

## یک بسته نرم‌افزاری برای مربع‌های لاتین و تعداد آنها

سیدعلی محمدیه<sup>۱\*</sup>، رضا کهکشانی<sup>۲</sup>

۱- گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

۲- گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

### چکیده

چنان که می‌دانیم، یک مربع لاتین مرتبه  $n$  عبارت است از آرایه‌ای  $k \times n$  که در آن هر درایه در هر سطر و ستون دقیقاً یک بار ظاهر شود. تعداد چنین مربع‌هایی با  $L(n)$  نشان داده می‌شود. محاسبه  $L(n)$  برای  $n \geq 12$  یک مسئله باز ترکیبیاتی است. در این مقاله، یک بسته نرم‌افزاری برای ارائه همه مربع‌های لاتین مرتبه  $n$  و محاسبه  $L(n)$  ارائه می‌کنیم. از مزیت‌های این بسته می‌توان عدم محدودیت در ارقام، شمارش مربع‌های لاتین و عدم وابستگی آن به سیستم عامل لینوکس را بر شمرد که توسط زبان برنامه‌نویسی Python پیاده‌سازی شده است.

کلمات کلیدی: نرم‌افزار، مربع لاتین، مستطیل لاتین، آرایه

### ۱. مقدمه

یک مستطیل لاتین  $k \times n$  که  $k < n$ ، عبارت است از آرایه‌ای  $k \times n$  با درایه‌هایی از مجموعه  $\{1, 2, \dots, n\}$  با این ویژگی که هر درایه در هر سطر دقیقاً یک بار و در هر ستون حداکثر یک بار ظاهر شود. یک مربع لاتین مرتبه  $n$  عبارت است از مستطیلی لاتین که در آن  $k = n$ . در هر مربع لاتین، سطرها و ستون‌ها جایگشت‌هایی از مجموعه  $\{1, 2, \dots, n\}$  هستند. در جدول‌های سودوکو به نوعی مربع‌های لاتین مشاهده می‌شوند. همان طور که می‌دانیم، در هر مستطیل لاتین دست‌کم  $(n - k)!$  طریق برای اضافه نمودن یک سطر و تشکیل یک مستطیل لاتین  $(k + 1) \times n$  وجود دارد. در این صورت، هر مستطیل لاتین  $k \times n$  قابل گسترش به یک مربع لاتین مرتبه  $n$  است. یکی از مسائل ترکیبیاتی، که هنوز باز می‌باشد، محاسبه و بیان دستوری برای تعداد چنین مربع‌هایی است. ثابت می‌شود که تعداد مربع‌های لاتین دست‌کم برابر می‌باشد،  $\prod_{k=1}^k k!$  است. تعداد مربع‌های لاتین از مرتبه  $n$  را با  $L(n)$  نمایش می‌دهیم. به سادگی دیده می‌شود که  $L(1) = 1$  و  $L(2) = 2$ . همچنین، با شمارش ترکیبیاتی می‌توان مشاهده نمود  $L(3) = 12$  و  $L(4) = 576$ . تاکنون مقادیر  $L(n)$  با استفاده از رایانه تنها به ازای  $n \leq 11$  حاصل شده است. جدول ۱ را مشاهده نمایید. از آنجا که محاسبه  $L(n)$  سخت است، جستجوی کران‌های بالا و پایین برای آن مد نظر قرار گرفته و داریم

$$\frac{n!^{2n}}{n^{n^2}} \leq L(n) \leq \frac{n!^n}{e^{n-1}}$$

\*Corresponding author: S. A. Mohammadiyeh  
Email: alim@kashanu.ac.ir



مورد استفاده قرار داد. به عبارتی، این نرم‌افزار به صورت تخصصی برای مربع‌های لاتین است و به کمک آن می‌توان به عملیات‌های مختلفی مانند ساخت مربع‌های لاتین و محاسبه تعداد آنها پرداخت. برای مطالعه برخی محاسبات صورت گرفته پیرامون تعداد مربع‌های لاتین به [3, 4] رجوع شود.

## ۲. نتایج

بسته نرم‌افزاری LatinSquareGen به کمک زبان برنامه‌نویسی پایتون پیاده‌سازی شده است. روش استفاده از این نرم افزار بدین گونه است که ابتدا باید پایتون در دستگاه شما نصب گردد و سپس، نرم‌افزار را از مخزن مربوطه دریافت و اجرا نمایید [5]. بعد از اجرای نرم‌افزار با محتوای زیر روبرو می‌شوید که متن راهنمای نرم‌افزار است:

LatinSquareGen - v 1.0.0

Commands:

-h, --help	Show help
-v, --version	Show version
-l, --create-latin	Create an ordinary latin square
-rl, --create-random-latin	Create a random latin square
-cl, --count-latin	Count all latin squares in an order

این نرم‌افزار محدودیتی در انجام محاسبات ندارد. در الگوریتم این نرم‌افزار تنها برای شمارش تعداد مربع‌های لاتین از عملگر + استفاده می‌شود که با امکانات برنامه محدودیتی برای محاسبات عددی و تعداد ارقام وجود ندارد. امکان محاسبه عددی بدون محدودیت تعداد رقم نیز در دیگر زبان‌های برنامه‌نویسی مثل زبان سی (C) توسط ابزار GMP فراهم می‌شود.

با استفاده از این نرم‌افزار و با اجرای دستور LatinSquareGen -l n می‌توان فهرست همه مربع‌های لاتین مرتبه  $n$  را به دست آورد. همچنین، دستور LatinSquareGen -cl n تعداد مربع‌های لاتین مرتبه  $n$ ، یعنی عدد  $L(n)$ ، را به دست می‌دهد. اگر به تنها یک مربع لاتین از مرتبه  $n$  نیاز داریم، کافی است دستور LatinSquareGen -rl n را اجرا نماییم. برای مثال، تعداد مربع‌های لاتین از مرتبه ۳ برابر ۱۲ است و در شکل ۲ تمامی آنها به کمک این بسته نرم‌افزاری ایجاد شده‌اند. به علاوه، تمامی مربع‌های لاتین از مرتبه‌های ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ نیز توسط این نرم‌افزار به دست آمده‌اند که به دلیل حجم بالای خروجی‌ها می‌توانید فهرست کامل آنها را در

<https://maxbase.org/research/LatinSquareGen/>

مشاهده نمایید. در جدول ۳ زمان اجرای نرم‌افزار جهت ارائه فهرست و نیز تعداد مربع‌های لاتین برای مراتب ۱ تا ۶ آورده شده است. به علاوه، جدول ۴ مشخصات دستگاہی که بسته نرم‌افزاری LatinSquareGen روی آن اجرا شده است را نشان می‌دهد. به کمک این بسته نرم‌افزاری، می‌توان فهرست کامل و تعداد مربع‌های لاتین از هر مرتبه‌ای را به دست آورد. بدیهی است که با بالا رفتن مرتبه مربع لاتین، اجرای برنامه و محاسبات طولانی‌تر خواهد شد.

## ۳. بحث و نتیجه‌گیری

به دست آوردن مربع‌های لاتین از هر مرتبه دلخواه و محاسبه تعداد آنها همواره یکی از مسئله‌های چالش برانگیز و حل نشده ترکیبیاتی بوده است. در واقع، چنین مسئله‌ای NP-Complete است. با این حال، هیچ نرم‌افزار و بسته‌ای برای ایجاد تمامی

مربع‌های لاتین از یک مرتبه داده شده و محاسبه تعداد آنها یا انجام عملیاتی خاص بر روی آنها وجود ندارد. لذا، این بسته برای نخستین بار است که ارائه می‌شود و انجام محاسبات ذکر شده را میسر می‌سازد.

#### ۴. قدردانی

نویسندگان از داورانی که مقاله را مطالعه و با نظرات خود کیفیت آن را بهبود بخشیده‌اند کمال تشکر را دارند. این کار پژوهشی تحت پژوهانه شماره ۱۱۴۳۸۹۱ از سوی دانشگاه کاشان مورد حمایت قرار گرفته است.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

شکل ۲: تمامی مربع‌های لاتین مرتبه ۳

مرتب‌ه	زمان لازم جهت شمارش تعداد	زمان لازم جهت فهرست کل حالتها
۱	کمتر از یک میلی ثانیه	کمتر از یک میلی ثانیه
۲	کمتر از یک میلی ثانیه	کمتر از یک میلی ثانیه
۳	کمتر از یک میلی ثانیه	کمتر از یک میلی ثانیه
۴	کمتر از یک میلی ثانیه	کمتر از یک میلی ثانیه
۵	کمتر از دو ثانیه	کمتر از سه ثانیه
۶	حدود دو ساعت	چند ساعت

جدول ۳: مدت زمان اجرای نرم‌افزار

CPU	Intel(R) Core(TM) i5-9400F CPU @ 2.90GHz
Memory Speed	2133 MHz
OS (Operation System)	Windows 10 - 64-bit, x64-based processor

جدول ۴: مشخصات دستگاه



۵. منابع

- [1] V. Bryant, *Aspects of Combinatorics: a Wide-ranging Introduction*, Cambridge University Press, 1993.
- [2] P. J. Cameron, *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*, Cambridge University Press, 1994.
- [3] R. M. Falcon, J. Martin-Morales, Grobner bases and the number of Latin squares related to autotopisms of order  $\leq 7$ , *J. Symb. Comput.* 42 (2007) 1142–1154.
- [4] A. Hulpke, P. Kaski and P. R. J. Östergård, The number of Latin squares of order 11, *Math. Comput.*, Vol. 80, No. 274 (2011) 1197-1219.
- [5] S. A. Mohammadiyeh, GitHub – Open-Source software, <https://github.com/BaseMax/LatinSquareGen>.