بررسی جواب یکتاوپایداری معادله ی تاخیر نوسان کسری غیرهمگن بااستفاده از کنترل گر فازی ماتریس مقدار رایت

زهرا عیدی نژاد[1]، رضا سعادتی [*،۲]

۱- زهرا عیدی نژاد، دانشکده ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، نارمک، تهران

۲- رضا سعادتی، دانشکده ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، نارمک، تهران

چکیده

در این مقاله با استفاده از قضیه ی دیاز و مارگولیز(نقطه ی ثابت آلترناتیو) و با در نظر گرفتن تابع کنترل فازی ماتریس مقدار رایت، وجود جواب منحصر بفرد و پایداری هایرز اولام رایت را برای معادله نوسان تاخیری غیرهمگن کسری از مرتبه ی k در فضای فازی ماتریس مقدار ثابت می کنیم.

کلمات کلیدی: پایداری هایرز اولام رایت، معادله کسری غیرهمگن، روش نقطه ثابت آلترناتیو.

۱. مقدمه

یکی از مباحث مهم در ریاضیات و به ویژه در آنالیز ریاضی، حساب کسری است. خوساینوف و شاکلین [۱] با استفاده از تابع نمایی تاخیری، جواب دقیق یک معادله نوسان تاخیر کسری غیر همگن [۲] را برای $k=1$ در سال ۲۰۰۵ارائه کردند. علاوه بر این، لیانگ و همکاران[۶] حل معادله دیفرانسیل کسری را با عبارتی که مشتقات کاپوتو دوگانه را شامل می شود، با مرتبه $0 < k < 1$ به دست آوردند. در این مقاله ما فضای فازی باناخ ماتریس مقدار معرفی شده در[۷] و یک کلاس مدرن از تابع کنترل فازی ماتریس مقدار براساس توابع رایت در نظر می گیریم. هدف اصلی ما به دست آوردن یک تقریب برای معادله نوسان تاخیری کسری غیرهمگن با استفاده از قضیه نقطه ثابت آلترناتیو در فضای فازی باناخ ماتریس مقدار است.

۲.مقدماتی

در این مقاله ما معادله نوسان تاخیر کسری غیرهمگن زیر را در نظر می گیریم

$$D_0^k\big(u(x)\big)=-\rho u(x-\mu)+K(x)+L^{-1}\big(u(s)\big)(x), \qquad (1)$$

$$u(x)=\varphi(x), \qquad \acute{u}(x)=\acute{\varphi}(x), \qquad (2)$$

که در آن $K: L\times R^n \rightarrow R^n$ یک تابع انتگرال پذیر است و

$u(x)\in R^n, \rho\in R^{n\times n}, \varphi\in C^2([-\mu,0],R^n)$. همچنین $D_0^k(x)$ مشتق کسری کاپوتو با $k\epsilon(1,2)$ است که بصورت زیر تعریف میشود:

$$D_0^k u(x)=\int_0^x \frac{(x-y)^{1-k}}{\Gamma(\Gamma\text{-}k)} u''(y)dy.$$

اگر انتگرال وجود داشته باشد.

L^{-1} تبدیل معکوس لاپلاس کلاسیک است که بصورت زیر تعریف میشود:

$$L(k)(x)=\int_0^{\infty} k(x)e^{-sx}dx\,,$$

ما مجموعه همه ی ماتریس های $n \times n$ را روی $[0,1]$ بصورت زیر تعریف میکنیم:

$$\text{diagMn}([0,1])=\left\{\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}, a_1,\ldots,a_n\in[0,1]\right\}.$$

تعریف.یک نگاشت $\circledast: \text{diagMn}([0,1])\times\text{diagMn}([0,1])\to\text{diagMn}([0,1])$ را یک نرم مثلثی تعمیم یافته می گوییم،اگر خاصیت های مرزی،تقارنی،شرکت پذیری و یکنواختی بصورت زیر برای آن برقرار باشد:

$(1) a\circledast 1=a,\ \forall\ a \in\text{diagMn}([0,1]),$

$(2) a \circledast b=b \circledast a\ ,\ \forall(a,b)\in(\text{diagMn}([0,1]))^2,$

$(3) a \circledast(b \circledast c)=(a \circledast b)\circledast c,\ \forall(a,b,c)\in(\text{diagMn}([0,1]))^3,$

$(4) a_1\leq a_2\ ,\ b_1\leq b_2\to a_1\circledast b_1\leq a_2\circledast b_2,$
$\forall(a_1,b_1,a_2,b_2)\in(\text{diagMn}([0,1]))^4,$

(۵)برای هر $a,b\in\text{diagMn}([0,1])$ و هر دنباله $\{a_k\}$ و $\{b_k\}$ همگرا به a و b داریم:

$$\lim_{k\to\infty}(a_k \circledast b_k)=a\circledast b.$$

نرم مثلثی پیوسته مینیمم،نرم مثلثی پیوسته حاصل ضرب و نرم مثلثی پیوسته لوکاسیویچ از جمله مهمترین نرم های مثلثی هستند.

مهمترین نرم های مثلثی پیوسته:

(۱)نرم مثلثی پیوسته مینیمم که بصورت زیر تعریف می شود:

$a\circledast_M b=\text{diag}[a_1,\ldots,a_n]\circledast\text{diag}[b_1,\ldots,b_2]\ =\text{diag}[\min\{a_1,b_1\},\ldots,\min\{a_n,b_n\}],$

(۲)نرم مثلثی پیوسته حاصل ضرب بصورت زیر تعریف میشود:

$a \circledast_p b=\text{diag}[a_1,\ldots,a_n]\circledast_p\text{diag} =\text{diag}[a_1.b_1,\ldots,a_n b_n],$

(۳)نرم مثلثی پیوسته لوکاسیویچ به صورت زیر تعریف می شود:

$a \circledast_L b=\text{diag}[a_1,\ldots,a_n]\circledast_L\text{diag}[b_1,\ldots,b_n] = diag[max\{a_1+b_1-1,0\},\ldots,\max\{a_n+b_n\text{-}1,0\}].$

تعریف. فرض کنید $\circledast$ یک نرم مثلثی پیوسته تعمیم یافته و J یک فضای برداری باشد.فرض کنید

$$N:J\times(0,\infty)\to\text{diagMn}([0,1]),$$

یک مجموعه فازی ماتریس مقدار باشد. $(N, J,\circledast)$ یک فضای نرم دار فازی ماتریس مقدار است اگر

$1) N(x,t)=\mathbf{1}\leftrightarrow x=0, t\in(0,\infty),$

$$2)N(\alpha x,t)=N\left(x,\frac{t}{|\alpha|}\right)\ \forall\ x\in J,\alpha\in C,\alpha\neq 0,$$
$$3)N(x+y,t+s)\geq N(x,t)\circledast N(y,s)\quad \forall\ x\in J,s,t\in(0,\infty),$$
$$4)\ \lim_{t\to\infty} N(x,t)=\mathbf{1},\forall\ t\in(0,\infty).$$

ما تابع رایت فازی ماتریس مقدار را بصورت

$w_{\alpha,\beta}:[0,P]\times(0,\infty)\rightarrow diagMn([0,1])$ بعنوان تابع کنترل در فضای فازی ماتریس مقدار بصورت زیر تعریف میکنیم:

$$\mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(\frac{-\|x\|}{t}\right)=\mathrm{diag}\left[\mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(\frac{-\|x\|}{t}\right),\mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(\frac{-\|x\|}{t}\right),\mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(\frac{-\|x\|}{t}\right)\right],$$

که در آن تابع رایت بصورت

$$\mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(\frac{-\|x\|}{t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{-\|x\|}{t}\right)^n,}{n!\,\Gamma(n\alpha+\beta)}.$$

تعریف میشود.

قضیه نقطه ثابت آلترناتیو. فرض کنید که (Y,d) یک فضای متریک کامل تعمیم یافته باشد.همچنین نگاشت انقباضی F را روی Y در نظر میگیریم به طوری که برای هر $y,t\epsilon Y$ داریم:$d(Fy,Ft)\leq kd(y,t)$ که $k<1$ ضریب لیپ شیتس است.فرض کنید که $y\in Y$ در این صورت دو حالت برای ما برقرار است.

$$(I)\ d(F^m y,F^{m+1}y)=\infty,\qquad \forall\, m\in N$$

یا

$$(II)d\left(F^m y,F^{m+1}y\right)<\infty,\qquad \forall\ m\geq m_0,m_0\in N$$

در صورت برقراری شرط دوم موارد زیر به طور همزمان برقرار است:

۱)دنباله $\{F^m y\}$ به نقطه ثابت t^* از F همگراست.

۲)نقطه ثابت t^* در مجموعه $V=\{t\in Y|d(F^{m_0}y,t)<\infty\}$ قرار دارد.

۳)برای هر $t\in Y$ داریم:

$$(1-k)d\left(t,t^*\right)\leq d(t,Ft).$$

بحث ۳. پایداری هایرز اولام رایت برای معادله نوسان تاخیر کسری غیر همگن

قضیه. فرض کنید $(N,J,\circledast)$ یک فضای باناخ فازی ماتریس مقدار باشد.ضریب ثابت $0<\theta<1$ را در نظر می گیریم و فرض می کنیم که شرایط زیر برقرار باشد:

(۱)برای تابع کنترل فازی ماتریس مقدار

$w_{\alpha,\beta}:[0,P]\times(0,\infty)\rightarrow diagMn([0,1])$ بعنوان تابع کنترل داریم:

$$\mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(\frac{-\|(x)(s)\|}{t}\right)\geq\mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(-\frac{\|x\|}{\frac{t}{\theta}}\right),$$

(۲)

$$\left\|s^{k}+pe^{-sb}\right\|\geq 1.$$

(۳)فرض کنید تابع $V:[0,P]\rightarrow J$ یک تابع پیوسته باشد که در شرط زیر صدق میکند:

$$N(D_0^kV(x)+V(x-\mu)-K(x)-L^{-1}(V(s)(x),t)\geq \mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(\frac{-\|x\|}{\frac{t}{\omega}}\right)$$

در این صورت جواب منحصر به فرد $u:[0,P]\rightarrow J$ برای معادله (۱) وجود دارد بطوریکه

$$N(u(x)-v(x),t)\geq\mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(-\frac{\|x\|}{\frac{t}{F\omega}}\right),$$

که در آن $F=\frac{\theta}{1-\theta}$ برای هر $x\in[0,p]$ و $t\in(0,\infty)$.

اثبات. ما مجموعه $Q=\{u:[0,P]\rightarrow J:u \text{ است پیوسته}\}$ را در نظر می گیریم و روی این مجموعه متر کامل تعمیم یافته به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$d(u,v)=\inf\left\{\beta\in[0,\infty):N(u(x)-v(x),t)\geq\mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(-\frac{\|x\|}{\frac{t}{\beta}}\right)\ \forall\ u,v\in Q,x\in[0,P],t\in(0,\infty)\right\},$$

با بررسی شرایط فضای متریک برای $d(x,y)$ به راحتی مشخص میشود که $d(x,y)$ یک متراست.با در نظر گرفتن دنباله $\{V_k\}_k$ و با توجه به همگرایی یکنواخت این دنباله،کامل بودن فضا اثبات میشود.

گام اول.نشان میدهیم که (Q,d) یک فضای متریک تعمیم یافته کامل است.

(۱) $d(u,v)=0$ اگر و فقط اگر $u=v$.فرض میکنیم که $d(u,v)=0$ پس

$$\inf\left\{\lambda\in[0,\infty),N(u(x)-v(x),t)\geq\mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(\frac{-\|x\|}{\frac{t}{\lambda}}\right),\forall u,v\in J,x\in[0,p],t\in(0,\infty)\right\}=0,$$

و بنابراین،

$$N(u(x)-v(x),t)\geq\mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(\frac{-\|x\|}{\frac{t}{\lambda}}\right),$$

برای هر $\lambda\in[0,\infty)$ وقتی که $\lambda\rightarrow 0$ در نامعادله بالا داریم:

$$N(u(x)-v(x),t)=\mathbf{1},$$

پس $u(x)=v(x)$ برای هر $x\epsilon[0,P]$.

(۲)همچنین داریم $d(u,v)=d(v,u)$ برای هر $u,v\epsilon Q$.

(۳)حالا فرض می کنیم $d(u,w)=\alpha_1$ و $d(u,w)=\alpha_2$ که $\alpha_1,\alpha_2\epsilon(0,\infty)$ پس داریم:

$$N(u(x)-w(x),t)\geq\mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(\frac{-\|x\|}{\frac{t}{\alpha_1}}\right)$$

و

$$N(w(x)-v(x),t)\geq \mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(\frac{-\|x\|}{\frac{t}{\alpha_1}}\right)$$

پس داریم:

برای هر $t\epsilon(0,\infty)$.

$$N(u(x)-v(x),(\alpha_1+\alpha_2)t)\geq[N(u(x)-w(x),\alpha_1 t)\circledast N(w(x)-v(x),\alpha_2 t)]\geq$$
$$\mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(\frac{-\|x\|}{t}\right)\circledast \mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(\frac{-\|x\|}{t}\right)=\mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(\frac{-\|x\|}{t}\right),$$

و بنابراین $d(u,v)\leq d(u,w)+d(w,v)$ پس $d(u,v)\leq\alpha_1+\alpha_2$.

برای نشان دادن کامل بودن (Q,d) ما دنباله ی $\{V_k\}_k$ را در (Q,d) در نظر می گیریم.

فرض می کنیم که برای $i\in(0,\infty)$ و $e\in(0,1)$ و $t\in(0,\infty)$ داریم:

$$\mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(\frac{-\|x\|}{t}\right)<1-e,$$

بطوری که $q_0\in N$. حالا فرض می کنیم که $t<i$ برای

$$d(Vq,Vp)<\alpha,\quad \forall\, p,q\geq q_0$$

پس

$$N(V_q(x)-V_p(x),i)\geq N(V_q(x)-V_p(x),\alpha t)\geq \mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(\frac{-\|x\|}{t}\right)<1-e$$

و بنا براین

$$N\left(V_q(x)-V_p(x),i\right)<1-e.$$

بنابراین دنباله ی $\{v_k\}_k$ یک دنباله کوشی روی مجموعه فشرده $[0,P]$ است. پس همگرای یکنواخت به نگاشت $V:[0,P]\to J$ است.

با توجه به خواص همگرایی یکنواخت ما نتیجه می گیریم که v یک تابع پیوسته و متعلق به Q است.

بنابراین (Q,d) کامل است.

گام دوم.ما نگاشت $\Delta: Q\to Q$ را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$\Delta\left(u(x)\right)=L(D_0^k u(x)+pu(x-\mu)-k(x)(s)$$
$$=\left(s^k+pe^{-sb}\right)\left(Lu(x)\right)(s)-s^{k-1}\varphi(0)-s^{k-2}\varphi'(0)+pe^{-sb}\int_{-b}^{0}e^{-sb}\varphi(x)dx-L(k(x))(s),$$

برای هر $x\in[0,P]$ نشان می دهیم که Δ یک عملگر انقباضی است.

فرض می کنیم که $u,v\in Q$ و ضریب $\beta_{uv}\epsilon[0,\infty)$ را در نظر می گیریم.بطوریکه $d(u,v)\leq\beta_{uv}$ پس:

$$N(u(x)-v(x),\beta_{uv}t)\geq \mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(\frac{-\|x\|}{t}\right),$$

برای همه ی $u,v\in Q$، $x\in[0,P]$، $t\in(0,\infty)$. با توجه به ویژگی های دوم و سوم نرم فازی داریم:

$$N(\Delta u(x)-\Delta u(x),\beta_{uv}t)=$$
$$N(\|(s^k+pe^{-sb})L(u(x)(s)-s^{k-1}\varphi(0)-s^{k-2}\varphi'(0)+pe^{-sb}\int_{-b}^{0}e^{-sb}\varphi(x)dx-L(k(x))(s)$$
$$-(s^k+pe^{-sb})L(v(x)(s)+s^{k-1}\varphi(0)-s^{k-2}\varphi'(0)pe^{-sb}\int_{-b}^{0}e^{-sb}\varphi(x)dx+L(k(x))(s)\|,t)=$$
$$N(\|(s^k+pe^{-sb})L(u(x))(s)-(s^k+pe^{-sb})L(v(x)(s)\|,t)=$$
$$N\left(\left\|(s^k+pe^{-sb})L(u(x)-v(x))(s)\right\|,t\right)=$$
$$N\left(L(u(x)-v(x))(s),\frac{t}{\|(s^k+pe^{-sb})\|}\right)\geq \mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(\frac{-(L(x))(s)}{\frac{t}{\beta_{uv}\|s^k+pe^{-sb}\|}}\right)$$
$$\geq \mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(\frac{-\|x\|}{\frac{t}{\beta_{uv}\theta\|s^k+pe^{-sb}\|}}\right)\geq \mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(\frac{-\|x\|}{\frac{t}{\beta_{uv}\theta}}\right),$$

و این یعنی $d(\Delta u,\Delta v)\leq\theta\beta_{uv}$ و بنابراین

$$d(\Delta u,\Delta v)\leq\theta d(u,v),$$

بطوریکه $0<\theta<1$ پس Δ یک عملگر انقباضی است.

گام سوم. ما نشان می دهیم که $d(\Delta(u),u)<\infty$. فرض می کنیم که $v\in Q$ داریم:

$$N(\Delta(u(x))-u(x),t)=$$
$$N\left(L\left(D_0^k u(x)+pu(x-\mu)-k(x)\right)(s)-u(x),t\right)=$$
$$N((s^k+pe^{-sb})L(u(x))(s)-s^{k-1}\varphi(0)-s^{k-2}\varphi'(0)$$
$$+pe^{-sb}\int_{-b}^{0}e^{-sb}\varphi(x)dx-L(k(x))(s)-u(x),t)\geq \mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(\frac{-L\|x\|(s)}{\frac{t}{\omega}}\right)\geq \mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(-\frac{\|x\|}{\frac{t}{\omega\theta}}\right).$$

بنابراین

$$(A)\quad d(\Delta u,u)\leq\omega\theta\leq\infty,\ \theta<1,$$

برای هر $t\in(0,\infty)$ پس داریم:

$$d(\Delta u,u)<\infty.$$

بنابراین تمام شرایط قضیه نقطه ثابت آلترناتیو برای ما برقرار است.پس:

(۱)دنباله $\{\Delta^n v\}$ به نقطه ثابت u همگراست.

(۲)عضو یکتای u در مجموعه ی $Q^*=\{v\in Q:d(\Delta v,v)<\infty\}$ است و نقطه ی ثابت Δ است یعنی $\Delta u=u$ یا

$$u(x)=(s^k+pe^{-sb})L(u(x))(s)-s^{k-1}\varphi(0)-s^{k-2}\varphi'(0)+pe^{-sb}\int_{-b}^{0}e^{-sb}\varphi(x)dx-L(k(x))(s)$$

از آنجایی که u یک تابع پیوسته است، با قرار دادن تابع u در معادله *(1)* و گرفتن لاپلاس از طرفین این معادله ثابت می شود که u جوابی از معادله است.بنابراین:

$$D_0^k u(x)=-pu(x-\mu)+k(x)+L^{-1}(u(x))(s)$$

(۳)با استفاده از نامساوی *(A)* داریم:

$$d(u,u)\leq\frac{1}{1-\theta}d(\Delta u,u)\leq\frac{\omega\theta}{1-\theta}.$$

بنابراین پایداری هایرز اولام رایت برای معادله (۱) برقرار است.

حالا نشان می دهیم که u منحصر بفرد است.برای راحتی کار قرار می دهیم:

$$\delta=\frac{\omega\theta}{1-\theta}.$$

فرض می کنیم که h تابع پیوسته دیگری باشد که در معادله (۱) صدق می کند.نشان میدهیم که h نقطه ثابت Δ و $h\in Q^*$ است.

حالا نشان می دهیم که $d(\Delta u,h)<\infty$. فرض می کنیم که $u\in Q$ و $d(u,h)<\delta$. بنابراین داریم:

$$N\left(\Delta\left(u(x)\right)-h(x),t\right)=$$

$$N\left(L\left(D_0^k u(x)+pu(x-\mu)+k(x)\right)(s)-h(x),t\right)=$$

$$N(\left(s^k+pe^{-sb}\right)L\left(u(x)\right)(s)-s^{k-1}\varphi(0)-s^{k-2}\varphi'(0)+pe^{-sb}\int_{-b}^{0}e^{-sb}\varphi(x)dx-L\left(k(x)\right)(x)$$

$$-\left(s^k+pe^{-sb}\right)L\left(h(x)\right)(s)+s^{k-1}\varphi(0)+s^{k-2}\varphi'(0)pe^{-sb}\int_{-b}^{0}e^{-sb}\varphi(x)dx+L\left(k(x)\right)(s),t)$$

$$=N\left(\left(s^k+pe^{-sb}\right)L\left(v(x)\right)(s)-\left(s^k+pe^{-sb}\right)L\left(h(x)\right)(s),t\right)$$

$$=N\left(\left(s^k+pe^{-sb}\right)L\left(v(x)-h(x)\right)(s),t\right)$$

$$\geq \mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(\frac{-\|L(x)(s)\|}{\frac{t}{\delta\|s^k+pe^{-sb}\|}}\right)\geq \mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(\frac{-\|x\|}{\frac{t}{\delta\theta\|s^k+pe^{-sb}\|}}\right)\geq \mathbf{w}_{\alpha,\beta}\left(\frac{-\|x\|}{\frac{t}{\delta\theta}}\right),$$

پس:

$$d(\Delta u,h)<\theta_\delta<\infty.$$

بخش ۴.

در این قسمت یک مثال عددی از نتایج بدست امده ارائه می دهیم:

مثال.معادله نوسان تاخیر کسری غیرهمگن زیر را در نظر می گیریم

$$D_0^{\frac{1}{2}}u(x)=-pu\left(x-\frac{1}{v}\right)+\frac{(x-1)^{\frac{-1}{4}}\sin(x-1)}{64\left(1+\sqrt{x-1}\right)(1+|x|)}+L^{-1}(u(s)(x)),$$

$$u(x)=[u1(x),u2(x)]^T,$$

$$Q(x)=[3x,4x^2]^T,-b\leq x\leq 0,$$

بطوری که $\theta=\frac{1}{4}$ و $k=\frac{1}{2}$ و $b=\frac{1}{7}$ و $p_0=\frac{3}{5}$ و $p=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & 0\\ 0 & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$.

فرض می کنیم که شرایط زیر برقرار باشد:

$$w_{\frac{1}{2},\beta}\left(\frac{-\|L((s))(x)\|}{t}\right)\geq w_{\frac{1}{2},\beta}\left(\frac{-\|x\|}{4t}\right)$$ ‎-۱

۲-اگر تابع پیوسته $v\in C([0,P],J)$ موجود باشد بطوری که

$$N\left(D_0^{\frac{1}{2}}u(x)+pu\left(x-\frac{1}{v}\right)-\frac{(x-1)^{\frac{-1}{4}}\sin(x-1)}{64\left(1+\sqrt{x-1}\right)(1+|x|)}-L^{-1}\left(u(s)\right)(x),t\right)$$

$$=\mathrm{diag}\left[w_{\frac{1}{2},\beta}\left(-\frac{\left\|D_0^{\frac{1}{2}}u(x)+pu\left(x-\frac{1}{v}\right)-\frac{(x-1)^{\frac{-1}{4}}\sin(x-1)}{64\left(1+\sqrt{x-1}\right)(1+|x|)}-L^{-1}\left(u(s)\right)(x)\right\|}{t}\right)\right.$$

$$,w_{\frac{1}{2},\beta}\left(-\frac{\left\|D_0^{\frac{1}{2}}u(x)+pu\left(x-\frac{1}{v}\right)-\frac{(x-1)^{\frac{-1}{4}}\sin(x-1)}{64\left(1+\sqrt{x-1}\right)(1+|x|)}-L^{-1}\left(u(s)\right)(x)\right\|}{t}\right)$$

$$\left.,w_{\frac{1}{2},\beta}\left(-\frac{\left\|D_0^{\frac{1}{2}}u(x)+pu\left(x-\frac{1}{v}\right)-\frac{(x-1)^{\frac{-1}{4}}\sin(x-1)}{64\left(1+\sqrt{x-1}\right)(1+|x|)}-L^{-1}\left(u(s)\right)(x)\right\|}{t}\right)\right],$$

پس v در نامعادله ی زیر هم صدق می کند:

$$N\left(v(x)-\left(s^k+pe^{-sb}\right)L\left(v(x)\right)(s)-s^{k-1}\varphi(0)-\right.$$

$$\left.s^{k-2}\varphi'(0)+pe^{-sb}\int_{-b}^{0}e^{-sb}\varphi(x)dx-L\left(\frac{(x-1)^{\frac{-1}{4}}\sin(x-1)}{64\left(1+\sqrt{x-1}\right)(1+|x|)}\right)(s),t\right)$$

$$=\mathrm{diag}\left[w_{\frac{1}{2},\beta}\left(-\right.\right.$$

$$\left.\frac{\left\|v(x)-\left(s^k+pe^{-sb}\right)L\left(v(x)\right)(s)-s^{k-1}\varphi(0)-s^{k-2}\varphi'(0)+pe^{-sb}\int_{-b}^{0}e^{-sb}\varphi(x)dx-L\left(\frac{(x-1)^{\frac{-1}{4}}\sin(x-1)}{64\left(1+\sqrt{x-1}\right)(1+|x|)}\right)(s)\right\|}{t}\right)$$

$$,w_{\frac{1}{2},\beta}\left(-\frac{\left\|v(x)-\left(s^k+pe^{-sb}\right)L\left(v(x)\right)(s)-s^{k-1}\varphi(0)-s^{k-2}\varphi'(0)+pe^{-sb}\int_{-b}^{0}e^{-sb}\varphi(x)dx-L\left(\frac{(x-1)^{\frac{-1}{4}}\sin(x-1)}{64\left(1+\sqrt{x-1}\right)(1+|x|)}\right)(s)\right\|}{t}\right)$$

$$,\mathbf{w}_{\frac{1}{2},\beta}\left(\frac{-\left\|v(x)-\left(s^{k}+pe^{-sb}\right)L\left(v(x)\right)(s)-s^{k-1}\varphi(0)-s^{k-2}\varphi'(0)+pe^{-sb}\int_{-b}^{0}e^{-sb}\varphi(x)dx-L\left(\frac{(x-1)^{\frac{-1}{4}}\sin(x-1)}{64\left(1+\sqrt{x-1}\right)(1+|x|)}\right)(s)\right\|}{t}\right)\Bigg]$$

$$\geq\mathbf{w}_{\frac{1}{2},\beta}\left(\frac{-L(x)(s)}{\frac{t}{w}}\right)$$

$$\geq\mathbf{w}_{\frac{1}{2},\beta}\left(\frac{-\|x\|}{\frac{4t}{w}}\right),$$

جایی که $Q(x)=[3x,4x^2]^T$.بنابراین یک جواب منحصر به فرد $u\in([0,P],J)$ برای ما وجود دارد که در معادله (۱) صدق می کند.بنابراین داریم:

$$\Delta\left(u(x)\right)=\left(s^{k}+pe^{-sb}\right)L\left(u(x)\right)(s)-s^{k-1}\varphi(0)-s^{k-2}\varphi'(0)+pe^{-sb}\int_{-b}^{0}e^{-sb}\varphi(x)dx-L\left(\frac{(x-1)^{\frac{-1}{4}}\sin(x-1)}{64\left(1+\sqrt{x-1}\right)(1+|x|)}\right)(s).$$

بنابراین $d(u,v)\leq Fw$ و

$$N(u(x)-v(x),t)=diag\left[\boldsymbol{w}_{\frac{1}{2},\beta}\left(\frac{-\|u(x)-v(x)\|}{t}\right),w_{\frac{1}{2},\beta}\left(\frac{-\|u(x)-v(x)\|}{t}\right),\mathbf{w}_{\frac{1}{2},\beta}\left(\frac{-\|u(x)-v(x)\|}{t}\right)\right]$$

$$\geq\mathbf{w}_{\frac{1}{2},\beta}\left(\frac{-\|x\|}{\frac{t}{Fw}}\right),$$

جایی که $F=\frac{1}{3}$

30 mm

25 mm

۵. مراجع

[1] Khusainov, D. Ya.; Shuklin, G. V. On relative controllability in systems with pure delay. (Russian) ; translated from Prikl. Mekh. 41 (2005), no. 2, 118130 Internat. Appl. Mech. 41 (2005), no. 2, 210221.

[2] Liu, L.; Dong, Q.; Li, G. Exact solutions and Hyers-Ulam stability for fractional oscillation equations with pure delay.Appl. Math. Lett. 112 (2021), 106666, 7 pp.F. E. Udwadia and M. D. Trifunac, "Ambient vibration tests of full scale structures," in *Proceeding of the 5th world conference on earthquake engineering, Rome, Italy*, 1973, pp. 1430-1439.

[3] Khusainov, D. Ya.; Diblik, l; Ruzhichkova, M.; Lukacheva, Ya. A representation of the solution of the Cauchy problem for an oscillatory system with pure delay. Nonlinear Oscil. (N. Y.) 11 (2008), no. 2, 276285.

[4] Eidinejad, Z.; Saadati, R.; de la Sen, M. Radu-Mihet method for the existence, uniqueness, and approximation of the Ψ-Hilfer fractional equations by matrix-valued fuzzy controllers. Axioms 10, 2021, no. 2: 63.

[5] Liang, Ch;Wang, J; ORegan, D. Representation of a solution for a fractional linear system with pure delay. Appl. Math.Lett. 77 (2018), 7278.

[6] Kiryakova, V. Some special functions related to fractional calculus and fractional (non-integer) order control systems and equations. Facta Univ. Ser. Autom. Control Robot. 7 (2008), no. 1, 7998.

[7] Podlubny, I. Fractional diferential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional diferential equations, to methods of their solution and some of their applications. Mathematics in Science and Engineering, 198. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1999.

[8] Klement, E. P.; Mesiar, R.; Pap, E. Triangular norms. Trends in Logic Studia Logica Library, 8. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[9] Schweizer, B.; Sklar, A. Probabilistic metric spaces. North-Holland Series in Probability and Applied Mathematics. North-Holland Publishing Co., New York, 1983. xvi+275 pp. ISBN: 0-444-00666-4.

[10] Cadariu, L.; Radu, V. Fixed points and the stability of Jensens functional equation. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.4 (2003), no. 1, Article 4, 7 pp.

[11] Diaz, J. B.; Margolis, B. A fixed point theorem of the alternative, for contractions on a generalized complete metric space. Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 305309.

[12] Kilbas, A. A.; Srivastava, H. M.; Trujillo, J. J. Theory and applications of fractional diferential equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[13] Agarwal, Ravi P.; Benchohra, M; Hamani, S.A survey on existence results for boundary value problems of nonlinear fractional diferential equations and inclusions. Acta Appl. Math. 109 (2010), no. 3, 973–1033.

[14] Zhou, Y; Zhang, L. Existence and multiplicity results of homoclinic solutions for fractional Hamiltonian systems.Comput. Math. Appl. 73 (2017), no. 6, 1325–1345.