# پایداری نامعادلات تابعی در جبرهای نرم دار تصادفی ماتریسی با روش دیاز-مارگولیز

**صفورا رضائی آدریانی [۱], رضا سعادتی [۲]**

**۱-دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران**

**۲-دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران**

**چکیده**

در این مقاله ابتدا به معرفی جبر منگر باناخ ماتریسی می پردازیم و با استفاده از توابع کنترل توزیعی ماتریس مقدار و به کارگیری روش دیاز-مارگولیز، پایداری یک نامعادله تابعی را در این فضا مورد بررسی قرار میدهیم و در پایان تابع کنترل تصادفی میتاگ لفلر را ارایه می دهیم.

**کلمات کلیدی:** پایداری اولام-هایرز-راسیاس، تابع میتاگ لفلر، روش دیاز-مارگولز.

## ۱. مقدمه

در [۱] نویسندگان نامعادله تابعی زیر را در فضاهای باناخ مختلط ارائه و بررسی کردند.

$$\|f(x+y+z)-f(x)-f(y)-f(z)\| \leq \|J_1[f(x+z)-f(x)-f(z)]\| + \|J_2[f(y+z)-f(y)-f(z)]\|,$$

که در $J_1, J_2$ اعداد مختلط ثابت مخالف صفر هستند که $|J_1|+|J_2|<2$.

در این مقاله، ما یک کلاس از توابع کنترل توزیعی ماتریس مقدار را در نظر میگیریم و با استفاده از آنها تقریبی از نامعادله تابعی زیر را در جبرهای منگر باناخ ماتریسی به دست می آوریم.

$$F_t^{Q(j,S+R+A)-Q(j,S)-Q(j,R)-Q(j,A)} \geq F_t^{g_1[Q(j,S+A)-Q(j,S)-Q(j,A)]} \circledast F_t^{g_2[Q(j,R+A)-Q(j,R)-Q(j,A)]},$$

که در آن $g_1, g_2 \in \mathbb{C}$ ثابتهایی هستند $\max\{|g_1|,|g_2|\}<۲$.

## ۲. پیش نیازها

ماتریس قطری زیر را در نظر بگیرید :

$$diagM_n([0,1]) = \left\{\begin{bmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{bmatrix} = diag[m_1,\dots,m_n], m_1,\dots,m_n \in [0,1]\right\}.$$

Safoura_rezaei99@mathdep.iust.ac.ir; rsaadati@iust.ac.ir

در اینجا گوییم $M \coloneqq diag[m_1, \dots, m_n] \le W \coloneqq diag[w_1, \dots, w_n]$ اگر برای هر $m_i \le w_i, 1 \le$ n $\le i$ توجه کنید $1 \coloneqq diag\ [1, \dots, 1]$ و $0 \coloneqq diag\ [0, \dots, 0]$.

t- نرم تعمیم یافته $\circledast: diagN_n([0,1]) \times diagN_n([0,1]) \longrightarrow diagN_n([0,1])$ را با خواص زیر در نظر بگیرید :

(۱) $(\forall M \in diagM_n([0,1])(M \circledast 1) = M)$ ؛

(۲) $(\forall (M, W) \in \left(diagM_n([0,1])\right)^2)(M \circledast W = W \circledast M)$ ؛

(۳) $(\forall (M, W, K) \in (diagM_n([0,1])^3)(M \circledast (W \circledast K) = (M \circledast N) \circledast K)$ ؛

(۴) $(\forall (M, \acute{M}, W, \acute{W}) \in (diagM_n([0,1]^4)\big(M \le \acute{M}\ and\ W \le \acute{W} \Longrightarrow M \circledast W \le \acute{M} \circledast \acute{W}\big)$ ؛

برای هر $M, W \in diagM_n([0,1])$ و هر دنباله $\{M_k\}$ و $\{W_k\}$ که به ترتیب به $M$ و $W$ ، همگرا هستند ، اگر $lim_k(M_k \circledast W_k)$ ، $M \circledast W$ آنگاه $\circledast$ روی $diagM_n([0,1])$ پیوسته است.

مجموعه توابع توزیع ماتریسی $\mathrm{F}^+$ را در نظر بگیرید، که شامل تمام توابع پیوسته و صعودی $F: [-\infty, +\infty] \longrightarrow diagM_n([0,1])$ است به طوری که $F_0 = 0$ و $F_{+\infty} = 1$. اکنون $f^+ \subseteq F^+$ را در نظر بگیرید که شامل تمام نگاشت های $F \in F^+$ است به طوری که $lim_{t \to +\infty} F_t = 1$ .

همچنین

$$\Delta_T^S = \begin{cases} 0, & if\ r \le S, \\ 1, & if\ r > S \end{cases}$$

متعلق به $F^+$ است و برای هر $F \in F^+$ داریم $F \le \Delta^0$.

در این مقاله فرض کنید H یک فضای خطی، $\circledcirc$, $\circledast$ t-نرم های پیوسته تعمیم یافته و $F: H \longrightarrow f^+$ یک تابع توزیع ماتریسی باشد.

سه تایی $(H, F, \circledast)$ را یک فضای منگر نرمدار ماتریسی گوییم اگر خواص زیر برقرار باشند:

(۱) برای هر $t > 0$ , $F_t^s = \Delta_t^0$ اگر و تنها اگر s=0؛

(۲) برای هر $s \in H$ و $0 \ne h \in \mathbb{C}$ داریم $F_t^{hs} = F_{\frac{t}{|h|}}^s$؛

(۳) برای هر $s, \acute{s} \in H$ و $t, \acute{t} \ge 0$ داریم $F_{t+\acute{t}}^{s+\acute{s}} \ge F_t^s \circledast F_{\acute{t}}^{\acute{s}}$.

چهارتایی $(H, F, \circledast, \circledcirc)$ را یک جبر منگر نرمدار ماتریسی گوییم اگر

(۴) برای هر $s, \acute{s} \in H$ و هر $t, \acute{t} \geq 0$ داشته باشیم $F_{t\acute{t}}^{s\acute{s}} \geq F_t^s \odot F_{\acute{t}}^{\acute{s}}$.

یک جبر منگر نرمدار ماتریسی کامل یک جبر منگر باناخ ماتریسی نام دارد.

فرض کنید $Q, \acute{Q}$ جبرهای منگر باناخ ماتریسی باشند. همچنین فرض کنید $(J, \Pi, F)$ یک فضای اندازه پذیر احتمالی و نیز $(\Omega_1, \beta_{\Omega_1})$ و $(\Omega_2, \beta_{\Omega_2})$ فضاهای بورل اندازه پذیر باشند. آن گاه برای هر $S \in \Omega_1$ و $C \in \beta_{\Omega_2}$ نگاشت $Q : J \times \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ یک عملگر تصادفی است اگر $\{j : Q\,(j, s) \in C\} \in \prod$. برای جزئیات بیشتر[۳]و[۴] را ببینید.

**۳ -نتایج اصلی**

مفروضات زیر را در نظر بگیرید :

- $(\Omega_1, F, \circledast, \odot)$ یک جبر منگر باناخ ماتریسی باشد.
- $\emptyset : \Omega_1^3 \to f^+$ یک تابع توزیع ماتریسی باشد به طوری که برای هر $S, R, A \in \Omega_1$ و $t > 0$ داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} \emptyset_{\frac{t}{2^n}}^{\frac{S}{2^n}, \frac{R}{2^n}, \frac{A}{2^n}} = \Delta_t^0$$

- برای هر $S, R, A \in \Omega_1$ و $t > 0$ یک $\beta < 1$ وجود دارد به طوری که $\emptyset_t^{\frac{S}{2}, \frac{R}{2}, \frac{A}{2}} \geq \emptyset_{\frac{2t}{\beta}}^{S,R,A}$
- برای هر $S, R, A \in \Omega_1, j \in J$ و $t > 0$ و عملگر تصادفی $Q : J \times \Omega_1 \to \Omega_2$ داریم Q(j,0)=0 و

$$F_t^{Q(j,S+R+A)-Q(j,S)-Q(j,R)-Q(j,A)} \geq F_t^{g_1[Q(j,S+A)-Q(j,S)-Q(j,A)]} \circledast F_t^{g_2[Q(j,R+A)-Q(j,R)-Q(j,A)]} \circledast \emptyset_t^{S,R,A}$$

آن گاه برای هر $S, R, A \in \Omega_1, j \in J$ و $t > 0$ عملگر جمعی تصادفی $\acute{Q} : J \times \Omega_1 \to \Omega_2$ وجود دارد به طوری که

$$F_t^{Q(j,S)-\acute{Q}(j,S)} \geq \emptyset_{\frac{2(1-\beta)t}{\beta}}^{S,S,0}$$

**۴- Example**

فرض کنید $(\Omega_1, F, \circledast, \odot)$ یک جبر منگر باناخ ماتریسی باشد. همچنین فرض کنید ۱< M و W اعداد حقیقی غیر منفی باشند و $Q : J \times \Omega_1 \to \Omega_2$ یک عملگر تصافی باشد به طوری که برای هر $t > 0$ و $0 < \sigma \leq 1, S, R, A \in \Omega_1, j \in J$ داریم Q(j,0)=0 و

$$F_t^{Q(j,S+R+A)-Q(j,S)-Q(j,R)-Q(j,A)}$$
$$\geq F_t^{g_1[Q(j,S+A)-Q(j,S)-Q(j,A)]} \circledast \Phi_t^{g_2[Q(j,R+A)-Q(j,R)-Q(j,A)]}$$
$$\circledast\, diag\left[\exp\left(-\frac{W(\|S\|^M+\|R\|^M+\|A\|^M)}{t}\right),\right.$$
$$\left.\frac{t}{t+W(\|S\|^M+\|R\|^M+\|A\|^M)}, \Xi_\sigma\left(-\frac{W(\|S\|^M+\|R\|^M+\|A\|^M)}{t}\right)\right],$$

آن گاه یک عملگر جمعی تصادفی یکتای $\acute{\Omega}: J \times \Omega_1 \to \Omega_2$ وجود دارد به طوری که

$$F_t^{Q(j,S)-\acute{Q}(j,S)}$$
$$\geq diag\left[\exp\left(-\frac{2^{M+2}W\|S\|^M}{2(2^M-2)t}\right), \frac{2(2^M-2)t}{2(2^M-2)t+2^{M+2}W\|S\|^M}, \Xi_\sigma\left(-\frac{2^{M+2}W\|S\|^M}{2(2^M-2)t}\right)\right],$$

توجه کنید که $\Xi_\sigma$ , $\sigma \in (0,1]$ , یک تابع میتاگ لفلر است. برای جزییات بیشتر [۲] را ببینید.

## نتیجه گیری

با استفاده از روش دیاز-مارگولیز، به بررسی پایداری یک نامعادله تابعی در جبر منگر باناخ ماتریسی پرداختیم و در پایان تابع کنترل تصادفی میتاگ لفلر را به عنوان مثال ارائه دادیم.

## مراجع

[1] Y. Jin, C. Park, and M. Th. Rassias, *Hom-derivations in $C^*$-ternary algebras*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), 36 (2020), pp. 1025–1038.

[2] S. R. Aderyani, and R, Saadati, *Best approximations of the $\phi$-Hadamard fractional Volterra integro-differential equation by matrix valued fuzzy control functions*, Advances in Difference Equations, 1(2021), pp. 1–21.

[3] M. Madadi, D. O'Regan, Th. M. Rassias, and R. Saadati, *Best approximation of $\kappa$-random operator inequalities in matrix MB-algebras*, Journal of Inequalities and Applications, 1(2021), pp. 1–14.

[4] H. M. Srivastava, R. Saadati, and S. Y. Jang, *Bi-additive $\sigma$-random operator inequalities and random quasi-$*$- multipliers on MB-algebras*, Mathematical Sciences, 1(2021), pp. 1–12.