بررسی روند بازاریابی ویروسی با استفاده از مدل ریاضی به صورت یک معادله انتگرال-دیفرانسیل

سیدحمید حسینی *[۱]، صاحبه آقابابایی پور[۲]، محمدرضا فراهانی[۱]
۱- تهران، نارمک، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده ریاضی، گروه ریاضی کاربردی
۲- نور، دانشگاه آزاد اسلامی واحد نور، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی کاربردی

چکیده

یکی از قدرتمندترین تکنیک های بازاریابی آنلاین، بازاریابی ویروسی است. بازاریابی ویروسی به عنوان عاملی تأثیرگذار بر رفتار مشتریان ابزار جدیدی است که افراد را تشویق می کند در خصوص محصولات یا خدمات شرکت ها در بستر اینترنت، اظهارنظر کنند. ارتقاء برند نیز یکی از مهمترین روش های راهبردی رشد شرکت هاست و همواره در کانون توجه قرار دارد. هدف این پژوهش بررسی میزان رضایتمندی یا عدم رضایتمندی افراد در موقعیت و زمان مشخص با استفاده از مدل ریاضی معادله انتگرال ـ دیفرانسیل در بین نفرات یک جامعه مفروض می باشد. ساختارهای ارتباطی که در سیستم های گسسته یک مجموعه مفروض وجود دارد می تواند به یک معادله انتگرال ـ دیفرانسیل در حالت پیوسته تبدیل شود. تحلیل هایی که بر روی این مدل معادله انتگرال ـ دیفرانسیل انجام می گردد، به نحوی می تواند پاسخ سوالات مهم مانند میزان رضایتمندی و یا عدم رضایتمندی افراد را از محصول یا برند یا.... نشان دهد.

کلمات کلیدی: بازاریابی ویروسی، معادله انتگرال، دیفرانسیل، تقریب انتشار، آنالیز صفحه فازی، جواب موج ساکن

۱. مقدمه

مدل سازی ریاضی عبارت است از توصیف یک پدیده به کمک زبان ریاضی و قضیه ها و نمایش هایش در واقع مدلسازی ریاضی عبارت است از تلاش برای توسعه یک مدل ریاضی برای یک سامانه مشخص. مدلسازی ریاضی نه تنها در علوم طبیعی مانند فیزیک، زیست شناسی، زمین شناسی، هواشناسی و علوم مهندسی مانند علوم رایانه، هوش مصنوعی و غیره کاربرد دارد بلکه در علوم اجتماعی مانند علم اقتصاد و.... نیز کاربردهای گسترده ای دارد. مدل سازی ریاضی بدین معناست که یک مسئله از دنیای واقعی انتخاب شود و سپس به زبان ریاضی ترجمه شود. مدلسازی به پژوهشگران کمک می کند تا یک سامانه را تحلیل کرده و رفتار آن را پیش بینی کنند. سیستم دینامیک، مدل آماری، معادله دیفرانسیل، نظریه بازی ها نمونه هایی از مدل سازی ریاضی برای حل مسائل جهان به شمار می روند.

حال آنکه آیا تا به حال از سایتی دیدن کرده اید که مقاله، کوپن، سرویس ویژه و چیزهای دیگر آن، شما را تحت تأثیر قرار داده باشد. به طوری که بلادرنگ با ارسال ایمیل به دوستان خود آنها را از وجود چنین سایتی باخبر کرده باشید؟ اگر چنین اتفاقی برایتان رخ داده است، در واقع با این کار دست به بازاریابی ویروسی زده اید. بازاریابی ویروسی که اغلب همان

* **Corresponding author:**
Email: Hamidhosseini90@yahoo.com, sahebebabaeepoor@gmail.com, MRFarahani88@gmail.com, Mohammad_Farahani@mathdep.iust.ac.ir

بازاریابی دهان به دهان و یا سینه به سینه است، یک روش بازاریابی کم هزینه و در عین حال بسیار موثر برای بازار محصولات و خدمات در اینترنت است.

در جهان پویای کسب و کار امروزه شرکت ها و به شدت به دنبال کسب مزیت رقابتی هستند تا بتوانند بدین وسیله از رقبای سرسخت خود پیشی بگیرند و بازاریابی ویروسی یک استراتژی در کسب و کار است که باعث ترفیع یک محصول یا خدمت می شود. این ایده زمانی نتیجه می دهد که به یک تبلیغ طی یک چرخه آنلاین از طریق ایمیل، اکانت، یوتیوب یا هر شبکه اجتماعی دیگری به گردش در بیاید و از یک نفر به دیگری منتقل شود. اصطلاح ویروسی شدن یا همان وایرال شدن که اخیراً خیلی به چشم می خورد همان چیزی است که هر تبلیغ کننده ای می خواهد درباره تبلیغات خود بشنود. در واقع ویروس، یک پوشش پروتئینی است که شامل مواد ژنتیک است. ویروس حمله کننده از پوشش پروتئینی خود برای اتصال به یک سلول سالم استفاده می کند. اولین بار که اتصال محکم و قابل اطمینانی صورت پذیرفت، ویروس مواد ژنتیک خود را وارد سلول سالم می کند و به صورت دائمی D.N.A سلول میزبان را تغییر می دهد. یک ویروس نسبتاً موثر می تواند سلول میزبان را تبدیل به یک کارخانه تکثیر ویروس کند.

حال آنکه بازاریابی ویروسی نوعی انتقال دهان به دهان به وسیله اشخاص است که از این مسیر برخی از پیام های بازاریابی پیرامون شرکت، برند و یا محصولات آن از شیوه ابزارهای رسانه ای عمومی (اغلب اینترنت) در سطح وسیعی بین عموم جامعه نشر می یابد. درحال حاضر اینترنت ساختارنویسی از بازاریابی را برقرار کرده اند. بازاریابی ویروسی عبارت است از فنون بازاریابی که در پگی آن بهره گیری از فرصت شبکه های اجتماعی، برای فزونی تناوبی در آگاهی نسبت به برند تجاری بوده و این مهم از طریق فرایند ویروسی شبیه به چرخه یک بیماری اپیدمیک می باشد. بازاریابی ویروسی از طریق شبکه اینترنت کارایی بالایی داشته و توانایی دستیابی سریع به سایرین را دارد.

ابداع روشی با نام ویروس در تبلیغات به سال ۱۹۹۵ بر می گردد که مربوط به دوران ابتدایی بازاریابی دیجیتال می باشد. این روش توسط متفکران آژانس تبلیغاتی CHIAT/DAY که در حال حاضر در سازمان تبلیغاتی بین المللی TBWA ادغام شده است برای اولین بار جهت معرفی اولین دستگاه پلی استیشن مورد استفاده قرار گرفت.

آژانس تبلیغاتی CHIAT/DAY یک کمپین مخفی با ابزار تأثیرگذار در هر منطقه که شامل تیم های خیابانی برند تبانی نمود و در زمینه دستگاه پلی استیشن به تبلیغ پرداخت و توانست در مدت زمان کوتاهی در ذهن بسیاری از افراد غلبه کند و همین ترفند یکی از موفق ترین روش های تبلیغاتی برای فروش محصول پلی استیشن سونی محسوب شد.

درباره اینکه اصطلاح بازاریابی ویروسی از کجا آمده است بحث هایی وجود دارد. اما اگر بخواهیم تاریخ دقیقی از بازاریابی ویروسی بیان کنیم هنوز اختلاف نظرات زیادی در این زمینه وجود دارد اما طبق نظرات متعدد تاریخچه دو کلمه بازارایابی ویروسی به سال ۱۹۹۰ بر می گردد. یکی از اولین منتقدان در مورد بازاریابی ویروسی داگ راشکوف نام دارد که در این زمینه مطلبی منتشر نمود. او بر این عقیده استوار است که وقتی کاربر به تماشای محتوای ویروسی می نشیند متاثر شده و آن را به دیگران به اشتراک می گذارد و به این ترتیب همه کاربران عاملین انتشار ویروس هستند. در سال ۱۹۹۶ یکی از اعضای هیئت علمی، جفری ریپورت این اصطلاح را از طریق مقاله خود «ویروس بازاریابی» که توسط fast company منتشر شد، معرفی کرد. در سال ۱۹۹۶ شرکت سرویس دهنده ایمیل Hotmail با استفاده از پیام تبلیغاتی Get your free email account at Hotmail و ارسال آن به کاربران موفق به افزودن ده ها میلیون کاربر به سرویس Hotmail خود شد.

پس از آن در سال ۱۹۹۹ و فراهم شدن بسترهای اینترنتی دنیل مارک و ادوارد سانچز با استفاده از تکنیک های خلاقانه به معرفی فیلم جدید خود که اولین نمونه از سبک فیلم های شبه مستند بود با نام The Blair witch project پرداختند و سعی کردند که فیلم به صورت ماجرای واقعی در جشم بصری هر بیننده ای مجسم شود و نتیجه تلاش آنها رسیدن به سود ۲۵۰ میلیون دلاری بود که تا آن زمان بی سابقه بود، شد.

باب گرستلی هم یکی از افرادی است که در زمینه بازاریابی ویروسی الگوریتم SNP را در تحقیقات بازاریابی برای شناسایی افراد دارای پتانسیل بالا در شبکه های اجتماعی در سال ۲۰۰۴ معرفی نمود. باب گرستلی از مفهومی با نام کاربر

آلفا برای اعضای هدف هر کمپین تبلیغاتی و از مفهوم هاب برای تأثیرگذاران استفاده کرد. در اوایل ۲۰۱۳ اولین اجلاس بازاریابی ویروسی در لاس وگاس برگزار شد و روش های بازاریابی ویروسی برای رسانه های مختلف مورد شناسایی قرار گرفت. در واقع بازاریابی ویروسی (Viral Marketing) به روش تبلیغ یا بازاریابی ای گفته می شود که معمولاً به صورت مجازی از طریق شبکه اجتماعی موجود یا ایمیل در اینترنت ارائه می گردد و به روش های متفاوتی انجام می شود و یک تکنیک بازاریابی است که از شکبه های اجتماعی موجود برای افزایش تصاعدی «آگاهی از برند» از طریق یک فرایند ویروس مانند بهره می گیرد.

این روش از نظر روش توزیع شبیه ویروس(زیستی) یا ویروس رایانه ای یا میم اینترنت یا Memetics می باشد. و توسط بازاریابی دهان به دهان یا توسط اینترنت و شبکه های موبایل به صورت متن، تصویر، کلیپ یا فیلم کوتاه تصویر متحرک انجام می گیرد. استفاده از بازاریابی ویروسی با ظهور اینترنت و خصوصاً شبکه های اجتماعی در ایران نیز رواج یافت. یکی از پررنگ ترین استفاده از این شکل بازاریابی را یک شرکت فعال در زمینه تفریحات آبی در تابستان ۹۳ با بهره گیری از یک طنز رایج در شبکه های اجتماعی به کار گرفت و نام خود را در قالب یکی از این طنزها بر سر زبان ها انداخت.

از مزایای بازاریابی ویروسی می توان به کم هزینه بودن و پتانسیل دسترسی زیاد و تهاجمی نبودن و کمک به برندسازی اشاره نمود. مدلسازی ویروسی شدن راهی است برای بازاریابان تا موفقیت یک کمپین خاص را پیش‌بینی کنند. شرکت هایی که تبلیغات ویروسی پیاده می کنند، باید آماده هجوم احتمالی مشتریان باشند. این مدل بندی به شرکت ها کمک می کند که شرکت ها بتوانند تعداد مشتریان یا مقدار فروش جدیدی که قرار است در صورت موفقیت آگهی در بازاریابی برایشان ایجاد کنند را تخمین بزنند. این روش ها به شرکت ها کمک می کنند تا خروجی خود را تقویت کنند و دقیقاً محصولاتی را به بازار بفرستند که مشتریان می خواهند.

این پژوهش شامل ۵ قسمت می باشد. در قسمت دوم مدل معادله دیفرانسیل بیان شده است. در قسمت سوم مدل معادله انتگرال ـ دیفرانسیل تعریف شده است و در قسمت چهارم تحلیل عددی این مدل بررسی شده است. در قسمت چهارم جواب های موج یکسان را تعیین می کنیم و در نهایت نتیجه گیری در قسمت پنجم بیان شده است.

۲. مدل معامله دیفرانسیل

نقطه شروع بررسی ها، معادله دیفرانسیل زیر است:

$$\frac{dv_i}{dt} = v_i(1 - v_i)(n_i - r_i) \quad (1)$$

این معادله دارای تابع نرخ پایداری است و در سیستم های شبکه‌ای گسسته مورد استفاده قرار می‌گیرد. در معادله (۱)، تابع $v_i = v_i(t)$ احتمال بروز مشکلات مرتبط با رضایت و یا عدم رضایت مشتری از کالا یا خدمات را برای فرد i در لحظه t مدل سازی می‌کند. (مانند: شکایت، بدگویی، تبلیغ مثبت و منفی و...). فرض‌می‌کنیم این مشکلات مرتبط می‌تواند به‌جای کیفی‌بودن کمی‌درنظرگرفته‌شود. در این‌جا همچنین اصطلاح رضایتمندی افراد و یا عدم رضایتمندی آنها را برای v_{i} درنظرمی‌گیریم. از این پس این تابع را به عنوان تابع شکایت معرفی می‌کنیم، این تابع از نوع توابع احتمالی می‌باشد و مقادیری بین اعداد صفر و یک را اختیار می‌کند. پس اگر فرد i، درجه رضایت بالایی از خدمات یا کالا موردنظر را داشته باشد آنگاه مشتری نه تنها شکایت و تبلیغ منفی در جامعه نخواهد داشت بلکه اثر مثبت به روی نظر افراد در تماس و نزدیک خود خواهد داشت بنابراین $v_{\mathrm{i}} \cong 0$ و اگر فرد i، درجه رضایت پائینی از خدمات یا کالا موردنظر را داشته باشد آنگاه همین فرد شروع کننده جریان و تبلیغ منفی علیه آن کالا و یا خدمات خواهد بود بنابراین $v_{\mathrm{i}} \cong 1$ می‌شود.

تابع اثر $n_i = n_i(t)$ برای اندازه گیری تاثیر نفوذ فکری و احساسی فرد راضی و یا شاکی به روی دیگر افراد جامعه با درنظرگرفتن وزن های w_{ij} می‌باشد.

$$n_i(t) = \sum_j w_{ij} v_j(t), \ (2)$$

به‌طوری‌که $w_{\mathrm{ij}} > 0$، اندازه ارتباط بین فرد i و j می‌باشد. همچنین فرض‌می‌شود که w_{ij} ها نرمال‌شده هستند ($\sum_j \mathrm{w_{ij}} = 1$ برای هر i)، علاوه بر این به‌جز یک حالت خاص می‌توانیم وزن های w_{ij} را متقارن درنظربگیریم ($w_{\mathrm{ij}} = w_{\mathrm{ji}}$ برای هر j و i). r_{i} نیز انعطاف‌پذیری و تاثیرپذیر بودن و یا نبودن مربوط به فرد i می‌باشد($0 \le r_{\mathrm{i}} \le 1$).

هر اندازه r_{i} نزدیک به عدد یک باشد، فرد i در برابر تبلیغات مثبت یا منفی تاثیرناپذیرتر می باشد. ما در این جا میزان انعطاف پذیری افراد را با ثابت r نشان می‌دهیم. همچنین شرط اولیه

$$v_i(0) = g_i \ \ (3)$$

برای تعیین مسئله و جواب آن لازم است.

لازم به ذکر است معادله (۱) دارای یک جواب زمان کوتاه یکتا می باشد که از طریق روش تکراری پیکارد اثبات می شود (خوانندگان محترم برای مشاهده اثبات وجود جواب می توانند به قضیه مربوطه در منبع ۶ مراجعه کنند).

در منابع (۵و۶) مدل شبکه‌ای گسسته برای فرد i از مرحله زمانی m تا $\mathrm{m+1}$ در یک شبکه بزرگ به صورت زیردرنظرگرفته‌شده‌است.

$$\mathrm{v_i^{m+1} - v_i^m = \lambda v_i^m(1 - v_i^m)(n_i^m - r_i)\ n_i^m = \sum_j w_{ij} v_j^m}. \ (4)$$

در اینجا $\mathrm{v_i^m}$ میزان مشکلات مرتبط با رضایت و یا عدم رضایت مشتری از کالا یا خدمات را برای فرد i در زمان $\mathrm{t_m}$ است که مقادیری بین اعداد صفر و یک را اختیار می‌کند و $\lambda > 0$ یک نسبت ثابت می‌باشد. اگر فرض‌کنیم طول گام‌ها کوچک باشند و همچنین زمان را از نو و دوباره مقیاس‌بندی‌کنیم آنگاه معادله دیفرانسیل (۱) به عنوان یک تقریب از معادله شبکه‌ای کامل و بزرگ بالا نتیجه می‌شود.

ارتباط افراد به روی شبکه‌ها، همواره یکی از موضوعات مهم مورد بحث و تحقیق علمی درگذشته و حال بوده است. بخصوص وقتی که اتصال ها و راه های ارتباطی بین نفرات جامعه (گره‌ها) در شبکه یا به صورت تصادفی و یا به صورت از پیش تعین شده تعریف شده باشد. این منابع روابط زیر را پیشنهاد می‌کنند:

$$\lim_{\mathrm{m}\to\infty} \mathrm{v_i^m} = \begin{cases} 1\,, \mathrm{\bar{v}_0} \ > \mathrm{\bar{r}} \\ 0\,, \mathrm{\bar{v}_0} \ < \mathrm{\bar{r}} \end{cases} \ \ (5)$$

در اینجا $\mathrm{\bar{v}_0}$ ، شاخص میانگین و اولیه بروز مشکلات مرتبط با رضایت و یا عدم رضایت مشتری از کالا یا خدمات می‌باشد و شاخص $\mathrm{\bar{r}}$ میانگین انعطاف‌پذیری افراد جامعه مفروض است. زمانی که $\mathrm{\bar{v}_0} \ > \mathrm{\bar{r}}$ باشد، روند و سرعت گسترش تبلیغات منفی افزایش می یابد و آمار تعداد افراد شاکی و ناراضی صعودی می شود، و زمانی‌که $\mathrm{\bar{v}_0} \ < \mathrm{\bar{r}}$باشد، روند گسترش در میان افراد جامعه مورد بررسی به تدریج نزولی خواهد شد. جامعه به طور تحمیلی رو به رضایت از کالا و یا خدمات موردنظر هدایت می‌شود.

در بخش بعدی مدل معادله انتگرال دیفرانسیلی ارائه شده را توسیع خواهیم داد. هدف اصلی از این توسیع قرار دادن مدل های گسسته در یک چارچوب و قالب پیوسته می‌باشد.

این توسیع را با استفاده از کانوولوشن دو تابع v وw انجام خواهیم داد. بررسی و آزمایش این مدل پیوسته واقعی‌تر و کاربردی‌تر از مدل گسسته قبلی می‌باشد. با کمک این مدل پیوسته امکان تحلیل عددی بیشتری به ریاضیدانان داده می‌شود تا با نتایج آن نسبت به شرایط واقعی تصمیم‌گیری کنند. لازم به ذکر است که فرض ما در این مقاله بر این است که جواب یکتایی برای معادله انتگرال- دیفرانسیل ارائه شده وجود دارد اما در اینجا اثباتی از وجود آن ارائه نکردیم.

خوانندگان محترم می‌توانند برای مطالعه اثبات وجود جواب به منبع (۶) مراجعه کنند.

۳. مدل معادله انتگرال – دیفرانسیل

در این بخش یک مدل معادله انتگرال- دیفرانسیل را با استفاده از مطالب بخش گذشته معرفی می‌کنیم. در واقع هدف از ارائه این مدل تعمیم مدل شبکه‌ای گسسته به‌صورت یک مدل پیوسته است.

برای شروع با الهام از مدل شبکه‌ای گسسته بخش قبل مدل انتگرال- دیفرانسیل زیر را پیشنهادمی‌کنیم.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v(1-v)(n-r) \quad (6)$$

دراین مدل $v = v(x,t)$ (تابع شکایت) میزان رضایتمندی افراد و یا عدم رضایتمندی آنها را در موقعیت x و زمان t نشان‌می‌دهد. مشابه آنچه که قبلا بیان‌شده، اگر $v \cong 0$ باشد فرد موردنظر رضایت کافی برای اثر مثبت گذاشتن روی افراد در تماس خود را دارا می‌باشد و همچنین افراد راضی، با توجه به میزان رضایتمندی خودشان تابع شکایت آن ها مقداری را بین صفر و ۱ اختیار می‌کند. واضح است که نفرات ناراضی تابع شکایت نزدیک به ۱ دارند ($v \cong 1$).

تابع $n = n(x,t)$ هم اندازه گیری احتمال تاثیر نفوذ فکری و احساسی فرد راضی و یا شاکی به روی دیگر افراد جامعه را در موقعیت x و زمان t نشان می‌دهد که برابر با کانولوشن دو تابع w و v می‌باشد.

$$n(x,t) = (w * v)(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x-y)v(y,t)dy \quad (7)$$

به‌طوری‌که $w > 0$ تابع وزن یا ردپا ($\int_R wds = 1$) است. این تابع $w = w(s)$ یک پویایی را به مدل تحمیل می‌کندکه در حالت گسسته وجود نداشت.

همچنین فرض‌می‌کنیم که مقدار ($0 \le r \le 1$) نیز ثابت باشد. برای کامل‌کردن مدل، نیاز به شرط اولیه $v(.,0) = v_0$. داریم.

اکنون جامعه ای از نفرات را درنظرمی‌گیریم که به‌طور منظم بروی خط اعداد حقیقی مرتب شده اند، به‌طوری‌که فرد در موقعیت مکانی $x_i = i\Delta x \ (0 < \Delta x \ll 1)$ قراردارد. همانطور که اشاره‌شد فرض بر این است که ارتباطها بین نفرات جامعه با تابع ردپا w مدل بندی شود. با قرار دادن $w_{ij} = \Delta x \, w(x_i - x_j)$ آنگاه می‌توان تابع $n_i(t)$ را در معادله (۱) بوسیله یک انتگرال تقریب کرد.

$$n_i = \sum_j w_{ij}v_j = \sum_j \Delta x \, w(x_i - x_j)v(x_j,.) \quad (8)$$
$$\cong \int w(x_i - y)v(y,.)\,dy = n(x_i,.).$$

حال نوبت به آن رسیده در مورد تاثیرات گسترش نارضایتی تعداد اولیه افراد شاکی و میانگین میزان تاثیرپذیری دیگر نفرات جامعه مفروض که راضی هستند بر روی درصد نهایی افراد جامعه تصمیم گیری انجام شود. در منابع (۶-۸) لم و قضیه مهمی به همراه اثبات آن ها بیان شده است که تحلیل مناسبی از آن می توان استنباط کرد به نحوی که هرگاه متوسط اولیه میزان گسترش نارضایتی از افرادشاکی یک جامعه مفروض از احتمال تاثیرپذیری دیگر نفرات راضی همان جامعه بیشتر باشد در این صورت تابع $v = v(x,t)$ با گذشت زمان به عدد یک میل خواهد کرد و این به این معناست که کل نفرات جمعیت مفروض به مرور زمان ناراضی خواهند شد. واضح است که برعکس این حالت هم قابل بیان کردن می باشد. برای شروع لم مهم زیر برای تابع $v = v(x,t)$ کرانی را فراهم می سازد:

لم۳-۱) فرض‌می کنیم هرگاه تابع $r(x,t)$ برای هر فرد جامعه ثابت باشد و همچنین: $n(x,t) = n(t)$ (مستقل از موقعیت مکانی است)، آنگاه تابع $v = v(x,t)$ در یک موقعیت مشخص بین صفر و یک خواهد بود.

اثبات: خوانندگان محترم رو به منبع (۶) ارجاع می دهیم.

قضیه۳-۱) فرض کنید تابع $r(x,t)$ برای هر فرد جامعه ثابت باشد و موقعیت x اعدادی بین صفر و L اختیار کند، همچنین

$$n(t) = \frac{1}{L}\int_0^L v dr \ \ (9)$$

در این صورت هرگاه متوسط اولیه گسترش نارضایتی از افرادشاکی یک جامعه مفروض از احتمال تاثیرپذیری دیگر نفرات راضی همان جامعه بیشتر باشد در این صورت تابع $\mathrm{v} = \mathrm{v}(\mathrm{x}, \mathrm{t})$ با گذشت زمان به عدد یک میل خواهد کرد و برعکس. اثبات: خوانندگان محترم رو به منبع (۶) ارجاع می دهیم.

۴. تحلیل عددی مدل معادله انتگرال– دیفرانسیل

در بخش گذشته مدل معادله انتگرال ـ دیفرانسیل را با استفاده از کانولوشن دو تابع که بیانگر اثر افراد دیگر در مدل بود، مطرح کردیم. لازم به ذکر است که در کل، به دست آوردن یک جواب صریح برای مدل های IDE بسیار مشکل می باشد. در این فصل، قصد داریم یک تقریب انتشار برای مدل IDE با استفاده از معاملات مشتقات جزئی ارائه کنیم. سپس جواب های موج متحرک را برای معادله تقریب جستجو می کنیم. جواب های موج متحرک جواب هایی هستند که بر اثر گذشت زمان شکلشان دچار تغییر نمی شود و در زمان با سرعت ثابت حرکت می کنند. همچنین استفاده از جواب های موج متحرک در مدل های دارای تعامل و ارتباط جمعیتی به روی یک دامنه فرضی غیر موضعی بسیار متداول می باشد.

۴.۱ تقریب انتشار

برای شروع این بخش تابع وزن $w(s) = \frac{1}{2a}$ را بر روی بازه متقارن $[-a, a]$ با شرط $0 < a \ll 1$ در نظر می گیریم. این تابع ارتباط های نزدیک و بسته را بین همسایه ها نشان می دهد. انتگرال کانولوشن نیز اثر افراد را به واسطه همسایه بودن آنها نشان می دهد.

$$n(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} v(x+z,t)dz. \ (10)$$

با استفاده از بسط تیلور $v(x+z,t)$ حول x و حذف جمله های $O(a^3)$ ، انتگرال فوق به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} v(x+z,t)dz \cong \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\left(v(x,t) + v_x(x,t)z + \frac{1}{2}v_{xx}(x,t)z^2\right)dz \ \ (11)$$

یا

$$n(x,t) \cong v(x,t) + \frac{a^2}{6}v_{xx} \ (12)$$

اکنون تقریب PDE برای مدل IDE به شکل زیر خواهد بود:

$$v_t - \left(D + \frac{\lambda a^2}{6}v(1-v)\right)v_{xx} = \lambda v(r-v)(v-1) \ (13)$$

۴.۲ تکنیک صفحه فازی U-V

روش آنالیز صفحه فازی یکی از مهمترین تکنیک ها برای مطالعه و بررسی رفتار جواب دستگاه های غیرخطی مرتبه دوم است که معمولاً دارای جواب تحلیلی نمی باشد. در این روش باتوجه به شرایط اولیه دستگاه، مسیرهای حرکتی را در صفحه U-V ترسیم خواهیم کرد. سپس به بررسی ویژگی های کیفی مسیرها پرداخته می شود و در نهایت نتایج با توجه به پایداری دستگاه اطلاعاتی قابل استخراج می باشد. این روش اولین بار توسط هانری پوآنکاره* در قرن ۱۹ ابداع شد. همانطور که می دانید دستگاه های کاربردی زیادی موجودند که می توان آنها را با یک دستگاه مرتبه دوم غیر خطی تقریب زد و

* - Henry Poincare

سپس روش صفحه فازی را برای آن پیاده سازی کرد. زیرا در این روش بدون حل تحلیلی معادلات غیرخطی می توان رفتار جواب را از شرایط اولیه گوناگون بررسی کرد. مهمترین عیب این تکنیک محدود بودن آن به معادلات مرتبه دوم می باشد. در این روش با استفاده از فرم ماتریسی دستگاه مفروض می توان ماتریس ژاکوبی و مقادیر و بردارهای ویژه دستگاه را مشخص کرد سپس از روی آنها می توان جواب عمومی را برای دستگاه در نظر گرفت. به منظور تحلیل بیشتر با استفاده از بردارهای ویژه به بررسی نقطه ها و گره های صفحه U-V پرداخته می شود به طوری که در آن نقاط زینی، پایدار، ناپایدار، تعادل و... مشخص خواهد شد. در این بخش قصد داریم با استفاده از روش صفحه فازی U-V وجود امواج متحرک را در مسئله انتشار منظم شده(۴,۴) بررسی کنیم. برای شروع فرض می کنیم $z = x - ct$ ، $v(x,t) = U(x - ct)$ و همچنین r را ثابت در نظر می گیریم. در این صورت تقریب (۴,۴) به یک معادله دیفرانسیل معمولی غیر خطی مرتبه دوم تبدیل می شود. حل این معادله به فرم بسته امکان پذیر نمی باشد، بنابراین بهترین روش برای بررسی آن آنالیز صفحه فازی است. در اینجا U' ، U'' مشتق های اول و دوم نسبت به متغیر موج z را نشان می دهند.

$$-cU' - \left(D + \lambda\frac{a^2}{6}U(1-U)\right)U'' = \lambda U(1-U)(U-r). (14)$$

پس معادله فوق می تواند به یک دستگاه ODE دو متغیره تغییر یابد.

$$\begin{cases} U' = V \\ V' = \dfrac{-cV - \lambda U(1-U)(U-r)}{D + (\lambda a^2/6)U(1-U)} \end{cases} (15)$$

با استفاده از تکنیک صفحه فازی می توان رفتار جواب را بدون محاسبه صریح آن بررسی کرد. دستگاه ODE میدان جهتی را در صفحه فازی U-V فراهم می سازد و از این می توان برای برآورد و تخمین سرعت انتشار c و جهت آن استفاده کرد.

اکنون جواب هایی با شرط c>0 و 1/2< r <1 را جستجو می کنیم. لازم به ذکر است که نقاط ثابت دستگاه (۴,۶) نقاط (0,r)، (0,0) و (1,0) هستند. توجه کنید که بدون عامل منظم ساز D>0 ، نقاط (0,0) و (1,0) دیگر نقاط ثابت نخواهند بود. اکنون با توجه به نحوه تعریف ماتریس ژاکوبی قصد داریم برای شروع روند بررسی دستگاه ماتریس ژاکوبی را برای دستگاه فوق به شکل زیر ارائه کنیم:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda\phi'(U)/(D + \lambda a^2 b(U)/6) & -c/(D + \lambda a^2 b(U)/6 \end{pmatrix} (16)$$

در نقطه (0,0) ماتریس J دارای مقادیر ویژه زیر می باشد:

$$\mu_{1,2} = \left(-c \pm \sqrt{c^2 + 4r\lambda D}\right)/(2D) \ (17)$$

بنابراین دستگاه خطی سازی شده دارای یک نقطه زینی حول نقطه *(0,0)* می باشد.

مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبی در *(r,0)* عبارتند از:

$$\mu_{1,2} = \left(6c \pm \sqrt{36c^2 - 24(1-r)r\lambda(a^2(1-r)r\lambda + 6D))/(2a^2(r-1)r\lambda - 6D)}\right) \ (18)$$

نقطه ثابت *(r,0)* یک نقطه حلزونی پایدار و یا یک نقطه مرکزی برای مقادیر کوچک c می باشد. ماتریس ژاکوبی در نقطه *(1,0)* مقادیر ویژه زیر را دارد:

$$\mu_{1,2} = \left(-c \pm \sqrt{c^2 + 4(1-r)\lambda D}\right)/(2D) \ (19)$$

بنابراین نقطه *(1,0)* یک نقطه زینی دستگاه خطی سازی شده می باشد. از آنجا که جواب موج متحرک مورد نظر می بایست در موقعیت های $\pm\infty$ دارای حدهای متناهی باشد(ثابت باشد) و همچنین با توجه به اینکه تنها نقاط حدی از جواب های دستگاه (۴,۶) نقاط تعادل آن می باشد، بنابراین پیداکردن جواب های موج متحرک برای معادله دیفرانسیل غیرخطی

مرتبه دوم (۵،۴) معادل با پیدا کردن مسیرهایی در دستگاه (۶،۴) است که به نقاط ختم می شوند(زمانیکه $z \to \pm\infty$). اکنون در صفحه فازی *U-V* مسیری را جستجو می کنیم که در آن از یک بردار ویژه ناپایدار $((-c + \sqrt{c^2 + 4r\lambda D})/(2r\lambda),1$ از دستگاه خطی سازی شده حول نقطه *(0,0)* امتداد پیدا می کند و به یک بردار ویژه پایدار $\left((-c + \sqrt{c^2 + 4\lambda D(1-r)})\;/(2(r-1)\lambda),1\right)$ حول نقطه *(1,0)* ختم می گردد. مسیر مورد نظر رفتار موج متحرک را تحت شرایط $U \to 0$ زمانی که $z \to -\infty$ و $U \to 1$ هنگامی که $z \to +\infty$ نشان می دهد. بنابراین برای $0 < x < L$ داریم $U'(z) > 0$ و در نقاط *0* و L نیز داریم$U'(z) = 0$. لازم به ذکر است که برای یافتن مسیر مورد نظر چندین روش از جمله روش شوتینگ و یا با استفاده از قضیه منیفلد پایدار مورد آزمایش قرار می گیرد.

۴. ۳ جواب های موج ساکن

محاسبات ما در بخش های گذشته بیان می کند که ممکن است موج های ساکن (حتی زمانی که $r \neq 1/2$ است) وجود داشته باشند. در این بخش، یک جواب موج ساکن یا به طور معادل یک جواب موج دارای سرعت *c=0* را تعیین میکنیم. همچنین محاسبات ما نشان می دهند که جواب در حالت معادله غیرمنظم شده *(D=0)* بیشتر محتمل تر است. بنابراین، جواب های حالت پایدار از معادله انتشار زیر را بررسی می کنیم.

$$-\lambda\frac{a^2}{6}v(1-v)v_{xx} = \lambda v(1-v)(v-r).\,(20)$$

معادله فوق معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی مرتبه دوم می باشد. فرض می کنیم$\lambda > 0$ ، $0 < a \ll 1$ و همچنین $r > 1/2$ باشد. حال یک جواب با شرایط $v(x) = 0$ برای $x < 0$ و $v(x) = 1$ برای $x > \bar{x}$ را در معادله دیفرانسیلی غیرهمگن خطی مرتبه دوم زیر جستجو می کنیم.

$$\frac{a^2}{6}v_{xx} + v = r, 0 < x < \bar{x}\;(21)$$

شکل جواب عمومی برای *ODE* مرتبه دوم فوق به صورت:

$$v(x) = A\sin\left(\frac{\sqrt{6}}{a}x\right) + B\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{a}x\right) + r\;(22)$$

می باشد. با در نظر گرفتن شرایط $v(x) = 0$ ، $v'(x) = 0$ هنگامی که $x \to 0$ و $v(x) = 1$ زمانی که برای L بزرگ $x \to L$ در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 0, x < 0; \\ r(1 - \cos((\sqrt{6}/a)x)), 0 \leq x \leq (a/\sqrt{6})across(1 - (1/r); \quad (23) \\ 1, O.w \end{cases}$$

لازم به ذکر است که جواب های مشابه را می توان برای $r < \frac{1}{2}$ پیدا کرد.

۵. نتیجه گیری

امروزه فناوری اطلاعات و سیستم های اطلاعاتی به صورت وسیعی در بخش های مختلف صنعت و تجارت به منظور افزایش سود و قدرت رقابت و همچنین کاهش هزینه ها مورد استفاده قرار می گیرند.شرکت ها باید سعی کنند تا نیازهای استفاده کنندگان خود را شناسایی و برای برآورده ساختن و ارضای آن نیازها محصولاتی را ایجاد کنند که یک تجربه مثبت در استفاده کنندگان شود. بنابراین متخصصین این حوزه باید عوامل موثر بر موقعیت بازاریابی ویروسی را شناسایی و آنها را در طراحی و تدوین راهبرد کسب و کار خود نهادینه نمایند. نتایج حاصل از این پژوهش می تواند برای طراحان برنامه بازاریابی ویروسی مفید واقع شود.

۶. مراجع

[1] S. Funk and M. Salathe and V. A. A. Jansen. "Modeling the influence of human behavior on the spread of infectious diseases: A review." *J. R. Soc. Interface* 7, pp.1247-1256,2010.

[2] P. Van den Driessche And X. Zou. "Modeling relapse in infectious diseases", *Mathematical Biosciences* 207, pp89-103, 2007.

[3] J. Wang and J. Pang and X. Liu, "Modeling diseases with relapse nonlinear incidence of infection: a multi-group epidemic model", *J. Biological dynamics* 8(1), pp99-116, 2014.

[4] R.J. Braun and R. A. Wilson and J. A. Pelesko and J. R. Buchanan and J. P. Gleeson, "Applications of small word network theory in alcohol epidemiology", *J. Alcohol Stud*. 67, pp591-599, 2006.

[5] R. A. Wilson and J. R. Buchanan and J. P. Gleeson and R. J. Braun, "A network model of alcoholism and alcohol policy, Proc. Math". *Problems in Industry Workshop*, November 5, 2004.

[6] D. A. French and Z. Teymuroglu and T. J. Lewis and R. J. Braun, "An integro-differential equation model for the spread of alcohol abuse", *Journal of Integral Equations and Applications*, 22(3), pp443-464, 2010.

[7] G. Kolata, "Study says obesity can be contagious", The New York Times, July 25, 2007.

[8] A. Kotlowitz, "Blocking the transmission of violence", *The New York Times Magazine*, May 4, 2008.

[9] J. Medlock and M. Kot, "Spreading disease: integro-differential equations old and new", *Math Biosci*. 184(2), pp201-22,2003.

[10] M. Braun, "Differential equation and their applications", *Fourth Edition*, pp67-80, 1992.

[11] D. J. Watts and S. H. Strogatz, "Collective dynamics of small world networks", *Nature* 393, pp440-442, 1998.

[12] M. E. J. Newman, “The structure and function of complex networks”. *SIAM Review* 45: pp167-256, 2003.

[13] D. J. Watts, "Small worlds: the dynamics of networks between order and randomness”. *Princeton U. Press, Princeton*. 1999.

[14] M. E. J. Newman, "Spread of epidemic disease on networks". *Phys. Rev. E* 66,016128, 2002.

[15] H. W. Hethcote, "The mathematics of infectious diseases". *SIAM Review* 42(4), pp599-653, 2002.

[16] Information about COVID-19, World Health Organization (WHO), www.who.int.

[17] S. H. Hosseini, "Introducing an Integro-Differential Equation Model for Spread of Addictive Drugs abuse". *Quarterly Journal of Drug Abuse* 10(40), 2016.

[18] Bhatia, "Estimation of Individual Probabilities of COVID-19 Infection", *Hospitalization and Death From A County-level Contact of Unknown infection Status*, 2020.

i4c2021-1098