به کارگیری سه روش تحلیلی برای حل معادله دیفرانسیل غیر خطی مرتبه کسری تحت مشتق کسری کاپوتو

صفورا رضائی آدریانی[۱]
دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

رضا سعادتی
دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

جواد وحیدی
دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

چکیده

در این مقاله، با استفاده از سه روش $\frac{G'}{G}$−گسترش یافته، $\frac{G'}{G^2}$−گسترش یافته و F−توسعه‌یافته به حل تحلیلی معادله کسری وابسته به زمان هری–دیم تحت مشتق کسری کاپوتو می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: مشتق کسری کاپوتو، روشهای تحلیلی

[2010]: 35C07, 35C08, 35Q53

۱ مقدمه

حسابان کسری موضوعی است که بیش از سیصد سال قدمت دارد. ایده‌ی حسابان کسری از همان زمان حسابان کلاسیک به وجود آمده و بیشترین نظریه های مربوط به آن تا قبل از قرن بیستم گسترش یافته بود. نخستین بار در سال ۱۶۹۵ این موضوع را لایبنیتس [۲] و هوپیتال [۳] مطرح کردند. در واقع در آن زمان هوپیتال به لایبنیتس نامه ای نوشت و نظر او را درمورد مشتق با مرتبهٔ غیر صحیح $\frac{1}{2}$ جویا شد. لایبنیتس در پاسخ به او نوشت: ((این موضوع منجر به تناقض می‌شود، اما بعد ها نتایج مفیدی از آن به دست خواهد آمد)) و این تولد حسابان کسری بود. سؤال طرح شده توسط لایبنیتس باعث شد از آن به بعد افراد زیادی این موضوع را دنبال کنند. در سال ۱۷۳۰ این موضوع توجه اویلر [۴] را به خود جلب نمود. در آن زمان اویلر بیان کرد که ((اگر n یک عدد صحیح مثبت و p تابعی از x باشد آن‌گاه کسر $\frac{d^n p}{d^n x}$ را می توان به صورت جبری بیان نمود)). در ۱۷۷۲، لاگرانژ [۵] با مطالعه‌ی عملگر دیفرانسیلی، به طور غیرمستقیم به حسابان کسری پرداخته بود. در ۱۸۱۲ لاپلاس [۶] یک مشتق کسری را به وسیلهٔ انتگرال تعریف نمود و در ۱۸۱۹ اولین مفهوم مشتق از مرتبه دلخواه توسط لاکروا [۷] معرفی شد. نفر بعد که مشتق از مرتبهٔ دلخواه را معرفی نمود، فوریه [۸] در سال ۱۸۲۲ بود. وی عملگر کسری خود را بر اساس نمایش انتگرالی از تابع $f(x)$ تعریف نمود. اگرچه دانشمندان و محققان زیادی مفهوم عملگر کسری

[۱] سخنران

[2] Leibniz
[3] L'Hospital
[4] Euler
[5] Lagrange
[6] Laplace
[7] Lacroix
[8] Fourier

را ارائه دادند، اما اولین کسی که عملگر کسری را به کار برد آبل [۹] در سال ۱۸۲۳ بود. لیوویل [۱۰] مطالعات خود را در ۱۸۳۲ بر روی حسابان کسری آغاز کرد. وی اولین کسی بود که تلاش کرد معادلات دیفرانسیل با مشتق کسری را حل کند. در ۱۸۶۷ گرونوالد [۱۱] نیز در زمینهٔ عملگرهای کسری مطالعاتی انجام داد. بین سال های ۱۸۶۸ تا ۱۸۷۲ لتنیکف [۱۲] چند مقاله در زمینه حسابان کسری نوشت. در ۱۸۹۲ یک مقاله از ریمان [۱۳] منتشر شد که نشان می داد وی مفهوم انتگرال کسری رابه کار برده است. گرونوالد و کروگ [۱۴] نتایج بدست آمده توسط ریمان و لیوویل را یکسان سازی کرده و انتگرال و مشتقی را به نام ریمان–لیوویل معرفی کردند، که امروزه هنوز با همین نام به کار می رود. در اوایل قرن بیستم یعنی بین سال های ۱۹۰۰ تا ۱۹۷۰ تلاش های زیادی توسط دانشمندان مختلف در این زمینه صورت گرفت. شخصی به نام کاپوتو [۱۵] با استفاده از بازنویسی فرمول ریمان–لیوویل مشتق جدیدی را معرفی نمود که امروزه با نام مشتق کاپوتو از آن استفاده می شود.

در این مقاله، با استفاده از سه روش $\frac{G'}{G}$–گسترش یافته [۱]، $\frac{G'}{G^۲}$–گسترش یافته [۲] و F–توسعه‌یافته [۳] به حل تحلیلی معادله کسری وابسته به زمان هری–دیم [۱۶] [۴]

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u(x,t) &= u^۳(x,t)u_{xxx}(x,t), \quad ۰<\alpha\leq ۱, \\ u(x,۰) &= \left(a-\frac{۳\sqrt{b}}{۲}x\right)^{\frac{۲}{۳}}, \end{aligned} \tag{۱}$$

می‌پردازیم که در آن D^α مشتق کسری کاپوتو با مرتبه α است و به صورت زیر تعریف می‌شود [۵، ۶]

$$D^\alpha f(t)=I^{n-\alpha}D^n f(t)=\frac{۱}{\Gamma(n-\alpha)}\int_۰^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+۱}}ds,\ \ n-۱<\alpha<n\in\mathbb{N},\ t>۰,$$

و به همین ترتیب انتگرال کسری ریمان–لیوویل با مرتبه β به صورت زیر تعریف می‌شود

$$I_t^\beta f(t)=\frac{۱}{\Gamma(\beta)}\int_۰^t (t-s)^{\beta-۱}f(s)ds,\ \ \beta>۰,\ t>۰.$$

۲ ایده اصلی سه روش $\frac{G'}{G}$–گسترش یافته، $\frac{G'}{G^۲}$–گسترش یافته و F–توسعه‌یافته

معادله دیفرانسیل جزئی کسری غیر خطی

$$\mathsf{N}(u,D_t^\alpha u,D_x^\alpha u,D_x^\beta u,D_x^\alpha D_x^\beta u,D_t^\alpha D_t^\beta u,\cdots)=۰,\quad ۰<\alpha,\beta\leqslant ۱,\quad u=u(x,t), \tag{۲}$$

را در نظر بگیرید. با استفاده از تغییر متغیر

$$\xi=\frac{dx^{d\beta}}{\Gamma(۱+\beta)}+\frac{cx^{c\alpha}}{\Gamma(۱+\alpha)},\qquad u(x,t)=u(\xi),\quad c,d:\text{ثابت} \tag{۳}$$

PDE (۲) را به صورت ODE زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\tilde{\mathsf{N}}(u,u',u'',u''',\ldots)=۰. \tag{۴}$$

اکنون در سه زیر بخش زیر الگوریتم اصلی سه روش مذکور را ارایه می‌دهیم.

[9] Abel
[10] Liouville
[11] Grünwald
[12] Letnikov
[13] Riemann
[14] Krug
[15] Caputo
[16] Harry-Dym

۱.۲ الگوریتم روش $\frac{G'}{G}$–گسترش یافته

فرض کنید جواب عمومی (۴) به فرم

$$u(\xi)=\sum_{i=0}^{N}a_i\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^i, \tag{۵}$$

باشد که در آن $G=G(\xi)$ در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند

$$G''(\xi)+\lambda G'(\xi)+\eta G(\xi)=0. \tag{۶}$$

با جایگذاری (۵) و (۶) در (۴) و حل سیستم جبری بدست آمده، ثابت‌های λ, $\underbrace{a_i}_{i=1,\dots,N}$ و η مشخص می‌شوند.

براساس η و λ جواب‌های عمومی (۶) به فرم‌های زیر نوشته می‌شوند.

حالت ۱: $\lambda^2-4\eta>0$;

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}=\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\eta}\left(\frac{C\cosh(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\eta}\mu)+D\sinh(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\eta}\xi)}{D\cosh(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\eta}\xi)+C\sinh(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\eta}\xi)}\right)-\frac{\lambda}{2}, \tag{۷}$$

حالت ۲: $\lambda^2-4\eta<0$;

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}=\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\eta}\left(\frac{-C\sin(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\eta}\xi)+D\cos(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\eta}\xi)+D}{D\sin(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\eta}\xi)+C\cos(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\eta}\xi)-D}\right)-\frac{\lambda}{2}, \tag{۸}$$

حالت ۳: $\lambda^2-4\eta=0$;

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}=\frac{C}{(C\xi+D)}-\frac{\lambda}{2}, \tag{۹}$$

که در آن $C,D\neq 0$.

با جایگذاری مقادیر مجهول بدست آمده و جواب‌های (۷)، (۸) و (۹) در (۵) و با در نظر گرفتن تغییر متغیر (۳)، جواب‌های دقیق (۲) بدست می‌آید.

۲.۲ الگوریتم روش $\frac{G'}{G^2}$–گسترش یافته

فرض کنید جواب عمومی (۴) به فرم زیر باشد

$$u(\xi)=a_0+\sum_{i=1}^{N}\left[a_i\left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)^i+b_i\left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)^{-i}\right], \tag{۱۰}$$

که در آن $G=G(\xi)$ در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند

$$\left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)'=\eta+\lambda\left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)^2. \tag{۱۱}$$

با جایگذاری (۱۰) و (۱۱) در (۴) و حل سیستم جبری بدست آمده، ثابت‌های $\underbrace{a_i}_{i=0,\dots,N}$ ، $\underbrace{b_i}_{i=1,\dots,N}$ ، $\eta\neq 1$ و $\lambda\neq 0$ مشخص می‌شوند.

براساس η و λ جواب‌های عمومی (۱۱) به فرم‌های زیر نوشته می‌شوند.

حالت ۱: $\lambda\eta > 0$;

$$\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} = \sqrt{\frac{\eta}{\lambda}}\left(\frac{C\cos(\sqrt{\eta\lambda}\xi) + D\sin(\sqrt{\eta\lambda}\xi)}{D\cos(\sqrt{\eta\lambda}\xi) - C\sin(\sqrt{\eta\lambda}\xi)}\right), \tag{۱۲}$$

حالت ۲: $\lambda\eta < 0$;

$$\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} = -\frac{\sqrt{|\eta\lambda|}}{\lambda}\left(\frac{C\sinh(2\sqrt{|\eta\lambda|}\xi) + C\cosh(2\sqrt{|\eta\lambda|}\xi) + D}{C\sinh(2\sqrt{|\eta\lambda|}\xi) + C\cosh(2\sqrt{|\eta\lambda|}\xi) - D}\right), \tag{۱۳}$$

حالت ۳: $\lambda \neq 0, \eta = 0$;

$$\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} = -\frac{C}{\lambda(C\xi + D)}, \tag{۱۴}$$

که در آن $C, D \neq 0$.

با جایگذاری مقادیر مجهول بدست آمده و جواب‌های (۱۲)، (۱۳) و (۱۴) در (۵) و با در نظر گرفتن تغییر متغیر (۳)، جواب‌های دقیق (۲) بدست می‌آید.

۳.۲ الگوریتم روش F−توسعه‌یافته

فرض کنید جواب عمومی (۴) به فرم زیر باشد

$$u(\xi) = A_0 + \sum_{i=1}^{n}\Big(A_iF^i(\xi) + B_iF^{-i}(\xi)\Big), \tag{۱۵}$$

که در آن A_i و B_i ثابت‌هایی هستند که بعداً مشخص می‌شوند و $F(\xi)$ در تساوی زیر صدق می‌کند

$$(F'(\xi))^2 = h_0 + h_1F(\xi) + h_2F^2(\xi) + h_3F^3(\xi) + h_4F^4(\xi) \tag{۱۶}$$

که در آن h_1, h_2, h_3 و h_4 ثابت هستند.

با گرفتن مشتق از طرفین رابطه فوق، نسبت به ξ داریم

$$F''(\xi) = \frac{1}{2}h_1 + h^2F(\xi) + \frac{3}{2}h_3F^2(\xi) + 2h_4F^3(\xi). \tag{۱۷}$$

با جایگذاری (۱۰) و (۱۱) در (۴) و حل سیستم جبری بدست آمده، ثابت‌های A_0, $\underbrace{A_i}_{i=1,\dots,n}$, و $\underbrace{B_i}_{i=1,\dots,n}$ مشخص می‌شوند.

حال، با جایگذاری مقادیر به‌دست آمده در (۱۵) جواب دقیق (۱) به دست می‌آید.

۳ کاربردها

معادله کسری هری−دیم (۱) را در نظر بگیرید. تغیر متغیرهای مفروض زیر را در نظر بگیرید

$$X = \int_{-\infty}^{x}\frac{ds}{u(s,t)},$$
$$T = -\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)},$$
$$\Xi(X,T) = u\Big(x(X,T), t(X,T)\Big)$$

که در آن $x = x(X,T)$ و $t = t(X,T)$.

دقت کنید زمانی که $|x| \to \infty$ ، $u(x,t)$ و مشتقات آن به صفر میل می‌کنند. بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial^\alpha X}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial^\alpha T}{\partial t^\alpha} \\ &= -\frac{\partial}{\partial T} - \left(\frac{\Xi\Xi_{XX} - \frac{3}{2}\Xi_X^2}{\Xi^2}\right)\frac{\partial}{\partial X},\end{aligned}$$

و همچنین

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\Xi(X,T)}\frac{\partial}{\partial X}.$$

بنابراین (۱) را به فرم زیر می‌توان بازنویسی کرد

$$\Xi_T + \frac{\Xi_{XXX}\Xi^2 - 3\Xi_{XX}\Xi_X\Xi + \frac{3}{2}\Xi_X^3}{\Xi^2} = 0. \tag{18}$$

حال، تغییر متغیر زیر را در نظر بگیرید

$$\psi(X,T) = \frac{\Xi_X}{\Xi}. \tag{19}$$

طبق (۱۸) و (۱۹)، معادله KdV زیر را بدست می‌آوریم

$$\psi_T - \frac{3}{2}\psi^2\psi_X + \psi_{XXX} = 0. \tag{20}$$

فرض کنید

$$\begin{aligned}&\psi(X,T) = \psi(\xi), \\ &\xi = \xi(X,T) = X - cT,\end{aligned} \tag{21}$$

که در آن c یک ثابت است.

با جایگذاری (۲۱) در (۲۰)، دایم

$$-c\psi' - \frac{3}{2}\psi^2\psi' + \psi''' = 0. \tag{22}$$

با انتگرال‌گیری از طرفین (۲۲)، داریم

$$-c\psi - \frac{1}{2}\psi^3 + \psi'' = 0. \tag{23}$$

با مقایسه دو عبارت ψ'' و ψ^3 در (۲۳)، نتیجه می‌گیریم که در (۵) و (۱۰)، $N = 1$.

حال، در دو بخش زیر به حل تحلیلی معادله کسری وابسته به زمان هری–دیم (۱)، می‌پردازیم.

۱.۳ کاربرد روش $\frac{G'}{G}$–گسترش یافته

فرض کنید جواب (۲۳) به فرم زیر باشد

$$\psi(\xi) = a_0 + a_1\left(\frac{G'}{G}\right), \tag{24}$$

که در آن a_0 و $a_1 \neq 0$ ثابت‌هایی هستند که بعداً مشخص می‌شوند.

با جایگذاری (۲۴) و (۶) در (۲۳) و مرتب کردن آن بر اساس توان‌های $\frac{G'}{G}$ ، سیستم جبری زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{G'}{G}\right)^{0}: -a_0c + a_1\lambda\eta - \frac{a_0^3}{2} = 0,\\
&\left(\frac{G'}{G}\right)^{1}: -a_1c + a_1\lambda^2 + 2a_1\eta - \frac{3}{2}a_0^2a_1 = 0,\\
&\left(\frac{G'}{G}\right)^{2}: 3a_1\lambda - \frac{3}{2}a_0a_1^2 = 0,\\
&\left(\frac{G'}{G}\right)^{3}: 2a_1 - \frac{a_1^3}{2} = 0.
\end{aligned}$$

با حل سیستم جبری فوق نتایج زیر بدست می‌آیند.

$$a_1 = \pm 2,\quad a_0 = \pm\lambda,\quad c = -\frac{1}{2}(\lambda^2 - 4\eta^2). \tag{۲۵}$$

با جایگذاری (۲۵) در (۲۴)، داریم:

$$\psi(\xi) = \pm\lambda \pm 2\left(\frac{G'}{G}\right). \tag{۲۶}$$

بنابراین،

- اگر $\lambda^2 - \eta > 0$؛

$$u_1(x,t) = \pm\sqrt{2c}\left(\frac{iC\cos(\sqrt{\frac{c}{2}}(x - \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}) + D\sin(\sqrt{\frac{c}{2}}(x - \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}))}{-iC\sin(\sqrt{\frac{c}{2}}(x - \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)})) + D\cos(\sqrt{\frac{c}{2}}(x - \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}))}\right), \tag{۲۷}$$

- اگر $\lambda^2 - \eta < 0$؛

$$u_2(x,t) = \pm i\sqrt{2c}\left(\frac{-C\sin(\sqrt{\frac{c}{2}}(x - \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}) + D\cos(\sqrt{\frac{c}{2}}(x - \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}))}{C\cos(\sqrt{\frac{c}{2}}(x - \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)})) + D\sin(\sqrt{\frac{c}{2}}(x - \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}))}\right), \tag{۲۸}$$

- اگر $\lambda^2 - \eta = 0$؛

$$u_3(x,t) = \pm\frac{D}{\lambda(D(x - \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}) + C)},$$

که در آن $C, D \neq 0$.

۲.۳ کاربرد روش $\frac{G'}{G^2}$–گسترش یافته

فرض کنید جواب (۲۳) به فرم زیر باشد

$$\psi(\xi) = a_0 + a_1\left(\frac{G'}{G^2}\right) + b_1\left(\frac{G'}{G^2}\right)^{-1}, \tag{۲۹}$$

که در آن a_0, b_1, a_1 ثابت‌هایی هستند که بعداً مشخص می‌شوند.

با جایگذاری (۲۹) و (۱۱) در (۲۳) و مرتب کردن آن بر اساس توان‌های $\frac{G'}{G^2}$ ، سیستم جبری زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{G'}{G^{2}}\right)^{-3} : 2b_1\eta^2 - \frac{1}{2}b_1^3 = 0,\\
&\left(\frac{G'}{G^{2}}\right)^{-2} : -\frac{3}{2}a_0 b_1^2 = 0,\\
&\left(\frac{G'}{G^{2}}\right)^{-1} : -cb_1 - \frac{3}{2}a_0^2 b_1 - \frac{3}{2}a_1 b_1^2 + 2b_1\eta\lambda = 0,\\
&\left(\frac{G'}{G^{2}}\right)^{0} : -3a_1 a_0 b_1 - \frac{1}{2}a_0^3 - ca_0 = 0,\\
&\left(\frac{G'}{G^{2}}\right)^{1} : -ca_1 - \frac{3}{2}a_0^2 a_1 - \frac{3}{2}a_1^2 b_1 + 2a_1\lambda\eta = 0,\\
&\left(\frac{G'}{G^{2}}\right)^{2} : -\frac{3}{2}a_0 a_1^2 = 0,\\
&\left(\frac{G'}{G^{2}}\right)^{3} : 2a_1\lambda^2 - \frac{1}{2}a_1^3 = 0.
\end{aligned}$$

با حل سیستم جبری فوق نتایج زیر بدست می‌آیند.

$$c = -\frac{1}{2}a_0^2,\quad \eta=\eta,\quad \lambda=\lambda,\quad a_0=a_0,\quad a_1=0,\quad b_1=0, \tag{۳۰}$$

$$c = c,\quad \eta=\eta,\quad \lambda=\lambda,\quad a_0=0,\quad a_1=0,\quad b_1=0, \tag{۳۱}$$

$$c = 2\lambda\eta,\quad \eta=\eta,\quad \lambda=\lambda,\quad a_0=0,\quad a_1=0,\quad b_1=2\eta, \tag{۳۲}$$

$$c = 2\lambda\eta,\quad \eta=\eta,\quad \lambda=\lambda,\quad a_0=0,\quad a_1=0,\quad b_1=-2\eta, \tag{۳۳}$$

$$c = 2\lambda\eta,\quad \eta=\eta,\quad \lambda=\lambda,\quad a_0=0,\quad a_1=2\lambda,\quad b_1=0, \tag{۳۴}$$

$$c = 2\lambda\eta,\quad \eta=\eta,\quad \lambda=\lambda,\quad a_0=0,\quad a_1=-2\lambda,\quad b_1=0, \tag{۳۵}$$

$$c = -4\lambda\eta,\quad \eta=\eta,\quad \lambda=\lambda,\quad a_0=0,\quad a_1=2\lambda,\quad b_1=2\eta, \tag{۳۶}$$

$$c = 8\lambda\eta,\quad \eta=\eta,\quad \lambda=\lambda,\quad a_0=0,\quad a_1=-2\lambda,\quad b_1=2\eta, \tag{۳۷}$$

$$c = 8\lambda\eta,\quad \eta=\eta,\quad \lambda=\lambda,\quad a_0=0,\quad a_1=2\lambda,\quad b_1=-2\eta, \tag{۳۸}$$

$$c = -4\lambda\eta,\quad \eta=\eta,\quad \lambda=\lambda,\quad a_0=0,\quad a_1=-2\lambda,\quad b_1=-2\eta. \tag{۳۹}$$

با جایگذاری (۳۹) در (۲۹)، داریم:

$$\psi(\xi) = -2\lambda\left(\frac{G'}{G^{2}}\right) - 2\eta\left(\frac{G'}{G^{2}}\right)^{-1}. \tag{۴۰}$$

بنابراین،

- اگر $\lambda\eta > 0$؛

$$u_1(x,t) = -2\lambda\rho_1 - 2\eta(\rho_1)^{-1}, \tag{۴۱}$$

که در آن

$$\rho_1 := \sqrt{\frac{\eta}{\lambda}}\left(\frac{C\cos(\sqrt{\eta\lambda}(x-\frac{-4\lambda\eta t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}) + D\sin(\sqrt{\eta\lambda}(x-\frac{-4\lambda\eta t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}))}{D\cos(\sqrt{\eta\lambda}(x-\frac{-4\lambda\eta t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)})) - C\sin(\sqrt{\eta\lambda}(x-\frac{-4\lambda\eta t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}))}\right),$$

• اگر $\lambda\eta < ۰$;

$$u_۲(x,t) = -۲\lambda\rho_۲ - ۲\eta(\rho_۲)^{-۱}, \tag{۴۲}$$

که در آن

$$\rho_۲ := -\frac{\sqrt{|\eta\lambda|}}{\lambda}\left(\frac{C\sinh(۲\sqrt{|\eta\lambda|}(x-\frac{-۴\lambda\eta t^\alpha}{\Gamma(۱+\alpha)})) + C\cosh(۲\sqrt{|\eta\lambda|}(x-\frac{-۴\lambda\eta t^\alpha}{\Gamma(۱+\alpha)})) + D}{C\sinh(۲\sqrt{|\eta\lambda|}(x-\frac{-۴\lambda\eta t^\alpha}{\Gamma(۱+\alpha)})) + C\cosh(۲\sqrt{|\eta\lambda|}(x-\frac{-۴\lambda\eta t^\alpha}{\Gamma(۱+\alpha)})) - D}\right),$$

• اگر $\lambda \neq ۰, \eta = ۰$;

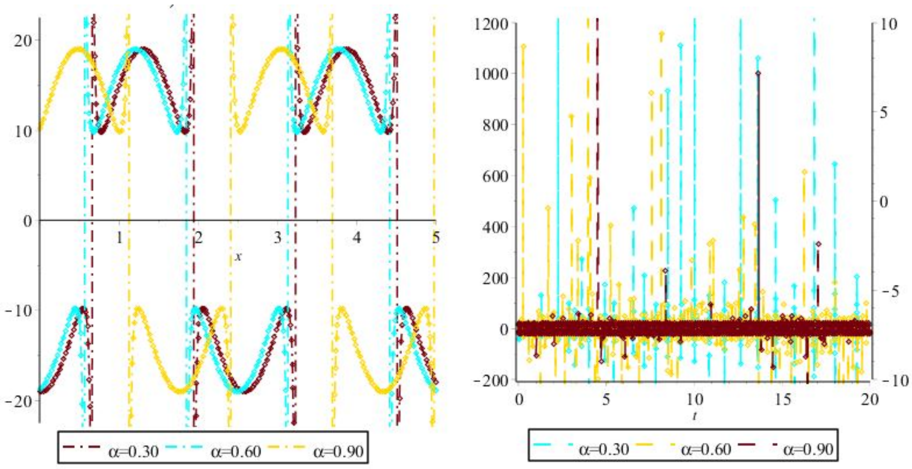
$$u_۳(x,t) = -۲\lambda\rho_۳ - ۲\eta(\rho_۳)^{-۱},$$

که در آن

$$\rho_۳ := -\frac{C}{\lambda(C(x-\frac{-۴\lambda\eta t^\alpha}{\Gamma(۱+\alpha)}) + D)},$$

که $C, D \neq ۰$.

نمودارهای ۲ و ۱ رسم‌های (۴۱) و (۴۲) را برای مقادیر مختلف α نمایش می‌دهند.



شکل ۱: رسم (۴۱) برای مقادیر مختلف α.

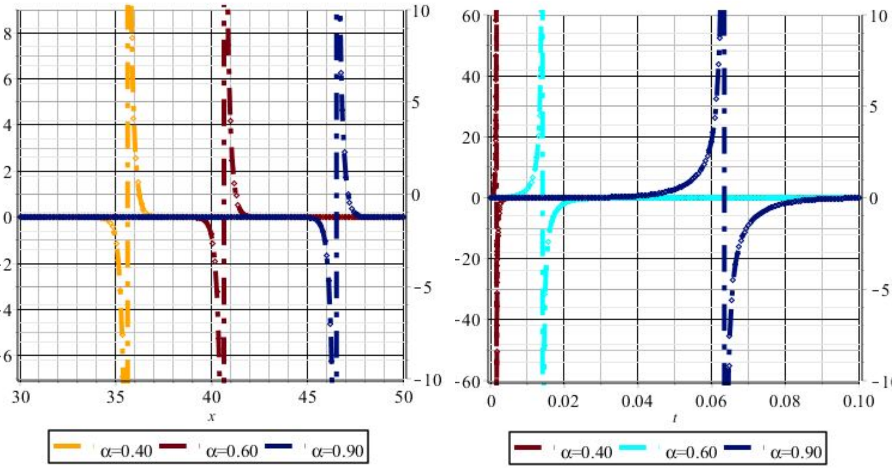
۳.۳ کاربرد روش F−توسعه‌یافته

فرض کنید جواب (۲۳) به فرم زیر باشد

$$u(\xi) = A_۰ + A_۱F(\xi) + \frac{B_۱}{F(\xi)}. \tag{۴۳}$$

با جایگذاری (۴۳)، (۱۶) و (۴۳) در (۲۳) داریم

$$\begin{aligned}&A_۰^۳ + ۶A_۰A_۱B_۱ - ۳cA_۰ + \frac{۳A_۱h_۱}{۲} + \frac{۳B_۱h_۳}{۲} + \frac{B_۱^۳ + ۶B_۱h_۰}{F^۳(\xi)} + \frac{۳A_۰B_۱^۲ + \frac{۹}{۲}B_۱h_۱}{F^۲(\xi)}\\&+\frac{۳A_۰^۲B_۱ + ۳A_۱B_۱^۲ - ۳cB_۱ + ۳B_۱h_۲}{F(\xi)} + [۳A_۰^۲A_۱ + ۳A_۱^۲B_۱ - ۳cA_۱ + ۳A_۱h_۲]F(\xi)\\&+[۳A_۰A_۱^۲ + \frac{۹}{۲}A_۱h_۳]F^۲(\xi) + [A_۱^۳ + ۶A_۱h_۴]F^۳(\xi) = ۰.\end{aligned} \tag{۴۴}$$



شکل ۲: رسم (۴۲) برای مقادیر مختلف α.

بنابراین،

$$
\begin{aligned}
&F^{-3} : B_1^3 + 6B_1h_0 = 0,\\
&F^{-2} : 3A_0B_1^2 + \frac{9}{2}B_1h_1 = 0,\\
&F^{-3} : 3A_0^2B_1 + 3A_1B_1^2 - 3cB_1 + 3B_1h_2 = 0,\\
&F^{0} : A_0^3 + 6A_0A_1B_1 - 3cA_0 + \frac{3A_1h_1}{2} + \frac{3B_1h_3}{2} = 0,\\
&F : 3A_0^2A_1 + 3A_1^2B_1 - 3cA_1 + 3A_1h_2 = 0,\\
&F^{2} : 3A_0A_1^2 + \frac{9}{2}A_1h_3 = 0,\\
&F^{3} : A_1^3 + 6A_1h_4 = 0.
\end{aligned}
\tag{۴۵}
$$

با حل سیستم جبری فوق و با استفاده ازنرم افزار میپل و با فرض $h_1, h_3 = 0$، نتایج زیر به دست می‌آید:

حالت	A_0	A_1	B_1	c
1	0	$\sqrt{-6h_4}$	0	h_2
2	0	$-\sqrt{-6h_4}$	0	h_2
3	0	0	$\sqrt{-6h_0}$	h_2
4	0	0	$-\sqrt{-6h_0}$	h_2
5	0	$\sqrt{-6h_4}$	$\sqrt{-6h_0}$	$h_2 - 6\sqrt{h_0h_4}$
6	0	$\sqrt{-6h_4}$	$-\sqrt{-6h_0}$	$h_2 + 6\sqrt{h_0h_4}$
7	0	$-\sqrt{-6h_4}$	$\sqrt{-6h_0}$	$h_2 + 6\sqrt{h_0h_4}$
8	0	$-\sqrt{-6h_4}$	$-\sqrt{-6h_0}$	$h_2 - 6\sqrt{h_0h_4}$

با جایگذاری مقادیر به دست آمده در بالا در (۴۳)، جواب‌های عمومی (۱) به صورت زیر به دست می‌آیند:
با قرار دادن $h_1 = h_3 = 0$ در (۱۶) داریم

$$(F'(\xi))^2 = h_0 + h_2F^2(\xi) + h_4F^4(\xi). \tag{۴۶}$$

جواب‌های (۴۶) در زیر داده شده است:

1	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6h_4}\, F(\xi)$	$\xi = x - h_2 t$
2	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6h_4}\, F(\xi)$	$\xi = x - h_2 t$
3	$u(x,t) = U(\xi) = \frac{\sqrt{-6h_0}}{F(\xi)}$	$\xi = x - h_2 t$
4	$u(x,t) = U(\xi) = \frac{-\sqrt{-6h_0}}{F(\xi)}$	$\xi = x - h_2 t$
5	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6h_4}\, F(\xi) + \frac{\sqrt{-6h_0}}{F(\xi)}$	$\xi = x - \left(h_2 - 6\sqrt{h_0 h_4}\right)t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6h_4}\, F(\xi) - \frac{\sqrt{-6h_0}}{F(\xi)}$	$\xi = x + \left(h_2 - 6\sqrt{h_0 h_4}\right)t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6h_4}\, F(\xi) + \frac{\sqrt{-6h_0}}{F(\xi)}$	$\xi = x + \left(h_2 - 6\sqrt{h_0 h_4}\right)t$
8	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6h_4}\, F(\xi) - \frac{\sqrt{-6h_0}}{F(\xi)}$	$\xi = x - \left(h_2 - 6\sqrt{h_0 h_4}\right)t$

حالت	h_0	h_2	h_4	$F(\xi)$
1	1	$-(1+m^2)$	m^2	$\mathrm{sn}\xi$
2	1	$-(1+m^2)$	m^2	$\mathrm{cd}\xi$
3	$1-m^2$	$2m^2-1$	$-m^2$	$\mathrm{cn}\xi$
4	m^2-1	$2-m^2$	-1	$\mathrm{dn}\xi$
5	m^2	$-(1+m^2)$	1	$\mathrm{ns}\xi$
6	m^2	$-(1+m^2)$	1	$\mathrm{dc}\xi$
7	$-m^2$	$2m^2-1$	$1-m^2$	$\mathrm{nc}\xi$
8	-1	$2-m^2$	m^2-1	$\mathrm{nd}\xi$
9	1	$2-m^2$	$1-m^2$	$\mathrm{sc}\xi$
10	1	$2m^2-1$	$-m^2(1-m^2)$	$\mathrm{sd}\xi$
11	$1-m^2$	$2-m^2$	1	$\mathrm{cs}\xi$
12	$-m^2(1-m^2)$	$2m^2-1$	1	$\mathrm{ds}\xi$

با جایگذاری هر حالت از حالات فوق در جواب‌های عمومی به دست آمده، جواب‌های (۱) به فرم توابع بیضوی ژاکوبی به دست می‌آیند.
با استفاده از عبارات زیر، وقتی‌که $m \to ۱$، توابع بیضوی ژاکوبی می‌توانند به توابع هذلولوی تبدیل شوند.

$\mathrm{sn}(\xi) \to \tanh(\xi)$	$\mathrm{cn}(\xi) \to \mathrm{sech}(\xi)$	$\mathrm{dn}(\xi) \to \mathrm{sech}(\xi)$	$\mathrm{sc}(\xi) \to \sinh(\xi)$
$\mathrm{sd}(\xi) \to \sinh(\xi)$	$\mathrm{cd}(\xi) \to 1$	$\mathrm{ns}(\xi) \to \coth(\xi)$	$\mathrm{nc}(\xi) \to \cosh(\xi)$
$\mathrm{nd}(\xi) \to \cosh(\xi)$	$\mathrm{cs}(\xi) \to \mathrm{csch}(\xi)$	$\mathrm{ds}(\xi) \to \mathrm{csch}(\xi)$	$\mathrm{dc}(\xi) \to 1$

همچنین با استفاده از عبارات زیر، وقتی‌که $m \to ۰$، توابع بیضوی ژاکوبی می‌توانند به توابع مثلثاتی تبدیل شوند.
جواب‌های دقیق (۱)، برای حالت به فرم‌های توابع بیضوی ژاکوبی، توابع هذلولوی و توابع مثلثاتی در زیر آمده است:

مراجع

[1] I. I. Baltaeva, I. D. Rakhimov, M. M. Khasanov, *A generalized (G'/G)-expansion method for the loaded modified Korteweg-de Vries equation*, arXiv preprint arXiv:2201.05063, 2022.

[2] S. Kaewta, S. Sirisubtawee, S. Koonprasert, S. Sungnul, *Applications of the (G /G 2)-Expansion Method for Solving Certain Nonlinear Conformable Evolution Equations*, Fractal and Fractional 5.3 (2021): 88.

[3] W. B. Rabie, H. M. Ahmed, *Cubic-quartic optical solitons and other solutions for twin-core couplers with polynomial law of nonlinearity using the extended F-expansion method*, Optik, 253 (2022): 168575.

[4] M. A. Assabaai, *Numerical solution of the Harry Dym equation using Chebyshev spectral method via Lie group method*, Journal of Physics: Conference Series, Vol. 1900. No. 1. IOP Publishing, 2021.

[5] S. R. Aderyani, R. Saadati, T. Abdeljawad, N. Mlaiki, *Multi-stability of non homogenous vector-valued fractional differential equations in matrix-valued Menger spaces*, Alexandria Engineering Journal 61 (12): 10913-1092, 2022

$\mathrm{sn}(\xi) \to \sin(\xi)$ $\mathrm{sd}(\xi) \to \sin(\xi)$ $\mathrm{nd}(\xi) \to 1$	$\mathrm{cn}(\xi) \to \cos(\xi)$ $\mathrm{cd}(\xi) \to \cos(\xi)$ $\mathrm{cs}(\xi) \to \cot(\xi)$	$\mathrm{dn}(\xi) \to 1$ $\mathrm{ns}(\xi) \to \csc(\xi)$ $\mathrm{ds}(\xi) \to \csc(\xi)$	$\mathrm{sc}(\xi) \to \tan(\xi)$ $\mathrm{nc}(\xi) \to \sec(\xi)$ $\mathrm{dc}(\xi) \to \sec(\xi)$

حالت	h_0	h_2	h_4	$F(\xi)$
1	1	$-(1+m^2)$	m^2	$\mathrm{sn}\xi$

[6] S. R. Aderyani, R. Saadati, *Best approximations of the -Hadamard fractional Volterra integro-differential equation by matrix valued fuzzy control functions*, Advances in Difference Equations, 1(2021). pp. 1-21.

پست الکترونیکی: safoura-rezaei99@mathdep.iust.ac.ir
پست الکترونیکی: rsaadati@iust.ac.ir
پست الکترونیکی: jvahidi@iust.ac.ir

1	$u(x,t)=U(\xi)=\sqrt{-6m^2}\,\mathrm{sn}\xi$	$\xi=x+(1+m^2)t$
2	$u(x,t)=U(\xi)=-\sqrt{-6m^2}\,\mathrm{sn}\xi$	$\xi=x+(1+m^2)t$
3	$u(x,t)=U(\xi)=\frac{\sqrt{-6}}{\mathrm{sn}\xi}$	$\xi=x+(1+m^2)t$
4	$u(x,t)=U(\xi)=\frac{-\sqrt{-6}}{\mathrm{sn}\xi}$	$\xi=x+(1+m^2)t$
5	$u(x,t)=U(\xi)=\sqrt{-6m^2}\,\mathrm{sn}\xi+\frac{\sqrt{-6}}{\mathrm{sn}\xi}$	$\xi=x+\left((1+m^2)+6\sqrt{m^2}\right)t$
6	$u(x,t)=U(\xi)=\sqrt{-6m^2}\,\mathrm{sn}\xi-\frac{\sqrt{-6}}{\mathrm{sn}\xi}$	$\xi=x-\left((1+m^2)+6\sqrt{m^2}\right)t$
7	$u(x,t)=U(\xi)=-\sqrt{-6m^2}\,\mathrm{sn}\xi+\frac{\sqrt{-6}}{\mathrm{sn}\xi}$	$\xi=x-\left((1+m^2)+6\sqrt{m^2}\right)t$
8	$u(x,t)=U(\xi)=-\sqrt{-6m^2}\,\mathrm{sn}\xi-\frac{\sqrt{-6}}{\mathrm{sn}\xi}$	$\xi=x+\left((1+m^2)+6\sqrt{m^2}\right)t$

1	$u(x,t)=U(\xi)=\sqrt{-6}\tanh(\xi)$	$\xi=x+2t$
2	$u(x,t)=U(\xi)=-\sqrt{-6}\tanh(\xi)$	$\xi=x+2t$
3	$u(x,t)=U(\xi)=\frac{\sqrt{-6}}{\tanh(\xi)}$	$\xi=x+2t$
4	$u(x,t)=U(\xi)=\frac{-\sqrt{-6}}{\tanh(\xi)}$	$\xi=x+2t$
5	$u(x,t)=U(\xi)=\sqrt{-6}\tanh(\xi)+\frac{\sqrt{-6}}{\tanh(\xi)}$	$\xi=x+8t$
6	$u(x,t)=U(\xi)=\sqrt{-6}\tanh(\xi)-\frac{\sqrt{-6}}{\tanh(\xi)}$	$\xi=x-8t$
7	$u(x,t)=U(\xi)=-\sqrt{-6}\tanh(\xi)+\frac{\sqrt{-6}}{\tanh(\xi)}$	$\xi=x-8t$
8	$u(x,t)=U(\xi)=-\sqrt{-6}\tanh(\xi)-\frac{\sqrt{-6}}{\tanh(\xi)}$	$\xi=x+8t$

1,2	$u(x,t)=U(\xi)=0$	$\xi=x+t$
3,5	$u(x,t)=U(\xi)=\frac{\sqrt{-6}}{\sin(\xi)}$	$\xi=x+t$
4,8	$u(x,t)=U(\xi)=\frac{-\sqrt{-6}}{\sin(\xi)}$	$\xi=x+t$
6	$u(x,t)=U(\xi)=\frac{-\sqrt{-6}}{\sin(\xi)}$	$\xi=x-t$
7	$u(x,t)=U(\xi)=\frac{\sqrt{-6}}{\sin(\xi)}$	$\xi=x-t$