پیاده سازی روش آدامز بشفورث به منظور حل معادله دیفرانسیل موقعیت و سرعت ماهواره در یک مدار کپلری ایده آل

عرفان شکورزاده [1،*]، بهمن قربانی [۲]

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی هوافضا،فناوری ماهواره(کنترل)،دانشگاه علم و صنعت ایران،دانشکده فناوری های نوین

۲- استادیار گروه فناوری ماهواره، دانشگاه علم وصنعت ایران ، دانشکده فناوری های نوین

چکیده

در این مقاله به ارائه روش حل عددی قابل پیاده سازی بر روی میکروکنترلرها برای حل معادله دیفرانسیل کپلر (معادله دیفرانسیل حرکت ماهواره) به صورت روی برد برای ماهواره پرداخته شده است، هدف از معرفی و پیاده سازی این روش بر روی میکروکنترلر معرفی روش حل عددی سریع (با توجه به سرعت بالای ماهواره ها در مدار ۷.۶ کیلومتر بر ثانیه[1])و با دقت بالا به جهت تخمین موقعیت ماهواره به صورت هرچه دقیق تر میباشد که سعی شده است برای انجام این عمل از ساده ترین سخت افزار[2] استفاده گردد لذا برای این مهم پس از پیاده سازی الگوریتم بر روی سخت افزار،داده ها از طریق پورت UART[†] برای کامپیوتر و نرم افزار متلب ارسال میگردد که در نهایت با رسم این اطلاعات در نرم افزار متلب میتوان به سرعت و دقت پردازش این اطلاعات با میکروکنترلری از سری AVR پی برد.

کلمات کلیدی: میکروکنترلر،معادله دیفرانسیل کنترلی حرکت ماهواره،معادله کپلر،حل عددی آدامز-بشفورث

۱. مقدمه

با توجه به رشد روز افزون استفاده از ماهواره های کوچک به جای استفاده از ماهواره های بزرگ و گران قیمت لازم است [3]تا روش هایی به جهت کاهش قیمت یافته شود برای دست یابی به این مهم یکی از راه های معقول استفاده از سخت افزار هایی است که بتوانند با قیمت کمتر بر روی کامپیوتر روی بورد ماهواره نصب گردند اما مسئله مهم پیش آمده این است که این سخت افزار ها یا میکروکنترلر ها باید توانایی انجام وظایف خانه داری و پردازش داده ها را بدون کاهش دقت داشته باشند لذا نقش الگوریتم های محاسباتی در این قسمت پررنگ تر میشود لذا پیاده سازی الگوریتم پردازشی با سرعت بالا و دقت بالا کمک به کاهش قیمت ماهواره خواهد کرد در راستای اهداف ذکر شده در بالا در این مقاله روش حل عددی آدامز بشفورث برای حل معادله حرکت ماهواره و تخمین روی برد مکان ماهواره در مدار مورد استفاده قرار گرفته و بر روی سخت افزار آردینو(با پردازنده خانواده AVR) که یکی از ساده ترین سخت افزار های موجود در بازار است پیاده سازی شده است و نتایج در نرم افزار متلب رسم شده و پارامتر های مداری در هر لحظه استخراج شده اند.

با توجه به اینکه در میکروکنترلر توانایی حل مستقیم معادله دیفرانسیل و حل انتگرال وجود ندارد باید به سراغ روش های عددی حل معادله دیفرانسیل رفت که در ادامه به روش حل عددی معادله دیفرانسیل به روش آدامز بشفورث [4] مورد

[*] **Corresponding author: Master's student in aerospace engineering, satellite technology**
Email: erfan_shakourzadeh@nt.iust.ac.ir

[†] Universal Asynchronous Reception and Transmission

اشاره میگردد و سپس با استفاده از این روش که یکی از دقیق ترین روش های حل معادله دیفرانسیل به صورت عددی است اقدام به حل مسأله میگردد قابل ذکر است که این روش به صورت مرتبه ۴ نوشته شده است و از دستورode متلب دقیق تر عمل میکند [5] و همچنین در تعریف داده ها و نوع آنها سرعت پردازش لحاظ شده است ،سپس به نحوه پیاده سازی روش بر روی سخت افزار پرداخته خواهد شد و سپس نوع ارتباط با کامپیوتر و رسم اشکال شرح داده میشود و در ادامه به بخش نتیجه گیری پرداخته خواهد شد.

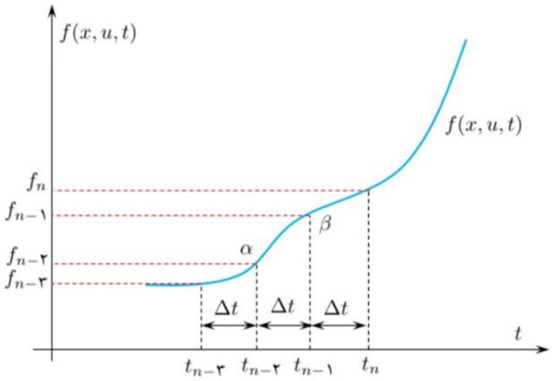
۲. حل عددی آدامز-بشفورث

در این بخش روش حل عددی آدامز بشفورث معرفی میگردد، فرض کنید معادله دیفرانسیل معمولی حاکم بر ارتعاشات یک سیستم دینامیکی را به روش های مرسوم(نیوتن-اویلر یا انرژی یا لاگرانژ یا اصل همیلتون و ...) قابل محاسبه است که به صورت رابطه (۱) قابل تعریف است.

$$\dot{x} = f(x, u, t) \qquad (۱)$$

که در آن x متغیرحالت سیستم u ورودی سیستم t نشان دهنده زمان هستند.

برای درک بهتر روش حل مذکور،فرض میشود شکل ۱ نمودار تابع دلخواه حاکم بر ارتعاشات یک سیستم دینامیکی است و



شکل ۱ **نمودار تابع دلخواه حاکم بر ارتعاشات یک سیستم دینامیکی**

تابع $f(x, u, t)$ را در بُرهه ای از زمان حرکت سیستم نمایش می دهد. وقتی قرار است معادله دیفرانسیل را به صورت عددی حل گردد، چون نیاز نیست پاسخ در همه زمان ها مشخص گردد.(t پیوسته باشد) در نتیجه محور زمان به بازه های کوچک قابل تقسیم خواهد شد و لذا با گسسته در نظر گرفتن تابع طول هر بازه را برابر با Δt در نظر گرفته میشود که در (۲) قابل مشاهده است.

$$\Delta t = t_i - t_{i-1}\,;\ i = 1,2,3,4,\dots,n \qquad (۲)$$

متناظر با این تقسیم بندی روی محور عمودی تابع $f(x, u, t)$ هم تقسیم بندی میگردد (ولی لزوماً بازه ها یکسان نیستند) به این ترتیب تا این جای کار محور زمان و هم چنین معادله دیفرانسیل حرکت گسسته سازی شده است. نکته ای که باید به آن توجّه کرد این است که در حل عددی پاسخ $f(x, u, t)$ فقط و فقط در زما نهای ti به دست می آید و بین زمان های دیگر هیچ مقداری برای $f(x, u, t)$ نخواهیم داشت.

ایده اصلی روش حل آدامز-بشفورث به این شکل است که بعد از گسسته سازی تابع باید پاسخ معادله دیفرانسیل سیستم پیوسته به طور تقریبی به دست آورده شود (به یاد بیاورید که در حل عددی پاسخ فقط در نقاط نمونه برداری موجود است) اوّلین تقریب این است که توزیع پاسخ را بین دو نقطه دلخواه αوβ به صورت خطّی (تقریب مرتبه اوّل) فرض گردد ، در نتیجه معادله خط تقریب مطابق (۳) میگیرد.

$$f(x,u,t)-f(t_{n-1})=k_1(t-t_{n-1}) \quad (۳)$$

حال برای این که ثابت مجهول k_1 محاسبه گردد ، از یک نقطه قبل تر از f_{n-1} استفاده می شود و مختصات آن نقطه در معادله خط مذکور جای گذاری میگردد (۴).

$$f(t_{n-2})-f(t_{n-1})=k_1(t-t_{n-1}) \Rightarrow k_1=\left(\frac{f_{n-2}-f_{n-1}}{t_{n-2}-t_{n-1}}\right) \quad (۴)$$

که در آن K شیب خط واصل بین دو نقطه است.

با جایگذاری k_1 ازرابطه (۴) در رابطه (۳(، رابطه (۵) بدست خواهد آمد.

$$f(x,u,t)=f(t_{n-1})+\left(\frac{f_{n-2}-f_{n-1}}{t_{n-2}-t_{n-1}}\right)(t-t_{n-1}) \quad (۵)$$

در رابطه (۶) با رجوع به معادله اصلی به انتگرال گیری تابع گسسته سازی شده در بازه گسسته شده پرداخته میشود.

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n}\dot{x}dt=\int_{t_{n-1}}^{t_n}f(x,u,t)dt \Rightarrow x(t_n)=x(t_{n-1})+(1.5\Delta t)f_{n-1}-(0.5\Delta t)f_{n-2} \quad (۶)$$

با توجه به رابطه (۶) میتوان رابطه بازگشتی برای محاسبه حاصل انتگرال را به صورت زیر محاسبه نمود که این رابطه بازگشتی با تقریب مرتبه ۳ نوشته شده است(رابطه (۷)).

$$x_n=x_{n-1}+\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n-j}; \qquad f_i=f(t_i,x_i) \quad (۷)$$

که در آن β_j شیب خط های مختلف است که در بازه زمانی گسسته شده در هر مرحله ضرب شده است.

که این رابطه را میتوان برای مرتبه های مختلف میتوان به صورت رابطه (۸)تعریف نمود.

$$k=1:\ x_n=x_{n-1}+f_{n-1}h \quad (۸)$$

$$k=2:\ x_n=x_{n-1}+(3f_{n-1}-f_{n-2})\frac{h}{2}$$

$$k=3:\ x_n=x_{n-1}+(23f_{n-1}-16f_{n-2}+5f_{n-3})\frac{h}{12}$$

$$k=4:\ x_n=x_{n-1}+(55f_{n-1}-59f_{n-2}+37f_{n-3}-9f_{n-4})\frac{h}{24}$$

حال فرض کنید معادله دیفرانسیلی [6]مطابق رابطه (۹) وجود دارد.

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0\sin(\omega t) \quad (۹)$$

که در آن m و C و K ضرایب معادله دیفرانسیل و در سیستم مکانیکی به ترتیب ضریب جرم،ضریب میرایی و ضریب فنر میباشند همچنین F نیروی کنترلی وارد شده به سیستم میباشد.

اگر در این معادله $F_0=0$ و C=0 و m=1 و $k=\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}$ باشد رابطه بالا به شکل رابطه (۱۰) درمی آید.

$$\ddot{x} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}x \qquad (۱۰)$$

که در آن m_1 جرم ماهواره و m_2 جرم زمین و r شعاع زمین بعلاوه ارتفاع ماهواره از سطح زمین میباشد و G ثابت گرانش میباشد که برابر با ۱۱-^۱۰*۶.۶۷ میباشد.

رابطه بالا معادله کپلر[7] و یا همان معادله حرکت ماهواره در مدار میباشد.

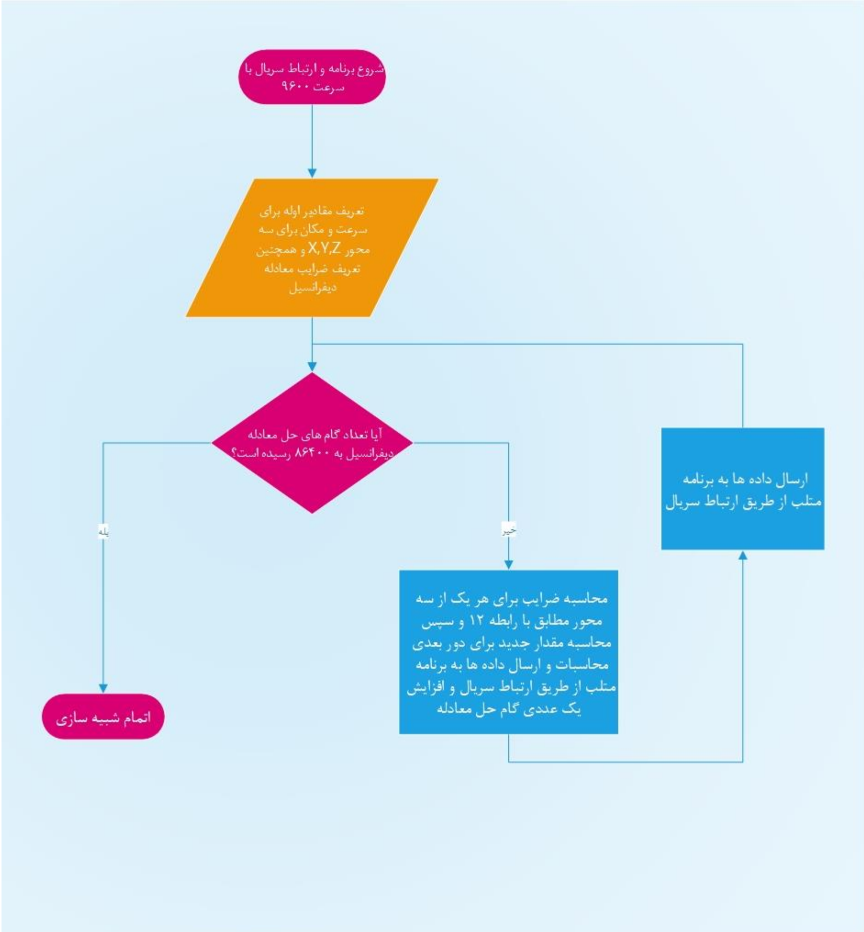
۳. پیاده سازی حل عدی بر روی میکروکنترلر

میکروکنترلر استفاده شده برای پیاده سازی شده از نوع AVR بوده و برای این منظور از برد های پیش ساخته آردینو کمک گرفته شده است،در ابتدا دستور شروع ارتباط سریال با سرعت ۹۶۰۰ به آردینو باید داده شود،این دستور برای ارسال دیتا به کامپیوتر و رسم آن در متلب استفاده میشود.سپس شرایط اولیه حل معادله دیفرانسیل باید برای میکروکنترلر مشخص گردد که شامل بردار اولیه مکان و سرعت میشوند. dtگام های حل عددی میباشد سپس به تعریف ضریب x در رابطه (۱۰) پرداخته میشود که برای ماهواه ای به جرم ۸۰ کیلوگرم برابر با ۶-^۱۰*۱.۳۶ میباشد اما با توجه به اینکه در سخت افزار آردینو ذخیره این مقدار در متغییر float باعث ایجاد مشکل شده و در برنامه باعث تشخیص مقدار صفر برای آن میگردد این ضریب در زمان تعریف در عدد ۶^۱۰ ضرب میگردد و در قسمت هایی که ضریب مورد استفاده قرار گرفته شود، برای حذف اثر عدد ضرب شده در آن باید نتایج عملیات های مختلف با سایر اعداد بر ۶^۱۰ تقسیم گردد تا نتیجه صحیح مشاهده شود.

باتوجه به اینکه فضای حرکت ماهواره سه بعدی میباشد لذا ۳ معادله دیفرانسیل برای ۳ محور مکانی باید مورد حل قرار بگیرد یکی در راستای محورx،یکی در راستای محورy و دیگری در راستای محورz پس با توجه به الگوریتم آدامز بشفورث اقدام به حل و نوشتن فرمول ها میگردد. ضرایب چهار مرتبه مختلف رابطه (۸) باید در هر دور از محاسبه مجددا محاسبه گردد تا نتیجه بعدی را حاصل کند با در نظر گرفتن مقدار یک ثانیه برای گسسته کردن معادله دیفرانسیل باید حلقه ای با مقدار تکرار ۸۶۴۰۰ در نظر گرفت که تکرار ۸۶۴۰۰ معادل ثانیه ای یک روز میباشد.

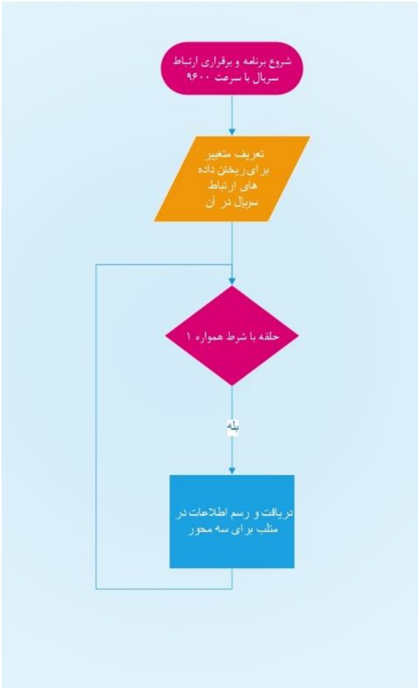
پس از تعریف چهار ضریب باید اقدام به مشخص کردن پارامترهای جدید با توجه به مقادیر دریافتی از چهارمرتبه آدامز بشفورث گردد و سپس باید اندازه برآیند سه بردار سرعت و بردار مکان و همینطور بردار اندازه حرکت ماهواره (h) محاسبه شود. همینطور مقدار انرژی کل مکانیکی ماهواره محاسبه میشود تا اثبات شود مقدار آن همواره ثابت است و در نهایت اقدام به ارسال اطلاعات به صورت سریال برای نرم افزار متلب از طریق پورت سریال میگردد دقت شود که اطلاعات پس از پردازش به صورت پشت سر هم برای کامپیوتر ارسال میشود. برای نمایش زمان واقعی* محاسبات انجام شده در آردینو بر روی نرم افزارمتلب پس از نصب افزونه hardware Arduino add-ons بر روی نرم افزار متلب باید مطابق دیاگرام شکل ۲ عمل شود. ابتدا به معرفی ارتباط سریال برای نرم افزار متلب پرداخته میشود و پورت اتصالی کامپیوتر به آردینو مشخص میگردد و سپس سرعت ارتباط مشخص میشود که باید با سرعت مشخص شده در برنامه آردینو همخوانی داشته باشد و سپس اقدام به باز کردن پورت سریال برای ارتباط نرم افزار متلب برای ارتباط با آردینو میشود.

* Real time



شکل ۲ **دیاگرام برنامه میکروکنترلر برای پردازش و ارسال داده**

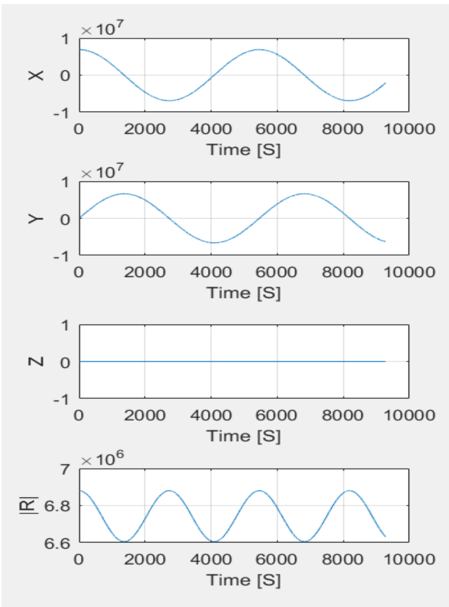
سپس اقدام به خواندن اطلاعات از پورت سریال کرده و مقادیر دریافتی از آردینو در متغیری ریخته میشود و اقدام به رسم هر یک از متغییر ها میگردد و دوباره از ابتدا این چرخه ادامه پیدا میکند.دیاگرام نرم افزاری در شکل ۳ قابل مشاهده است.



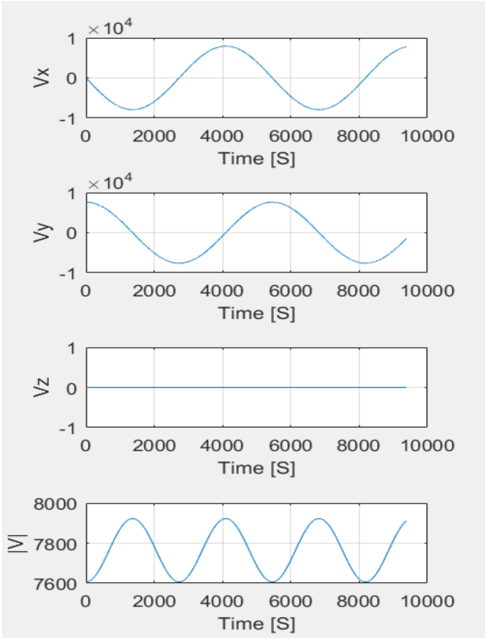
شکل ۳ **دیاگرام برنامه متلب برای رسم داده ها**

۴. نتیجه گیری

نتایج ارائه شده در ادامه با فرضیات اولیه $r_z = ۰$ (فاصله فرضی ماهواره از مرکز زمین و صفحه ی x و y)و $r_y = ۰$ (فاصله فرضی ماهواره از مرکز زمین و صفحه ی x و z) و $r_x = ۶۷۰۰۰۰۰$ ((فاصله فرضی ماهواره از مرکز زمین و صفحه ی z و y)) و $v_z = ۰$ (سرعت مداری متر بر ثانیه در جهت محور z) و $v_x = ۰$ (سرعت مداری متر بر ثانیه در جهت محور x) و $v_y = ۷۷۰۰$ (سرعت مداری متر بر ثانیه در جهت محور y) رسم شده است.



شکل ۴ **موقعیت مکانی محاسبه شده ماهواره توسط میکروکنترلر**



شکل ۵ **سرعت محاسبه شده ماهواره توسط میکروکنترلر**

با توجه به نتایج بدست آمده در شکل ۴و شکل ۵ مشخص است که ماهواره در صفحه x و y در حال حرکت است و با توجه به اندازه سرعت و بردار مکان مشخص است که مدار ماهواره مداری بیضوی است، همینطور با توجه به تکرار شدن یک الگوی ثابت در تمام نمودار ها مشخص است که نتایج صحیح است چرا که حرکت ماهواره به صورت دوره ای تکرار میگردد.

۵. مراجع

[1] b.s.leylva-mayorga, "leo-small-satellite constellation for 5G and Beyond-5G Communications," *leyva-mayorga*, vol. 4, pp. 1-10, 2020.

[2] A. Company, "Arduino Uno R3 DATASHEET," Arduino cc., 2022.

[3] g. s. bandyopadhyay, "A Review of Impending Small Satellite Formation Flying Missions," in *53rd AIAA Aerospace Sciences meeting*, 2015.

[4] J. Butcher, "Numerical methods for Ordinary differential equations in the 20th century," *journal of computational and applied mathematics*, vol. 125, pp. 1-29, 2000.

[5] g. t. z. lijuan, "comparison of several Numerical Algorithms for solving Ordinary Differential Equation Initial Value Problem," *Advance in computer Science Research*, vol. 78, pp. 454-458, 2018.

[6] T.R.HSU, "Application of First-order Differential Equations in engineering analysis," in *Applied Engineering Analysis*, 2018, p. chapter7.

[7] M. Murison, "A Practical Metho for Solving the Kepler Equation," *U.S Naval Observatory*, 2006.