رابطه مقادیر ویژه و انرژی ماتریس خروج از مرکز و ماتریس مجاورت گراف

دکتر سعید محمدیان سمنانی[۱]، فهیمه کرم [۲،*]

۱- هیأت علمی دانشگاه سمنان

۲- دانشجو دکتری ریاضی کاربردی دانشگاه سمنان

چکیده
در این مقاله ما ابتدا ماتریسی به نام ماتریس خروج از مرکز تعریف می نماییم و سپس مقادیر ویژه آن را تعیین می کنیم و فرمولی برای مقادیر ویژه ماتریس خروج از مرکز برای گراف های خاص به دست می آوریم و ارتباط مقادیرویژه این ماتریس با مقادیر ویژه ماتریس مجاورت را می یابیم .
کلمات کلیدی: خروج از مرکز , مقادیر ویژه , ماتریس مجاورت , انرژی گراف

۱. مقدمه

همان طور که می دانیم به کمترین تعداد یال بین دو رأس u , v مسافت دو رأس u,v گوییم که با نماد d(u , v) نمایش می دهیم. حال برای رأس u بیشترین مسافت از سایر رئوس را خروج از مرکز رأس u می گوییم و با نماد Ecc(u) نشان می دهیم و به بزرگترین خروج از مرکز رأس های گراف شعاع گراف گفته می شود. در این مقاله ماتریسی به نام خروج از مرکز معرفی می نماییم و سپس مقادیرویژه ماتریس خروج از مرکزرا برای برخی از انواع گراف ها می یابیم و روابطی بین مقادیر ویژه این نوع ماتریس با ماتریس مجاورت آن گراف پیدا می نماییم و سپس در بخش آخردر مورد انرژی گراف ها بحث می کنیم.لازم به ذکر است تمامی تعاریف این مقاله از مرجع [2] می باشد.

2- ماتریس خروج از مرکز

این ماتریس یک ماتریس n*n به فرم زیر است و با نماد $Ecc(G) = [e_{ij}]$ نشان می دهیم.

$$e_{ij} = \begin{cases} Ecc(vi) & d(Vi\,,Vj\,) = Ecc(Vi) \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

حال این ماتریس را برای چند نوع گراف به دست آوریم و فرم کلی آن را بیان نماییم.

۱ -۲: گراف دوری:

تعریف ۱-۱-۲: یک گراف با تعداد مساوی از رئوس و یال ها است که می توان آن را بر روی محیط یک دایره قرار داد همچنین دو راس زمانی مجاور است که به صورت متوالی بر محیط دایره واقع شوند و این گراف را با نماد C_n نمایش می دهیم.

حال تعریف بعدی را در مورد ماتریس خروج از مرکز این نوع گراف داریم:

Email: s_mohammadian@semnan.ac.ir

تعریف ۲-۱- ۲:

ماتریس خروج از مرکز گراف دوری به فرم زیر می باشد:

اگر تعداد رئوس زوج باشد:

$$e_{ij} = \begin{cases} \frac{n}{2} & d(Vi\,,Vj\,) = ECC(Vi)\ or\ ECC(Vj) \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

$$ECC(C_n)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & n/2 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & n/2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & n/2 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & . & n/2 \\ n/2 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & n/2 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & n/2 & 0 & . & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

اگر تعداد رئوس فرد باشد:

$$e_{ij} = \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil & d(Vi\,,Vj\,) = ECC(Vi)\ or\ ECC(Vj) \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

$$ECC(C_n)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & \lceil \frac{n}{2} \rceil & \lceil \frac{n}{2} \rceil & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & \lceil \frac{n}{2} \rceil & \lceil \frac{n}{2} \rceil & 0 & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & \lceil \frac{n}{2} \rceil & \lceil \frac{n}{2} \rceil & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & \lceil \frac{n}{2} \rceil & \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil & \lceil \frac{n}{2} \rceil & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & \lceil \frac{n}{2} \rceil & \lceil \frac{n}{2} \rceil & 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & \lceil \frac{n}{2} \rceil & \lceil \frac{n}{2} \rceil & 0 & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

همانطور که می دانیم مقدار خروج از مرکز برای گراف دوری برابر [n/2] می باشد که در ماتریس خروج از مرکز این عدد برای اولین بار در درایه 1 + [n/2] رخ می دهد و هر بار یک واحد به سمت راست شیفت پیدا می کند.

۲-۲: گراف مسیر:

تعریف ۱-۲-۲: گراف ساده ای است که رئوس آن را میتوان بصورت مرتب و پشت سر هم در یک لیست قرار داد که در آن هر دو راس مجاورند هرگاه در این لیست پشت سرهم باشند و با نماد P_n نمایش می دهیم.

تعریف زیر را در مورد ماتریس خروج از مرکز این نوع گراف را داریم.

تعریف ۲-۲-۲: ماتریس خروج از مرکز گراف مسیر به فرم زیر می باشد.

همان طور که می دانیم خروج از مرکز گراف مسیر برابر با $n-1, \ldots, [n/2]$ است. حال برای به دست آوردن ماتریس خروج از مرکز مسیرها را به دو دسته خروج از مرکزمسیر با تعداد رأس زوج و فرد تقسیم می نماییم و به صورت زیر به دست می آوریم:

$$e_{ij} = \begin{cases} ECC(Vi) & d(Vi, Vj) = ECC(Vi) \text{ or } ECC(Vj) \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

اگر تعداد رئوس زوج باشد:

$$ECC(Pn) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 & n-2 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & n-3 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & n/2 \\ \frac{n}{2} & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ n/2+1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & 0 & . & . & . & 0 & 0 & . & . & & 0 \\ n-1 & 0 & . & . & . & . & 0 & 0 & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

اگر تعداد رئوس فرد باشد به صورت:

$$ECC(Pn) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots. & 0 & 0 & . & . & . & 0 & n-1 \\ 0 & 0 \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & n-2 \\ . & . & . & . & . & . & 0\ 0 & . & . & 0 & n-3 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & 0 & . & . & . & 0 & 0 & . & . & & 0 \\ n-1 & 0 & . & . & . & . & 0 & 0 & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

خواهد بود.

2-3 : گراف ستاره :

تعریف ۱-۳-۲: گراف ستاره یک گراف مسیر است با ماکزیمم درجه ۲ و شامل یک رأس است که با سایر رئوس مجاور است و با نماد S_n نشان می دهیم.

تعریف ۲-۳-۲: ماتریس خروج از مرکز گراف ستاره به فرم زیر می باشد.

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & deg(Vi) = n-1 \\ 2 & \deg(Vi) = 1 \\ 0 & i = j \ , \ d(Vi, Vj) = 1 \end{cases}$$

$$ECC(S_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & . & . & . & . & . & . & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & . & . & . & . & . & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & . & . & . & . & 2 \\ 0 & 2 & . & 2 & 0 & 2 & . & . & . & 2 \\ 0 & 2 & . & . & 2 & 0 & 2 & . & . & 2 \\ 0 & 2 & . & . & . & . & . & 2 & . & 0 \end{pmatrix}$$

۴-۲: گراف کامل :

تعریف ۱-۴-۲: گرافی ساده است که تمام رأس های آن دو به دو با هم مجاورند و با نماد K_n نشان می دهیم.

قضیه ۱-۴-۲:

در گراف کامل ماتریس مجاورت برابر با ماتریس خروج از مرکز است.

اثبات: چون در گراف کامل فاصله هر رأس از رأس دیگر برابر یک است و نسبت به خودش برابر صفر است پس خروج از مرکز هر رأس نسبت به رأس یک و نسبت به خودش برابر صفر است و این همان تعریف ماتریس مجاورت این گراف است.

۵-۲: گراف دوبخشی کامل:

تعریف ۱-۵-۲: گراف دو بخشی ساده است به صورتی که رأس های آن زمانی مجاورند که در دو بخش متفاوت قرار گرفته باشد و با نماد $K_{m,n}$ نشان می دهیم.

تعریف۲-۵-۲: ماتریس خروج از مرکز گراف دوبخشی کامل به فرم زیر می باشد .

به دست آوردن ماتریس خروج از مرکز این ماتریس آن را به دو حالت زیر تقسیم می کنیم و همچنین توجه داریم که با توجه به دو بخشی بودن آن خروج از مرکز هر رأس برابر دو می باشد.

$$ECC(K_{m,n}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} m*m & m*n \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc} 0 & 2 & . & . & . & 2 & & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 2 & 0 & 2 & . & . & 2 & & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & . & 2 & & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & & . & . & . & . & . & . & . \\ 2 & 2 & . & . & . & 0 & & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ \hline 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 2 & . & . & . & 2 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & & 2 & 0 & 2 & . & . & 2 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & & 2 & 2 & 0 & 2 & . & 2 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & & 2 & 2 & 2 & 0 & . & 2 \\ . & . & . & . & . & . & & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & & 2 & . & . & . & 2 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} n*m & n*n \end{array} \end{array} \quad s.t. \quad m \neq n \neq 1$$

لازم به ذکر است در حالتیکه $m = n$ باشد ماتریس به شکل فوق با چیدمان مربعی می باشد.

۳- مقادیر ویژه گراف ها:

حال در این بخش به بررسی مقادیر ویژه ماتریس خروج از مرکز برخی گراف ها می پردازیم:
قبل از شروع مبحث مقادیر ویژه ابتدا لم زیر را می آوریم:
لم۱-۳:
اگر ماتریس دوری S_n داشته باشیم که سطر اول آن به صورت $[s_1 \ \ s_2 \ \ s_3 \ \ldots \ s_n]$ باشد آنگاه

$$S = s_1 I + s_2 w + s_3 w^2 + \ldots + s_n w^{n-1} = \Sigma\, s_j w^{j-1} \quad j = 1, \ldots, n$$

که در فرمول بالا نشان دهنده w ریشه های nام واحد می باشد و مقادیر ویژه S عبارتند از:

$$\lambda_r = \Sigma\, s_j w^{(j-1)r} \qquad j = 1, \ldots, n \quad r = 1, \ldots, n$$

اثبات:
در مرجع [5] می باشد.

۱-۳: گراف دوری:

مقادیر ویژه خروج از مرکز گراف دوری را با $\lambda_{ecc}(C_n)$ نشان می دهیم از آنجاییکه در بخش قبل مشاهده کردیم ماتریس خروج از مرکز برای گراف های زوج و فرد را به صورت جداگانه محاسبه نمودیم حال قضیه زیر را در مورد مقادیر ویژه آن ها را داریم:

قضیه ۱-۱-۳: مقادیر ویژه ماتریس خروج از مرکز گراف دوری به صورت زیر است.

$$\lambda_{ecc}(C_n) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -\frac{n}{2} & \frac{n}{2} \\ n/2 & n/2 \end{pmatrix} & n: even \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lambda A\,(Cn) & n: odd \end{cases}$$

که در آن $A\,(C_n)$ ماتریس مجاورت گراف C_n و λ_A مقادیر ویژه ماتریس مجاورت گراف می باشد.

اثبات:
برای اثبات مقادیرویژه ماتریس خروج از مرکز گراف دوری ابتدا فرض می کنیم تعداد راس زوج باشد با استفاده از لم فوق در حالتی که تعداد راس زوج باشد ماتریس S ما همان ماتریس خروج از مرکز گراف دوری C_n می باشد که عناصر s_j $j \neq n/2 + 1$ آن همگی صفر می باشد پس داریم:

$$\lambda_r = s_{n/2} w^{n/2\, r} \quad r = 1, \ldots, n \implies \lambda_r = n/2\; e^{(2\pi i/n)r} = \pm\, n/2 \;. \ \blacksquare$$

3-2: گراف مسیر:

قضیه ۱-۲-۳: مقادیر ویژه ماتریس خروج از مرکز گراف مسیر عبارتند از:

$$\lambda_{ecc}(P_n) = \begin{pmatrix} -(n-1) & 0 & (n-1) \\ 1 & n-2 & 1 \end{pmatrix}$$

اثبات:

با توجه به فرم ماتریس خروج از مرکز گراف مسیرداریم:

$$\det(Ecc(P_n) - \lambda I) = \left| \begin{array}{ccccccccccccc} -\lambda & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & . & . & . & . & . & n-1 \\ 0 & -\lambda & . & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & . & & n-2 \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 & . & . & 0 & n-3 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & n/2 \\ n/2 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ n/2+1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & 0 & . & . & . & . & 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ n-1 & 0 & . & . & . & . & 0 & . & . & . & . & . & -\lambda \end{array} \right|$$

برای به دست آوردن مقادیر ویژه باید معادله $\det(Ecc(P_n) - \lambda I) = 0$ را حل نماییم که با بسط نسبت به سطر اول به ماتریس زیر میرسیم [1]:

$$
=-\lambda * \begin{vmatrix}
-\lambda & . & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & n-2 \\
0 & -\lambda & . & . & . & . & . & . & 0 & n-3 \\
0 & . & -\lambda & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & . & . & . & . & . & . & . & . & n/2 \\
0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\
0 & . & . & . & . & . & . & . & -\lambda & 0 \\
0 & . & . & . & . & 0 & . & . & . & -\lambda
\end{vmatrix}
$$

$$
\pm (n-1) * \begin{vmatrix}
0 & -\lambda & . & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\
. & . & -\lambda & . & . & . & 0 & 0 & . & . & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\
n/2 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
n/2+1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\
. & 0 & . & . & . & . & 0 & . & . & . & -\lambda \\
n-1 & 0 & . & . & . & . & 0 & . & . & . & 0
\end{vmatrix} = 0
$$

ماتریس اول ماتریسی قطری$(n-1)*(n-1)$ با درایه های روی قطر $-\lambda$ است که دترمینان آن برابر λ^{n-1} می شود با احتساب λ پشت دترمینان λ^n بدست می آید حال دترمینان دوم را با بسط نسبت به سطر آخر به ماتریس قطری $(n-2)*(n-2)$ با درایه های روی قطر λ – میرسیم که دترمینان آن $(n-1)^2\lambda^{n-2}$ می شود پس چند جمله ای مشخصه به صورت$(-1)^n\lambda^n \pm (n-1)^2\lambda^{n-2} = 0$ است که مقادیرویژه برابر $0,\pm(n-1)$ می باشد و حکم ثابت است.■

3-3: گراف ستاره:

قضیه ۱-۳-۳: مقادیر ویژه خروج از مرکز گراف ستاره را به صورت زیر است.

$$
\lambda_{ecc}(S_n) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2(n-2) \\ (n-2) & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

اثبات:

با توجه به فرم ماتریس خروج از مرکز گراف ستاره داریم:

$$
\operatorname{Det}(ECC(S_n) - \lambda I_n) = \begin{vmatrix}
-\lambda & 1 & . & . & . & . & . & . & 1 \\
0 & -\lambda & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 2 & -\lambda & 2 & . & . & . & . & 2 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 2 & . & 2 & 0 & 2 & . & . & 2 \\
0 & 2 & . & . & 2 & 0 & 2 & . & 2 \\
0 & 2 & . & . & . & . & . & 2 & -\lambda
\end{vmatrix}
$$

$$= -\lambda * \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -\lambda & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & 2 & -\lambda & 2 & \cdot & \cdot & 2 \\ 2 & \cdot & \cdot & 2 & -\lambda & 2 & \cdot & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & -\lambda \end{vmatrix}_{(n-1)*(n-1)} = -\lambda * \begin{vmatrix} -\lambda-2 & 2+\lambda & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -\lambda-2 & 2+\lambda & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda-2 & 2+\lambda & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2+\lambda & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -\lambda-2 \end{vmatrix}_{(n-1)*(n-1)}$$

$$= -\lambda * -\lambda-2 * \left(\begin{vmatrix} -\lambda-2 & 2+\lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -\lambda-2 & 2+\lambda & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -\lambda-2 \end{vmatrix}_{(n-2)*(n-2)} \pm (2+\lambda) \begin{vmatrix} 2+\lambda & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -\lambda-2 & 2+\lambda & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -\lambda-2 & 2+\lambda & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -\lambda-2 & 2+\lambda \end{vmatrix}_{(n-2)} \right)$$

$$= -\lambda * (2+\lambda)^{n-2} * (\lambda - (2n-4)) \cdot \blacksquare$$

اثبات در حالت تعداد رئوس فرد نیز به صورت مشابه است.

3-4: گراف کامل:

قضیه ۱-۴-۳: مقادیر ویژه خروج از مرکز گراف کامل به صورت زیر است.

$$\lambda_{ECC}(K_n) = \begin{pmatrix} -1 & n-1 \\ n-1 & 1 \end{pmatrix}$$

اثبات : با توجه به یکسان بودن ماتریس مجاورت و خروج از مرکز برای اثبات مقادیر ویژه می توان اثبات مقادیرویژه ماتریس مجاورت را در مرجع [5] مشاهده نمود.

3-5: گراف کامل دو بخشی :

لم۱-۵-۳ : اگر ماتریس بلوکی به صورت زیر باشد مقادیر ویژه آن با مقادیر ویژه دو بلوک روی قطر برابر است به عبارتی

$$\mathrm{eig}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \{eig\ A\ , eig\ B\}$$

اثبات:

در مرجع [6] می باشد.

قضیه ۱-۵-۳: مقادیر ویژه خروج از مرکز گراف کامل دو بخشی به صورت زیر است.

$$\lambda_{ECC}(K_{m,n}) = \begin{pmatrix} -2 & 2(m-1) & 2(n-1) \\ (m+n-2) & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad m, n \neq 1$$

$$\lambda_{ECC}(K_{m,m}) = \begin{pmatrix} -2 & 2(m-1) \\ (2m-2) & 2 \end{pmatrix}$$

اثبات:

با توجه به فرم ماتریس خروج از مرکز گراف کامل دوبخشی داریم:

$$\mathrm{Det}\,(\,ECC(K_{m,n}) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & . & . & . & 2 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 & . & . & 2 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 2 & 2 & -\lambda & 2 & . & 2 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 2 & 2 & . & . & . & -\lambda & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & -\lambda & 2 & . & . & . & 2 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 2 & -\lambda & 2 & . & . & 2 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 2 & 2 & -\lambda & 2 & . & 2 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 2 & 2 & 2 & -\lambda & . & 2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 2 & . & . & . & 2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

با توجه به اینکه ماتریس خروج از مرکز گراف کامل دوبخشی یک ماتریس بلوکی با دو بلوک صفر است از لم بالا استفاده می کنیم به عبارتی:

$$\mathrm{Det}\,(\,ECC(K_{m,n})_{11} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & . & . & . & 2 \\ 2 & -\lambda & 2 & . & . & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda & 2 & . & 2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 2 & 2 & . & . & . & -\lambda \end{vmatrix}_{m*m}$$

که با اعمال سطری مقدماتی به چندجمله ای مشخصه زیر می رسیم:

$$= (\lambda - 2(m-1))\,(\lambda+2)^{m-1}$$

و برای بلوک آخر نیز داریم:

$$\mathrm{Det}\,(\,ECC(K_{m,n})_{22} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & . & . & . & 2 \\ 2 & -\lambda & 2 & . & . & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda & 2 & . & 2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 2 & 2 & . & . & . & -\lambda \end{vmatrix}_{n*n}$$

که با اعمال سطری مقدماتی به چندجمله ای مشخصه زیر می رسیم:

$$= (\lambda - 2(n-1))\,(\lambda+2)^{n-1}$$

پس در مجموع مقادیر ویژه این ماتریس به صورت زیر اثبات می شود.

$$\lambda_{ECC}\,(K_{m,n}) = \begin{pmatrix} -2 & 2(m-1) & 2(n-1) \\ (m+n-2) & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

و در صورتی که m=n باشد نیز واضح است.■

4 – انرژی ماتریس خروج از مرکز گراف و ارتباط آن با انرژی ماتریس مجاورت

طبق تعریف انرژی هر گراف برابر با مجموع قدرمطلق مقادیر ویژه ماتریس گراف است حال در این بخش به بررسی انرژی گراف در حالت ماتریس خروج از مرکز و ماتریس مجاورت می پردازیم و همچنین بررسی می کنیم که کدام گراف ها در این دو نوع ماتریس انرژی یکسان دارند[4].

۴-۱: گراف دوری:

قضیه ۱-۱-۴: در گراف دوری رابطه زیربین انرژی ها برقرار است.

$E_{ECC}(C_n) > E_A(C_n)$.

اثبات:

همانطور که می دانیم مقادیر ویژه ماتریس مجاورت گراف دوری برابر با $\lambda_A = 2\cos(2\pi j/n)$ می باشد و با توجه به روابط نسبت های مثلثاتی داریم: $-1 \le \cos(\theta) \le 1$ یعنی بزرگترین مقدار ویژه λ_A ماتریس مجاورت برابر با ۲ است حال مقدار ویژه خروج از مرکز برابر $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ می باشد (از نظر قدر مطلق) و با توجه به اینکه این مقدار برای گراف دوری زوج بیان شده کوچکترین عدد زوج ۲ است که دور ندارد پس عدد ۴ را برای تعداد رأس باید در نظر گرفت که نصف آن مساوی ۲ است که ۴ بار تکرار می شود پس در مقایسه با ماتریس مجاورت از مقادیر ویژه بزرگتری برخوردار است و گراف دوری با تعداد رأس فرد نیز طبق رابطه بخش قبل $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ برابر مقادیر ویژه ماتریس مجاورت است پس در نتیجه نشان دادیم که $E_{ECC}(C_n) > E_A(C_n)$ می باشد.[3] ■

۴-۲: گراف مسیر:

قضیه ۱-۲-۴: در گراف مسیر رابطه زیر بین انرژی ها برقرار است.

$E_{ECC}(P_n) => E_A(P_n)$.

اثبات:

در حالت گراف مسیر نیز مانند صورت بالا مقادیر ویژه ماتریس مجاورت آن $\lambda_A = 2\cos(\pi j/n + 1)$ می باشد که $-1 \le \cos(\theta) \le 1$ پس $-2 \le \lambda_A \le 2$ می باشد اما قدر مطلق مقادیرویژه ماتریس خروج از مرکز به صورت $2(n-1)$ است که با توجه به بحث حاضر داریم:

$E_{ECC}(P_n) => E_A(P_n)$■

4-3 : گراف ستاره:

قضیه ۱-۳-4: در گراف ستاره رابطه زیر بین انرژی ماتریس مجاورت و انرژی ماتریس خروج از مرکز برقرار است.

$E_{ECC}(S_n) => E_A(S_n)$.

اثبات:

دراین حالت مقادیر ویژه مخالف صفر ماتریس مجاورت آن به صورت $\pm\sqrt{n-1}$ است که انرژی ماتریس مجاورت ان به صورت $2\sqrt{n-1}$ می شود پس به عبارتی داریم $E_{S_n} = 2\sqrt{n-1}$ و مقادیر ویژه مخالف صفر ماتریس خروج از مرکز ستاره به صورت $2(n-2)$, $2(n-2)$ می باشد یعنی

$E_{ECC}(S_n) = 2*|2n-4|$

می باشد که مشخص است از انرژی مقادیر ویژه ماتریس مجاورت بیشتر است به عبارتی:

$E_{ECC}(S_n) => E_A(S_n)$■

۴-4: گراف کامل:

فضیه ۱-۴-4: در گراف کامل داریم:

$E_{ECC}(K_n) = E_A(K_n)$.

اثبات:

با توجه به برابری ماتریس مجاورت و ماتریس خروج از مرکز و ماتریس مسافت در گراف کامل داریم:

$E_{ECC}(K_n) = E_A(K_n)$ & $\lambda_A = \lambda_{ECC}$ ■

4-5: گراف دوبخشی کامل:

قضیه ۱-۵-4: در گراف دوبخشی کامل رابطه زیر بین انرژی ماتریس های آن برقرار است:

$E_{ECC}(K_{n,m}) = E_A(K_{n,m})$.

اثبات:

انرژی ماتریس مجاورت گراف دوبخشی کامل برابر $\sqrt{nm}$ ۲ می باشد حال انرژی خروج از مرکز آن را به دست می آوریم:

$E_{ECC}(K_{n,m}) = |2(m+n-2)| + |2(m+n-2)|$

که با توجه به این دو رابطه مشاهده می شود که

$E_{ECC}(K_{n,m}) = E_A(K_{n,m})$■

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از ماتریس خروج از مرکز انرژی جدیدی را معرفی نمودیم و رابطه آن را با انرژی مقادیر ویژه ماتریس مجاورت بیان نمودیم و نشان دادیم که با تبدیل ماتریس مجاورت به ماتریس خروج از مرکز انرژی بالاتر می رود و بسیار افزایش می یابد. اما برای ادامه کار می توان در مورد مسافت و شعاع نیز بحث نمود که رابطه بسیار نزدیک به خروج از مرکز دارد.

6. مراجع

[1] A. Brouwer, W. H. Haemers, " Spectra of graphs," Linear Algebra and its Applications ,February 1, 2011.

[2] D. B. West, " Introduction to Graph theory," University ofIllinois Urbana, 2001.

[3] F. Atik and P. Panigrahi, " On the distance spectrum of distance regular graphs," Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Kharagpur, India. 478 (2015) 256–273.

[4] L. You and M. Yang, " Spectrum of a class of matrices and its applications," School of Mathematical Sciences, South China Normal University, arXiv:1612.00648v1 , Dec 2016.

[5] N. Biggs, "Algebraic Graph Theory," London School of Economics, 1970.

[6] R. B. Bapat, "Graphs and matrices," ,Indian statistical india, 2014.