مدل سازی جرم با سیستم های معادلات دیفرانسیل برای سرقت های مسلحانه [1]

احسان لطفعلی قصاب
گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول، دزفول،ایران
e.l.ghasab@gmail.com
رضا چهارپاشلو
گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول، دزفول،ایران
chaharpashlou@jsu.ac.ir

چکیده

جرم جنبه ناگوار اما ماندگار در تمام نقاط جهان و یکی از پیچیده ترین مسائل در جامعه مدرن است. برای کمک به اجرای قانون، یک مدل کیفی، آموزنده و کاربردی از جرم مورد نیاز است. جرایم اغلب دارای خواص آماری هستند و می توان آنها را با استفاده از ابزارهای کمّی مدل سازی کرد. در این مقاله با استفاده از سیستم های معادلات دیفرانسیل یک مدل $ERPFT$ برای سرقت های مسلحانه ارایه شده است.–پایداری مجانبی برای این مدل در نقطه تعادلی آزاد در نظر گرفته شد. یافته‌ها حاکی از آن است که هر نقطه تعادلی دیگر پایداری علامت نیست. همچنین نشان داده شده که که مدل $ERPFT$ دوره‌ای نیست.

کلمات کلیدی: سرقت های مسلحانه، معادلات دیفرانسیلی، پایداری، قضیه استوکس

۱٫۱ مقدمه

در این مقاله، ما یک مدل برای توصیف افزایش سرقت مسلحانه در جامعه ارائه می دهیم. در این مدل افراد جامعه را به پنج گروه که شامل افراد در معرض تبدیل شدن به سارق، سارقان مسلح، زندانیان، زندانیان به مرخصی آمده و افراد اصلاح شده جامعه افراز میکنیم.

[1]. Crime Modeling with Systems of Differential Equations for Armed Robbery

جرم جنبه ناگوار اما ماندگار در تمام نقاط جهان است[۲]. جرم یکی از سخت ترین مسائل در جامعه مدرن است. برای کمک به اجرای قانون، یک مدل کیفی، آموزنده و کاربردی از جرم مورد نیاز است. جنایات اغلب دارای خواص آماری است و می توان آنها را با استفاده از ابزارهای کمی مدل سازی کرد. در ده سال گذشته، ریاضیدانان کاربردی که در جهان به مدل سازی و پیش بینی جرم روی آوردند رو به رشد بوده است[۳] (به عنوان مثال[۱, ۲, ۵]).

به طور کلی، دو طبقه از مدل های سرقت وجود دارد. کلاس اول به منظور پیش بینی الگوهای رویدادهای مشاهده شده، هستند. کلاس دوم مبتنی بر عامل است و توصیف اقدامات افراد است که منجر به تشکیل الگویی جامع می شود. این طبقه ای از مدل هایی است که ما در اینجا به آن اشاره می کنیم. اگر همه پارامترهای مدل شناخته شده باشند، می توان برای مدل پیش بینی کرد و از مدل های مبتنی بر عامل استفاده کرد. در این مقاله ما یک مدل اپیدمیولوژیک در نظر گرفته ایم.

در این مدل ما افراد جامعه را به پنج گروه که شامل افراد در معرض تبدیل شدن به سارق, سارقان مسلح, زندانیان, زندانیان به مرخصی آمده و افراد اصلاح شده جامعه افراز میکنیم. هر کدام از این کلاس ها را به ترتیب با نماد های E, R, P, F و T نمایش می دهیم. برای کوتاهی از $ERPFT$ استفاده می کنیم.[۴] این مدل توسیعی از مدل های ارایه شده در [۴, ۶-۷, ۸, ۹] است که در آنها به بررسی انتشار ویروس در سطح جامعه پرداخته شده است. در این مقاله ما نیز افزایش سرقت مسلحانه در سطح جامعه را همانند یک ویروس که در سطح جامعه در حال افزایش است در نظر گرفته و با توسیع مدل های ارایه شده[۵] در [۴, ۶, ۷, ۸, ۹] به بررسی مدل پرداخته ایم.

در بخش دوم این مقاله مدل $EBPFR$ و T_0 را فرمول سازی می کنیم.

در بخش سوم ما یک شرط برای پایداری مجانبی از نقطه تعادلی آزاد Q_0 و یک نقطه تقاطع برای سیستم بدست می آوریم.

---

[۲] . برای مطالعهٔ بیشتر در خصوص سرقت مسلحانه رجوع کنید به : سید محمد صادقی، حسین، جرایم علیه اموال و مالکیت، نشرمیزان، ۱۳۹۲. آقایی جنت مکان، حسین، حقوق کیفری عمومی، جلد نخست، ۱۳۹۷.

[۳]. به عنوان مثال رجوع کنید به:

G. Li, and J. Zhen, Global stability of an SEI epidemic model with general contact rate, Chaos, Solitons and Fractals, 23(2005), 997-1004. G. Li, W. Wang, and J. Zhen, Global stability of an SEIR epidemic model with constant immigration, Chaos, Solitons and Fractals, 30(2006), 1012-1019. M.Farkas, Dynamical models in biology, Academic Press, 2001.

این مدل توسیعی از مدل های ارایه شده در منابع زیر است:

. Luiz K. Hotta, Bayesian melding estimation of a stochastic SEIR model, Mathematical Population Studies, 17(2010), 101-111. N. Bellomo, F. Colasuonno, D. Knopoff and J. Soler, From a systems theory of sociology to modeling the onset and evolution of criminality, Netw. Heterogeneous Media ,10 (2015) 421–441. P. Chaohao and others, Crime modeling with truncated Levy flights for residential burglary models, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 28(2018) 1857-1880. S. Chaturapruek and others, Crime modeling with Levy flights ,SIAM J. A PPL. M ATH ,73 (2013) 1703-1720. . S.S.Chern, W.H. Chen, and K.S.Lam, Geometry, World Scientific Publishing, 2000

ناپایداری علامت از نقطه تعادل Q_* را در بخش چهارم در نظر گرفته ایم.

در بخش پنجم به بررسی دوره ای بودن مدل پرداخته ایم.

در این مقاله، سن همه افراد در سیستم از سن هجده سالگی در نظر گرفته شده است و منظور از تولد در جامعه رسیدن سن افراد جامعه به سن هجده سالگی است.

۱,۲ ۱- فرمول بندی مدل

با توجه به توضیحات بخش قبل قرار می دهیم $N(t)$ را جمعیت کل جامعه در زمان t که برابر

$$E(t) + R(t) + P(t) + F(t) + T(t)$$

است.

نرخ بوجود آمدن یک سارق در جامعه را با β نشان می دهیم. μ و λ به ترتیب نرخ طبیعی مرگ و میر در جامعه و نرخ تولد در جامعه است که منظور از تولد در جامعه رسیدن افراد به سن هیجده سالگی است. نرخ خروج از کلاس سارقان و رفتن به کلاس اصلاح شده گان را با α و نرخ خروج از کلاس زندانیان و رفتن به کلاس اصلاح شده گان با η نمایش می دهیم. همچنین نرخ خروج از کلاس مرخصی را با k نشان می دهیم. بعلاوه فرض می کنیم که زندان رفتن راه کاری موثر است و آمار سارقان با نرخ δ کاهش می دهد. نرخ خروج از کلاس زندانیان و رفتن به کلاس مرخصی را با ρ نشان می دهیم. در $ERPFT$ کسر γ نشان می دهد در واحد زمان چه تعداد از افراد سارق برای رفتن به زندان شناسایی شده اند. کسر f نشان می دهد چه تعداد از αR کلاس سارقان را در زمان t ترک میکنند و به کلاس اصلاح شده گان می روند و $(۱ - f)$ باقی مانده افراد ی هستند که یا دچار مرگ طبیعی شده یا در درگیری مسلحانه کشته شده اند و یا شناسایی نشده اند. بعلاوه فرض می کنیم کسر f_P از ηP افرادی هستند که کلاس زندانیان را در زمان t ترک می کنند. باید به این نکته توجه کرد که تمام پارامتر های ما بین صفر و یک هستند. اما چگونه باید سیستم معادلات دیفرانسیل را طراحی کرد؟

ما فرض کردیم تعداد افراد سارقی که در زمان t به جامعه افزوده می شود $\beta N(t)$ در واحد زمان است که $N(t)$ جمعیت کل جامعه است. از اینرو احتمال بوجود امدن یک سارق از کلاس در معرض ها $\frac{E(t)}{N(t)}$ است, آنگاه تعداد سارقان جدید در واحد زمان برابر $\beta N(t)\frac{E(t)}{N(t)}$ است, که این نرخ جدیدی از سارقان که در کلاس سارقان هستند می دهد که برابر

$$\beta N(t)\frac{E(t)}{N(t)}(R(t) + \delta P(t)) = \beta E(t)(R(t) + \delta P(t))$$

است. پس

$$\beta E(t)(R(t) + \delta P(t))$$

نرخ افرادی است که کلاس $E(t)$ در زمان t ترک می کنند. همچنین ما فرض می کنیم که تمام افراد هیجده ساله جدید که به جامعه افزوده می شوند در کلاس در معرض ها قرار دارند یعنی پتانسیل تبدیل شدن

به یک سارق را دارند واز این امر هیچ کس مستثنی نیست. پس نرخ افراد جدید در کلاس در معرض ها $\lambda N(t)$ در واحد زمان t هست و $\mu E(t)$ نرخ افرادی است که بر اثر مرگ ترک می کنند. بنابراین

$$E' = -\beta E(R + \delta P) + \lambda N - \mu E.$$

نرخ $kF(t)$ افراد به مرخصی رفته ای هستند که مجددا دست به سرقت می زنند و به کلاس $R(t)$ در زمان t وارد می شوند. همچنین نرخ $\gamma R(t)$ سارقانی هستند که به کلاس زندانیان در زمان t می روند. نرخ $\alpha R(t)$ نشان می دهد افراد اصلاح شده که دست از سرقت کشیده و در کلاس $T(t)$ در زمان t قرار گرفته اند. بنابراین

$$R' = \beta E(R + \delta P) + kF - (\alpha + \mu + \gamma)R.$$

$\gamma R(t)$ نرخ افرادی است که وارد کلاس $P(t)$ در زمان t شده اند. بنابراین

$$P' = \gamma R - (\mu + \eta + \rho)P.$$

$\rho P(t)$ نرخ افرادی است که وارد کلاس $F(t)$ در زمان t شده اند بنابراین

$$F' = \rho P - (k + \mu)F.$$

نرخ $\alpha f R(t)$ از سارقان و نرخ $\eta f_P P(t)$ از زندانیان اصلاح شده گان در زمان t هستند بنابراین

$$T' = \alpha R f + \eta P f_P - \mu T.$$

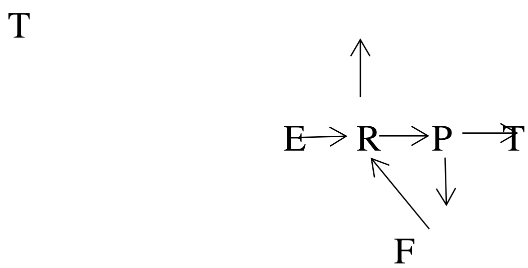
و

$$N' = -(1 - f)\alpha R - (1 - f_p)\eta P + \lambda N - \mu N$$

بدین ترتیب مدل ریاضی زیر را خواهیم داشت.

$$\begin{cases} E' = -\beta E(R + \delta P) + \lambda N - \mu E \\ R' = \beta E(R + \delta P) + kF - (\alpha + \mu + \gamma)R \\ P' = \gamma R - (\mu + \eta + \rho)P \\ F' = \rho P - (k + \mu)F \\ T' = \alpha R f + \eta P f_P - \mu T \\ N' = -(1 - f)\alpha R - (1 - f_p)\eta P + \lambda N - \mu N \end{cases} \qquad (1)$$

دیاگرام مدل $ERPFT$ به فرم زیر است



در ادامه T_0 را محاسبه می کنیم این عدد تولید مجدد سارقان در جامعه را نشان می دهد. این پارمتر برای ما مهم است چون اگر $T_0 < 1$ باشد یعنی سرقت ها در جامعه افزایش نمی یابند ولی اگر $T_0 > 1$ یعنی اینکه سرقت ها در سطح جامعه همچنان افزایش می یابند. بدین منظور فرض کنید که $E(0) = K = N(0)$ باشد. میدانیم که متوسط افراد جامعه که به سارق تبدیل می شوند در زمان t برابر βK است که سارقان جدید در واحد زمان هستند و متوسط زمان که سارقان جداسازی شوند $\frac{1}{\alpha+\gamma}$ است. همچنین متوسط زمان برای جداسازی زندانیان $\frac{\gamma}{\gamma+\alpha}$ است. بعلاوه کسر $\frac{1}{k}$ از افراد مرخصی هستند که سرقت می کنند. با توجه به اینکه زندان تعداد سارقان را کاهش می دهد تعداد سارقان بعد از شناسایی زندانیان در واحد زمان $\delta\beta K$ است و متوسط زمان که صرف زندانیان می شود $\frac{1}{\eta+\rho}$ است. بنابراین

$$T_0 = \frac{K\beta}{\alpha} + \frac{K\beta}{\alpha+\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma+\alpha}\frac{\delta\beta K}{\eta+\rho}.$$

۱,۳ ۲- تجزیه و تحلیل پایداری مجانبی

فاز فضای مدل به فرم:

$$Y_0 = \{(E, R, P, F, N): 0 \leq E + R + P + F \leq N\}.$$

قبل از افزایش سرقت در سطح جامعه نقطه $Q_0 = (K, 0,0,0, K)$ یک نقطه تعادلی آزاد از مدل می باشد و برای همه پارامترها با مقادیر نامنفی موجود است.

قضیه ۲-۱ *در مدل ۱ اگر* $T_0 < 1$ *آنگاه*

- اگر $\lambda < \mu$ آنگاه نقطه تعادلی آزاد Q_0 پایدار مجانبی موضعی است.
- اگر $\lambda = \mu$ آنگاه نقطه تعادلی آزاد Q_0 ناپایدار است.
- اگر $\lambda > \mu$ آنگاه نقطه تعادلی آزاد Q_0 پایدار موضعی است اما پایدار مجانبی موضعی نیست.

اثبات:

- ماتریسضرایبسیستم ۱ درتعادل Q_0 به فرم زیر می باشد:

$$\begin{pmatrix} -\mu & -\beta k & -\beta\delta k & 0 & \lambda \\ 0 & \beta k-\alpha-\mu-\gamma & \beta\delta k & k & 0 \\ 0 & \gamma & -(\mu+\eta+\rho) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & -k-\mu & 0 \\ 0 & -(1-f)\alpha & -(1-f_P)\eta & 0 & \lambda-\mu \end{pmatrix}.$$

بدین ترتیب با تشکیل معادله مشخصه این ماتریس هرکس می تواند نشان دهد تمام مقادیر ویژه منفی هستند و با محک هارویتز نقطه تعادلی آزاد Q_0 یک پایداری مجانبی موضعی است برای مشاهده بیشتر به منابع [۷, ۸, ۹] مراجعه کنید.

•با $\lambda=\mu$ داریم

$$\begin{pmatrix} -\mu & -\beta k & -\beta\delta k & 0 & \lambda \\ 0 & \beta k-\alpha-\mu-\gamma & \beta\delta k & k & 0 \\ 0 & \gamma & -(\mu+\eta+\rho) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & -k-\mu & 0 \\ 0 & -(1-f)\alpha & -(1-f_P)\eta & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

بدین ترتیب این ماتریس دارای مقدار ویژه صفر می باشد پس Q_0 ناپایدار است.

•دراین حالت تمام مقادیر ویژه ناصفرهستند. بنابراین Q_0 پایدار موضعی است. چون $\lambda-\mu>0$, آنگاه ماتریس یک مقدار ویژه مثبت دارد پس Q_0 پایدار مجانبی موضعی نیست.

یک نقطه تعادل دیگر $Q_*=(E_*,R_*,P_*,F_*,N_*)$ هست که

$$E_*=\frac{\lambda N_*}{\beta(R_*+\delta P_*)+\mu}.$$

$$R_*=\frac{\rho+\eta+\mu}{\alpha P_*}.$$

$$P_*=\frac{\alpha R_*}{\mu+\eta+\rho}.$$

$$F_*=\frac{\rho}{k+\mu}\left(\frac{\alpha}{\mu+\eta+\rho}\right)R_*.$$

$$N_*=\frac{-(1-f_P)\eta}{\mu-\lambda}\left(\frac{\alpha}{\eta+\mu+\rho}\right)R_*.$$

۱,۴ ۳- پایداری علامت

هنگامی که پدیده های با معادلات دیفرانسیل مدل سازی می شوند، مقادیر پارامترهای درگیر اغلب می توانند به طور دقیق با خطاهای قابل توجه تعیین شوند. اگر ما یک ماتریس مربعی در دست داشته باشیم،

مهم است که بدانیم میزان پایداری آن بستگی به مقادیر واقعی ورودی دارد و اینکه آیا برای تغییرات ورودی حساس است.

تعریف ۳-۱ *یک ماتریس مربعی $n \times n$ مثل $A = [a_{ij}]$ پایداری علامت دارد اگر برای هر ماتریس مربعی $n \times n$ مثل $B = [b_{ij}]$ با الگوی علامت مشابه یعنی ($signb_{ij} = signa_{ij}$) برای هر $i, j = 1,2, \dots, n$, یک ماتریس پایدار وجود دارد.*

برای یک ماتریس مربعی $n \times n$ مثل $A = [a_{ij}]$ می توانیم یک گراف غیرجهت دار را بدست آوریم مثل G_A که مجموعه راس ها $V = \{1,2, \dots, n\}$ است و یال ها

$$\{(i, j): i \neq j, a_{ij} \neq 0 \neq a_{ji}, i, j = 1,2, \dots, n\}$$

است. همچنین یک گراف جهت دار مثل D_A می توان به A چسباند با همان راس های قبلی و یال های آن

$$\{(i, j): i \neq j, a_{ij} \neq 0, i, j = 1,2, \dots, n\}$$

می باشد.

یک k-سیکل از D_A مجموعه ای از یال های مجزا از هم از D_A به فرم زیر هست:

$$\{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k), (i_k, i_1)\}.$$

فرض کنید که $R_A = \{i: a_{ii} \neq 0\} \subset V$ مجموعه از اعداد روی قطر یک ماتریس باشند که مخالف صفر هستند. یک R_A-رنگ آمیزی از G_A یک تقسیم بندی از راس ها به دو گروه مشکی و سفید است (یکی از این مجموعه ها ممکن است خالی باشد). بطوریکه هر راس در R_A مشکی است, هیچ راس مشکی دقیقا در همسایگی یک راس سفید نیست و هر راس سفید حداقل در همسایگی یک راس سفید است. تطابق کامل $V - R_A$ مجموعه ی M هست که شامل همه یال های جدا از هم از گراف G_A است بطوریکه مجموعه همه راس ها از این یال ها در M شامل هر راس که در $V - R_A$ می باشد. با توجه به مطالبی که گفته شد اکنون می توانیم قضیه زیر را بیان کنیم.

قضیه ۳-۲ *[۴] ماتریس $n \times n$ حقیقی $A = [a_{ij}]$ پایداری علامت دارد اگر در شرایط زیر صدق کند:*

- $a_{ij} \leq 0$ برای هر i, j,
- $a_{ij}a_{ji} \leq 0$ برای هر $i \neq j$,
- گرافجهتدار D_A یک k-سیکل برای $k \geq 3$ نیست,
- درهر R_A-رنگ آمیزی از گراف غیر جهت دار G_A همه راس ها مشکی هستند,
- گراف غیرجهتدار G_A یک $V - R_A$ تطابق کامل بدست می دهد.

ماتریس ضرایب سیستم ۱ در نقطه تعادل Q_* به فرم زیر می باشد:

$$A = \begin{pmatrix} -\beta(R_* + \delta P_*) - \mu & -\beta E_* & -\beta\delta E_* & 0 & \lambda \\ \beta(R_* + \delta P_*) & \beta E_* - \alpha - \mu - \gamma & \beta\delta E_* & k & 0 \\ 0 & \gamma & -(\mu + \eta + \rho) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & -k - \mu & 0 \\ 0 & -(1-f)\alpha & (-1 + f_P)\eta & 0 & \lambda - \mu \end{pmatrix}.$$

قضیه ی بعدی نتیجه می دهد که در مدل سرقت های مسلحانه نقطه تعادلی یک پایداری علامت نیست. این یک خبر خوب است، زیرا با وجود پایداری علامت ، ما نمی توانیم از آن در مدت زمان طولانی عبور کنیم.

قضیه ۳-۳ *اگر $\lambda > \mu$ آنگاه ماتریس فوق پایداری علامت ندارد.*

اثبات:

کافی است تنها ماتریس زیر را در نظر بگیریم.

$$\begin{pmatrix} -۱ & -۱ & -۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & -۱ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}.$$

چون $a_{55} > 0$ آنگاه قضیه ۴,۲ نتیجه می دهد ماتریس A پایداری علامت ندارد.

نتیجه ۳-۴ *قضیه قبل همچنین نتیجه می دهد اگر نرخ مرگ و میر بزرگتر از نرخ تولد باشد آنگاه این مدل پایدار نیست.*

۱,۵ ۴- سرقت های مسلحانه دوره ای نیستند

در این بخش ما یک نتیجه خوب در مورد سرقت های مسلحانه بدست می آوریم. و آن اینکه سرقت های مسلحانه دوره ای نیستند . در اینجا ما از قضیه استوکس استفاده می کنیم که به شرح زیر است.

قضیه ۴-۱ ***(قضیه ی استوکس)*** *[۳] فرض کنید M مجموعه فشرده باشد, منیفلدی k-بعدی و ω یک رویه $(k-1)$-بعدی از M باشد. آنگاه*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

ما می توانیم از این قضیه استفاده کنیم و نشان دهیم که سیستم ۱ مدار بسته نیست.

قضیه ۴-۲ *$SRPFT$ یک مدار بسته نیست.*

اثبات:

اگر وجود داشته باشد یک مدار دوره ای مانند C با دوره T آنگاه M را ناحیه ای از R^6 با مرز C قرا می دهیم. فرض کنید ω یک رویه ۵-بعدی از M تعریف شده با

$$\begin{gathered}\omega = (-\beta E(R+\delta P) + \lambda N - \mu E) dR \wedge dP \wedge dF \wedge dT \wedge dN \\ +(\beta E(R+\delta P) + kF - (\alpha+\mu+\gamma)R) dE \wedge dP \wedge dF \wedge dT \wedge dN \\ +(\gamma R - (\mu+\eta+\rho)P) dR \wedge dE \wedge dF \wedge dT \wedge dN \\ +(\rho P - (k+\mu)F) dR \wedge dP \wedge dE \wedge dT \wedge dN \\ +(\alpha R f + \eta P f_P - \mu T) dR \wedge dP \wedge dF \wedge dE \wedge dN \\ +(-(۱-f)\alpha R - (1-f_p)\eta P + \lambda N - \mu N) dR \wedge dP \wedge dF \wedge dT \wedge dE.\end{gathered}$$

باشد آنگاه

$$\begin{aligned} d\omega = (&-\beta(R+\delta P) - \mu + \beta E - (\alpha+\mu+\gamma) - \mu - \eta - \rho - (k+\mu) - \mu + \lambda \\ &- \mu) dE \wedge dR \wedge dP \wedge dF \wedge dT \wedge dN \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} d\omega = (&-\beta(R+\delta P - E) - 6\mu - \alpha - \gamma - \eta - \rho - k + \lambda) dE \wedge dR \wedge dP \wedge dF \\ &\wedge dT \wedge dN. \end{aligned}$$

پس

$$\int_M d\omega < 0$$

و

$$\int_{\partial M = C} \omega = 0$$

اما قضیه ی استوکس نتیجه می دهد

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

پس ۰ > ۰ که این تناقض است. بنابراین $ERPFT$ یک مدار دوره ای نیست.

۱,۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله در مورد افزایش سرقت‌های مسلحانه در جامعه بحث شد .جرایم اغلب دارای خواص آماری هستند و می توان آنها را با استفاده از ابزارهای کمّی مدل سازی کرد. در این مقاله با استفاده از سیستم های معادلات دیفرانسیل یک مدل $ERPFT$ برای سرقت های مسلحانه ارایه و پایداری مجانبی برای این مدل در نقطه تعادلی آزاد در نظر گرفته شد. ما عدد T_0 را که یک تولید مجدد اساسی بود بدست آوردیم و پایداری

مجانبی را برای ۱ در یک نقطه ایستا بدست آوردیم, اگر $T_0 < 1$ آنگاه نشان دادیم که نقطه تعادلی آزاد Q_0 پایدار مجانبی در ناحیه Y_0 است, که در بخش سوم مورد بحث قرار گرفت. همچنین یک نقطه ایستا دیگر Q_* بدست آوردیم که پایداری علامت نبود. در نظر گرفتن پایداری این نقطه می تواند موضوعی برای تحقیقات بیشتر باشد.

منابع

الف- فارسی

۱. آقایی جنت مکان، حسین، **حقوق کیفری عمومی**، جلد نخست، ۱۳۹۷.
۲. سید محمد صادقی، حسین، جرایم **علیه اموال و مالکیت**، نشرمیزان، ۱۳۹۲.

ب- انگلیسی

1. G. Li, and J. Zhen, Global stability of an SEI epidemic model with general contact rate, Chaos, Solitons and Fractals, 23(2005), 997-1004.
2. G. Li, W. Wang, and J. Zhen, Global stability of an SEIR epidemic model with constant immigration, Chaos, Solitons and Fractals, 30(2006), 1012-1019.
3. H. Berestycki, N. Rodr´ ıguez and L. Ryzhik, Traveling wave solutions in a reactiondiffusion model for criminal activity, Multiscale Model. Simul. 11 (2013) 1097–1126.
4. Luiz K. Hotta, Bayesian melding estimation of a stochastic SEIR model, Mathematical Population Studies, 17(2010), 101-111.
5. M.Farkas, Dynamical models in biology, Academic Press, 2001.
6. N. Bellomo, F. Colasuonno, D. Knopoff and J. Soler, From a systems theory of sociology to modeling the onset and evolution of criminality, Netw. Heterogeneous Media ,10 (2015) 421–441.
7. P. Chaohao and others, Crime modeling with truncated Levy flights for residential burglary models, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 28(2018) 1857-1880.

8. S. Chaturapruek and others, Crime modeling with Levy flights ,SIAM J. A PPL. M ATH ,73 (2013) 1703-1720.
9. S.S.Chern, W.H. Chen, and K.S.Lam, Geometry, World Scientific Publishing, 2000.
10. W. Gorr and Y. Lee, Early warning system for temporary crime hot spots, J. Quant Criminol. 31, (2015) 25–47.
11. X.Z. Li, and L.L. Zhou, Global stability of an SEIR epidemic model with vertical transmission and saturating contact rate, Chaos, Solitons and Fractals, 40(2009), 874-884.