در یک دستگاه مختصاتی مقدار آن در یک نقطه برابر با یک تنسور می‌شود. میدان‌های تنسوری کاربردهای فراوانی در فیزیک و هندسه دارند، از جمله پرکاربردترین تنسورها در هندسه و فیزیک می توان به تنسور خمیدگی ریمانی، میدان تنسوری گرانش، تنسور اینرسی و استرس و متریک تنسور اشاره نمود[۲].

۳. خمینه‌ها

خمینه‌ها، تعمیم مفاهیم خم و رویه به ابعاد بالاتر هستند. خمینه‌های توپولوژیک، هموار، تحلیلی و نیز خمینه‌های لورنتس، ریمانی و شبه‌ریمانی در این زمینه، از موضوعات مطرح هستند.

۱،۳ فضای توپولوژیک. یک فضای توپولوژیک X گردایه‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های X است، که شامل تهی و خود X بوده و نیز اجتماع دلخواه و اشتراکات متناهی از زیرمجموعه‌های خود را در برگیرد. این توپولوژی را با τ نشان می‌دهند. X را با توپولوژی τ یک فضای توپولوژیک خوانده و با (X, τ) نمایش می‌دهیم، شکل ۲ دایره را به عنوان یک خمینه توپولوژیک ۱-بعدی در فضای اقلیدسی نشان می دهد [۲].



شکل ۲. دایره S^1 به‌عنوان یک خمینه توپولوژیک یک بعدی.

۲،۳ خمینه توپولوژیک. فضای توپولوژیک (M,τ) را خمینه‌ای توپولوژیک خوانیم، هرگاه M دارای این ویژگی‌ها باشد:

۱. فضایی هاسدورف[۱] باشد (هر دو نقطه آن‌را بتوانیم با دو مجموعه باز از هم جدا کنیم).
۲. شمارای نوع دوم باشد.
۳. موضعا اقلیدسی با $\mathbb{R}^n$ باشد (که n را بعد خمینه‌ی M می‌نامیم).

دو ویژگی اول بدان معناست که می‌توان خمینه M را در فضای اقلیدسی با بعد بالاتر قرار داد (نشاند).
به‌عنوان یک فضای توپولوژیک، یک خمینه توپولوژیک دارای ساختار توپولوژیک (مجموعه‌های باز، بسته، فشرده، نگاشت‌های پیوسته و همسان‌ریختی) است. به‌عنوان مثال با وصل کردن نقاط ابتدایی و انتهایی یک پاره خط، خمینه توپولوژیک یک بعدی دایره ساخته می‌شود. چنبره T^2 نیز خمینه توپولوژیک دیگری از بعد دو است (شکل ۳ را ببینید).

شکل ۳. چنبره T^2 نمونه‌ای از یک خمینه توپولوژیک دو بعدی.

خمینه‌های توپولوژیک ساده‌ترین نوع خمینه‌ها هستند و دارای کابردهای فراوانی می‌باشند.

۳,۳.خمینه هموار. خمینه توپولوژیک M را هموار (دیفرانسیل پذیر) خوانیم، هرگاه M دارای دیفرانسیل‌های پیوسته باشد. در حقیقت، خمینه توپولوژیک C^0 پیوسته و خمینه توپولوژیکی که مشتقات آن از هر مرتبه‌ای پیوسته باشند یعنی C^1، هموار است. خمینه تحلیلی[۲]، یک خمینه C^ω است (بسط تیلور هر نگاشت هموار در آن با خودش برابر است، یعنی جمله باقی‌مانده در بی‌نهایت به صفر میل می‌کند) [۲].

۴. تکمیل ماتریسی و تنسوری

مساله تکمیل تنسوری، تعمیمی از مساله تکمیل ماتریسی برای حل نقاط ضعف آن و استفاده در حل مسائل بعد بالای کلان‌داده‌ها و تعمیم و گسترش کارآیی آن‌هاست؛ این مساله به‌صورت‌های گوناگونی قابل بیان و حل است، دو صورت کاربردی مساله تکمیل تنسوری، براساس تجزیه (باز کردن) و بهینه سازی است، در این‌جا ابتدا مساله تکمیل ماتریسی را به اختصار بیان می‌نماییم [۵].

۱,۴.تکمیل ماتریسی. مساله تکمیل ماتریسی نخستین‌بار در سیستم رتبه‌بندی سایت اشتراک فیلم نت فلیکس[۳] در مساله توصیه‌گر فیلم به کاربران مطرح شد. به بیان ساده، تکمیل ماتریسی، تکمیل درآیه‌های گمشده یک ماتریس $n_1 \times n_2$ از نمونه‌گیری درآیه‌هاست. مساله تکمیل ماتریسی به بیان ریاضی مساله بهینه‌سازی محدب

$$minimize\ |P_\Omega(X) - P_\Omega(M)|$$

است، که در آن $\Omega = \{(i,j)|(i,j) \in M\}$ و

[۱] Hausdorff space
[۲] Analytic Manifold
[۳] Netflix Movie Recommender

$$P_\Omega(X) = \begin{cases} (i,j) & \forall (i,j) \in X \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

می باشد. به‌صورت ایده‌آل می‌خواهیم این تفاضل را به‌گونه‌ای صفر نماییم که ماتریس جواب X کاملاً برای همه درآیه‌های مفروض با ماتریس M مطابقت داشته باشد.

در تکمیل ماتریسی باید حتما حداقل یک درآیه در هر سطر یا ستون مشاهده شده باشد، اگر چنین نباشد، درآیه‌های آن سطر یا ستون می‌توانند هر مقدار دلخواهی باشند، بنابراین روش در این حالت پاسخگو نیست. از طرفی برای کارآمدی روش‌های تکمیل ماتریسی، باید رابطه

$$m \geq Cn^{5/4} r \log n.$$

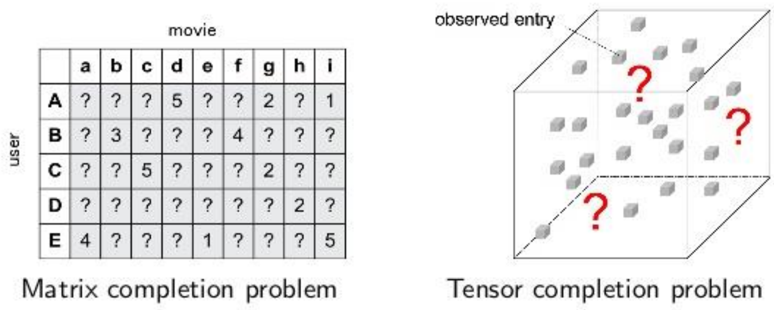
برقرار باشد، تا ماتریس بازیافت شده از طریق تکمیل ماتریسی، منحصربفرد گردد، جایی‌که ماتریس M ماتریسی $n_1 \times n_2$ از رتبه r است و $n = \max(n_1, n_2)$. همچنین فرض می‌کنیم m درآیه از ماتریس M با موقعیت‌های نمونه‌گیری شده یکنواخت تصادفی وجود داشته باشند، C و c نیز ثابت های عددی وجودی هستند. به دلیل این محدودیت ها مساله تکمیل تنسوری به عنوان تعمیمی از تکمیل ماتریسی مطرح شده است.

۲،۴.تکمیل تنسوری. برای جلوگیری از نامعین و غیر قابل کنترل بودن مساله، شرط رتبه پایین را اعمال می کنیم تا درجات آزادی درآیه های گمشده را محدود نماییم، می‌توان مساله تکمیل تنسوری را به‌صورت یک مساله بهینه‌سازی محدب به‌صورت

$$\begin{gathered} \mathrm{minimize}_{\mathrm{X}}\ rank_*(\mathcal{X}) \\ \mathcal{X}_\Omega = \mathcal{T}_\Omega \end{gathered}$$

در نظر گرفت، که به دنبال تنسور $\mathcal{X}$ با حداقل رتبه (مشخص از نوعی معین) هستیم، که شرط برابری با تنسور مشاهده شده جزیی $\mathcal{T}$ در مجموعه اندیس داده شده را برآورده نماید [۱].

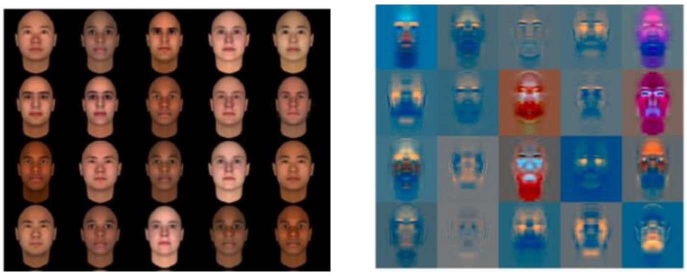
در عمل، در تکمیل تنسوری از طریق تجزیه یا باز کردن تنسور به‌صورت ماتریس ها، با در اختیار داشتن مجموعه اندیس مناسب و براساس تنسور جزیی مشاهده شده، به دنبال یافتن تنسور کامل هستیم. شکل ۴ نمایی تجسمی از مسایل تکمیل ماتریسی و تنسوری را نشان می‌دهد.



شکل ۴. مقایسه‌ای بین مسایل تکمیل ماتریسی (سمت چپ) و تکمیل تنسوری (سمت راست).

روش‌های گوناگونی برای حل مسائل تکمیل تنسوری وجود دارد، که از آن جمله می توان به روش‌های مبتنی بر نرم، روش‌های مبتنی بر تجزیه، روش‌های کمترین مربعات و روش‌های نیوتنی اشاره نمود. برای اطلاعات بیشتر درباره انواع

روش‌های حل مسائل تکمیل تنسوری می توانید به [۵] مراجعه نمایید. شکل ۵ نمونه‌ای از کاربرد روش‌های تکمیل تنسوری در تشخیص چهره را نشان می‌دهد.

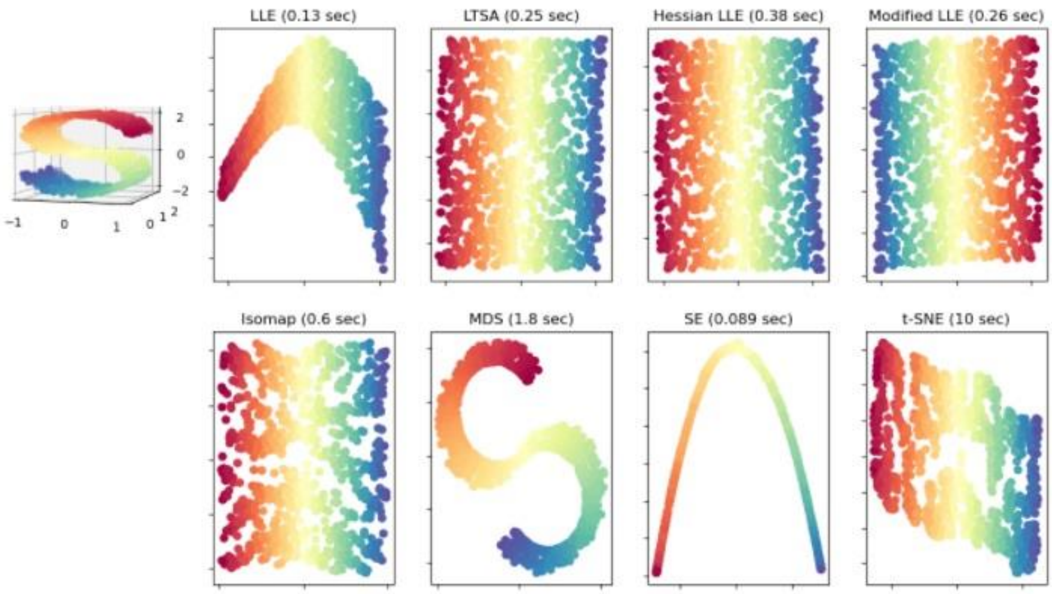


شکل۵. تشخیص همزمان چندین چهره با استفاده از الگوریتم‌های تکمیل تنسوری.

۵. یادگیری خمینه‌ای

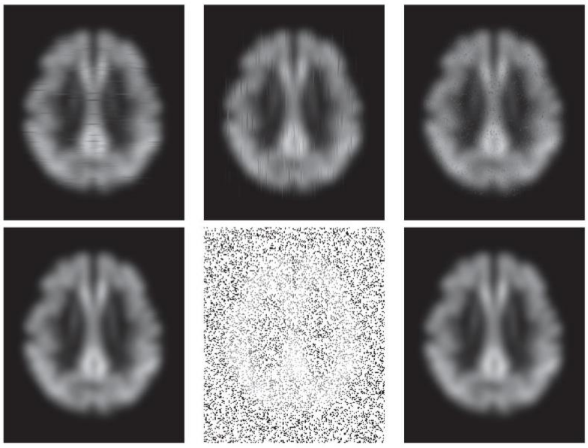
یادگیری خمینه‌ای مبتنی بر این ایده است که بعد بسیاری از مجموعه داده‌ها بصورت تصنعی بالاست. مجموعه داده‌های بعد بالا را به سختی می‌توان تجسم نمود. در حالی که داده‌های دو یا سه بعدی، به راحتی قابل ترسیم هستند و ساختار ذاتی داده‌ها را نشان می‌دهند. برای سهولت در تجسم داده‌ها باید بعد را به طریقی کاهش داد. ساده‌ترین راه اجرای کاهش بعد، تصویر کردن تصادفی داده‌هاست. اما در این کار، ممکن است ساختارهای داده جالب حذف شوند. برای حل این مشکل، روش‌های کاهش بعد نظارت شده و نظارت نشده از قبیل تحلیل مولفه اصلی (PCA[۱])، تحلیل مولفه مستقل (ICA[۲])، تحلیل تفکیکی خطی (LDA[۳]) و غیره ارائه شده اند. این الگوریتم‌ها، به دنبال تصویر خطی داده‌ها بر فضای مناسب هستند. این روش‌ها می‌توانند قدرتمند باشند، اما اغلب داده‌های مهم در ساختارهای غیرخطی گم می شوند. مساله اصلی بعد ذاتی داده‌هاست، بعد ذاتی کمینه تعداد پارامترهای مورد نیاز برای احتساب ویژگی‌های داده‌هاست. در عمل، کاهش بعد تسهیل کننده دسته بندی، خوشه بندی، تجسم و فشرده سازی داده‌های بعد بالا در قالب و فضای مناسب است [۶].
روش‌های کاهش بعد خطی نظیر PCA برای مسائل مصنوعی غیر پیچیده مناسب هستند، در مجموعه داده‌های مصنوعی پیچیده یا دنیای واقعی، تنها روش‌های کاهش بعد غیرخطی پاسخگو هستند؛ زیرا اکثریت داده‌ها درون یا نزدیک خمینه بعد پایین غیرخطی (موسوم به خمینه ویتنی) قرار دارند. روش‌های کاهش بعد غیرخطی یا خطی طیفی (مبتنی بر تجزیه ماتریس داده‌ها براساس مقادیر ویژه بردارهای داده) محدب هستند (تابع هدفی را بهینه می‌نمایند که، شامل هیچ بهینه موضعی نیست، به عبارت دیگر، فضای جواب همواره محدب است). روش‌های یادگیری خمینه‌ای را می توان در سه دسته روش‌های: نگاشتی-تصویری، فضاها و کلاف‌های مماسی و تجسمی قرارداد [۶]. یادگیری خمینه‌ای را می‌توان تلاشی برای تعمیم چارچوب‌های خطی نظیر PCA به حساسیت در برابر ساختارهای داده غیرخطی تلقی نمود. گرچه انواع نظارت شده‌ای نیز وجود دارند، مساله یادگیری خمینه‌ای معمول در یادگیری نظارت نشده تبلور می‌یابد؛ که ساختارهای داده بعد بالا را از روی خود داده‌ها بدون استفاده از دسته بندی از پیش تعیین شده، می آموزد [۶]. شکل ۶ نمونه‌ای از اجرای چندین روش شناخته‌شده یادگیری خمینه‌ای (سمت راست) روی یک نمونه مثال از مجموعه داده‌ای مشخص (سمت چپ) را نشان می‌دهد.

[1] Principal Component Analysis
[2] Independent Component Analysis
[3] Linear Discriminative Analysis



شکل ۶. نمای مقایسه‌ای بین چندین روش شناخته شده یادگیری خمینه‌ای.

در کمتر از ۲۰ سال گذشته با توسعه روش‌های کاهش بعد، نظریه خمینه ها کاربرد وسیعی در حوزه هوش مصنوعی یافته و موجب پیداش مفهوم جدیدی به نام یادگیری خمینه ای شده است. ایده اصلی این است که بعد مجموعه یا فضای داده ها بصورت تصنعی بالاست و با روش‌های مناسب هندسی می توان به خمینه بعد پایین نشانده شده ای از بعد به مراتب پایین تر دست یافت که حاوی اطلاعات ارزشمند و مهم فضای داده اصلی است، این ویژگی مهم را خمینه ویتنی نامند. هدف اصلی روش‌های یادگری خمینه ای کاهش بعد و افزایش صرفه محاسباتی است. مفهوم تنسور نیز در خمینه ها به صورت میدان تنسوری مطرح می شود، از این رو ترکیب روش‌های تنسوری و روش‌های یادگیری خمینه‌ای در سال‌های اخیر، بسیار در کانون توجهات قرار گرفته و نویدبخش پیدایش روش‌های سریع‌تر و کارآمدتر برای پردازش انواع کلان‌داده‌ها، بویژه داده‌های تصویری در قالب تصاویر دیجیتالی و ویدیوها گردیده است. در زمینه کاربردهای روش‌های یادگیری خمینه‌ای می‌توان به یادگیری خمینه‌ای دست خط از طریق روش‌های LLE یا ایزومپ اشاره نمود (در کل ایزومپ یکی از ابتدایی ترین روش‌ها برای یادگیری خمینه‌ای است، که می‌تواند بسط MDS و PCA با حفظ فواصل ژئودزیکی بین نقاط در نظر گرفته شود). کاربرد در پردازش تصاویر در مراحل تشخیص و شناسایی در تصاویر پزشکی نظیر MRI مغزی، تشخیص چهره و توانایی بالای بازیافت و بازسازی تصاویر چهره انسانی نیز یکی از زمینه های کاربردی مهم است، شکل ۷ را ببینید.



شکل ۷. نمونه‌ای از پردازش تصاویر MRI مغزی. سمت چپ پایین: تصویر اصلی، وسط: تصویری نویزی، سایر تصاویر: بازیافت شده با روش‌های تکمیل ماتریسی، تنسوری، یادگیری خمینه‌ای.

۶. نتیجه‌گیری

در این جا روش‌های نوین محاسباتی معرفی شده‌اند، که منجر به الگوریتم های پیشرفته هیبریدی در زمینه ثبت، بازسازی، بازیافت و تشخیص و شناسایی تصاویر (بویژه چهره انسانی) می شوند. طبق بررسی های صورت گرفته در شرایط آزمایشگاهی این روش‌ها دارای نرخ های تشخیص و بازیافت بالایی بیش از ۹۰ درصد و حتی در مواردی تا ۹۹ درصد هستند که در کنار صرفه محاسباتی به دلیل کاهش بعد، آن ها را به روش‌هایی مقرون به صرفه و کارآمد تبدیل می نماید. ترکیب روش‌های مرسوم کاهش بعد خطی نظیر PCA و LDA با تنسورها و ایجاد الگوریتم های نوینی نظیر MPCA و MLDA خود شاهدی بر این مدعاست. در هر نوع مساله بسته به شرایط و نوع تصویر یا داده مورد بررسی می توان با انتخاب روش تجزیه تنسوری، ضرب و متریک مناسب، نوع روش بهینه سازی بسته به قیود مساوی یا نامساوی مساله و توجه به تحدب یا تقعر بهترین روش و الگوریتم را برای حصول به نتیجه بهتر اعمال نمود. این تغییرات کاملا آگاهانه و برای حداکثر هماهنگی با مساله ایجاد شده‌اند. همانند دیگر حوزه‌های هوش مصنوعی و علم داده‌ها، انتخاب روش مناسب برای تجزیه و تحلیل داده‌ها به نوع و ساختار داده‌ها وابسته است، آنچه مهم است بهره گیری از تجربه و دانش کافی برای تشخیص بهترین روش با بالاترین بازده و کارآمدی در عین حفظ صرفه محاسباتی است.

۷. مراجع

[1] *C. G. Baker, P. A. Absil and K. A. Gallivan, An implicit trust-region method on Riemannian manifolds, IMA Journal of Numerical Analysis (2008) no. 28, 665−689.*

[2] *B. O'Neil, Semi-Riemannian geometry with application to relativity, Academic Press (1983).*

[3] *L. Qi, The Spectral Theory of Tensors, arXiv (2012): 1201.3424v1.*

[4] *A. Rovi, Analysis of 2×2×2 Tensors, MAI mathematics: Master thesis (2010), Linkoping's University.*

[5] *Q. Song, H. Ge, J. Caverlee and X. Hu, Tensor Completion Algorithms in Big Data Analytics, ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data (TKDD) (2019), no. 6 (13), 1–48.*

[6] *LJP Van der Maaten, EO Postma, HJ Van den Herik, Dimensionality reduction: A comparative review, Technical Report TiCC TR 2009(05).*