روش‌های مرتبه بالا برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی وابسته به زمان

زهرا مشکات فر[۱]
فریده قریشی[۲]
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران.

چکیده

در این مقاله، یک تقریب مرتبه بالا با مرتبه همگرایی $O(\tau^{3-\alpha}),\ \alpha \in (0,1)$ برای مشتق کاپوتو معرفی شده است، که به کمک آن به حل عددی معادلات با مشتقات جزئی کسری وابسته به زمان می‌پردازیم. پایداری و همگرایی این روش مورد مطالعه قرار گرفته است. ثابت می‌کنیم مرتبه همگرایی روش به مرتبه مشتق کسری α وابسته بوده، و نشان می‌دهیم مرتبه همگرایی روش عبارت است از $O(\tau^{3-\alpha} + h^2)$ و $O(\tau^{3-\alpha} + h^4)$ که در آن τ اندازه طول گام‌های زمانی و h اندازه طول گام‌های مکانی است. درنهایت، نتایج عددی برای پشتیبانی از تحلیل نظری ارائه شده، مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

واژه‌های کلیدی: معادلات دیفرانسیل جزئی کسری زمانی؛ روش عناصر متناهی؛ تخمین خطا.

[2010]: 65M12, 35S10, 65M70

۱ مقدمه

در این مقاله قصد داریم یک روش عددی جدید برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری وابسته به زمان معرفی کنیم. برای این منظور از نوعی روش گسسته‌سازی زمانی که بر پایه روش دیتلم بوده و در انتگرال هادامارد با استفاده از چندجمله‌ای‌های درونیابی درجه دوم تکه‌ای تقریب زده شده، استفاده می‌شود. گسسته‌سازی فضا بر اساس روش عناصر متناهی استاندارد خواهد بود. معادله دیفرانسیل جزئی کسری را در نظر می‌گیریم:

$$
\begin{aligned}
{}_0^C D_t^\alpha u(x,t) - \Delta u(x,t) &= f(x,t), \quad && x \in \Omega, \quad t \in (0,T], && (1)\\
u(x,0) &= u_0, && x \in \Omega, && (2)\\
u(x,t) &= q(x,t), && x \in \partial\Omega \in (0,T], && (3)
\end{aligned}
$$

که در آن $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ و $d = 1,2,3$ یک دامنه چندضلعی یا محدب بوده و Δ لاپلاسین را نشان می‌دهد. در این‌جا توابع f و q معلوم بوده، و ${}_0^C D_t^\alpha x(t),\ 0 < \alpha < 1$ نشان‌دهنده مشتق مرتبه کسری کاپوتو است. بسیاری از مسائل کاربردی را می‌توان با استفاده از (۱)-(۳) مدل‌سازی کرد.

برای حل معادله (۱)-(۳) به صورت عددی، نیاز به تقریب مشتق مرتبه کسری وابسته به زمان فوق است. برای این منظور از روش دیتلم استفاده خواهیم نمود. این روش مبتنی بر تقریب انتگرال هادامارد است، که در ادامه آن را توصیف خواهیم نمود.

[۱] سخنران
[۲] سخنران

۲ گسسته‌سازی زمانی

در این بخش با استفاده از روش دیتلم تقریبی از مشتق کسری مطرح شده در (۱)-(۳) ارائه می‌دهیم. برای این منظور از مشتق کسری ریمان-لیوویل به ازای $0 < \alpha < 1$ استفاده می‌کنیم:

$$ {}_{0}^{R}D_t^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} x(\tau) d\tau. \tag{۴} $$

با استفاده از قاعده لایب‌نیتس و تعریف انتگرال هادامارد به راحتی می‌توان نشان داد که مشتق کسری ریمان-لیوویل در (۱) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود [۱]:

$$ {}_{0}^{R}D_t^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \oint_0^t (t-\tau)^{-1-\alpha} x(\tau) d\tau, \tag{۵} $$

که در آن انتگرال هادامارد مطرح می‌گردد. هدف ما این است که انتگرال هادامارد فوق را به وسیله چندجمله‌ای درونیاب درجه دوم تقریب بزنیم. فرض کنیم $n = 2M$ باشد که در آن M نشان دهنده یک عدد ثابت صحیح مثبت می‌باشد. فرض کنیم

$$ 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{2j} < t_{2j+1} < \cdots < t_{2M} = T, $$

یک افراز از $[0, T]$ بوده و τ نشان دهنده طول‌گام زمانی باشد. برای سادگی در نمادگذاری، فرض می‌کنیم که $T = 1$. در نقطه‌ی $t_{2j} = \frac{2j}{2M} T = \frac{2j}{2M}$، معادله (۱) می‌تواند برای حالت نقاط زوج به صورت زیر نوشته شود:

$$ {}_{0}^{R}D_t^{\alpha} [u(x,\ t_{2j}) - u_0] - \Delta u(x,\ t_{2j}) = f(x,\ t_{2j})\ ,\ j = 1, 2,\ \ldots,\ M, \tag{۶} $$

و در نقطه‌ی $t_{2j+1} = \frac{2j+1}{2M}$ معادله می‌تواند برای حالت نقاط فرد به صورت زیر نوشته شود:

$$ {}_{0}^{R}D_t^{\alpha} [u(x,\ t_{2j+1}) - u_0] - \Delta u(x,\ t_{2j+1}) = f(x,\ t_{2j+1}),\ j = 1, 2, \ldots, M-1. \tag{۷} $$

ابتدا حالت نقاط زوج یا (۶) را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم:

$$ \begin{aligned} {}_{0}^{R}D_t^{\alpha} u(x,\ t_{2j}) &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \oint_0^{t_{2j}} (t_{2j} - \tau)^{-1-\alpha} u(x,\ \tau) d\tau \\ &= \frac{t_{2j}^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \oint_0^1 w^{-1-\alpha} u(x,\ t_{2j} - t_{2j} w) dw, \end{aligned} \tag{۸} $$

که در آن $\tau = t_{2j}(1-w)$. انتگرال مذکور در رابطه فوق نشان دهنده انتگرال هادامارد است. می‌خواهیم انتگرال مذکور را با استفاده از چندجمله‌ای درونیاب درجه دوم تکه‌ای با گره‌های متساوی الفاصله $0, \frac{1}{2j}, \frac{2}{2j}, \ldots, \frac{2j}{2j},\ j = 1, 2, \ldots, M$ تقریب بزنیم. به طور دقیق‌تر، برای تابع به حد کافی هموار $g(w)$، برای $j = 1, \ldots, M$ داریم:

$$ \oint_0^1 w^{-1-\alpha} g(w) dw = \oint_0^1 w^{-1-\alpha} g_2(w) dw + E_{2j}(g), \tag{۹} $$

که در آن $g_2(w)$ چندجمله‌ای درونیاب درجه دوم تکه‌ای $g(w)$ تعریف شده روی گره‌های

$$ 0 < \frac{1}{2j} < \frac{2}{2j} < \cdots < \frac{2j}{2j} = 1,\ j = 1, 2, \ldots, M, $$

بوده و $E_{2j}(g)$ عبارت باقی‌مانده است. اکنون لم زیر را در نظر بگیرید:

لم ۲.۱. فرض کنیم $0 < \alpha < 1$ و $g \in C^3[0,1]$. در این صورت:

$$\oint_0^1 w^{-1-\alpha} g(w)dw = \sum_{k=0}^{2j} \alpha_{k,2j}\, g\left(\frac{k}{2j}\right) + R_{2j}(g), \quad j = 1, 2, \ldots, M. \tag{10}$$

در لم فوق برای $j = 1$ و $j = 2, 3, \ldots, M$، به ترتیب داریم:

$$(-\alpha)(-\alpha+1)(-\alpha+2)(2j)^{-\alpha}\alpha_{l,2j} = \begin{cases} 2^{-\alpha}(\alpha+2)\,, & l = 0, \\ (-\alpha)2^{2-\alpha}, & l = 1, \\ \frac{1}{2}F_2(1)\,, & l = 2, \end{cases}$$

$$(-\alpha)(-\alpha+1)(-\alpha+2)(2j)^{-\alpha}\alpha_{l,2j} = \begin{cases} 2^{-\alpha}(\alpha+2), & l = 0, \\ (-\alpha)2^{2-\alpha}, & l = 1, \\ (-\alpha)(-2^{-\alpha}\alpha) + \frac{1}{2}F_0(2)\,, & l = 2, \\ -F_1(k)\,, & l = 2k-1,\ 2 \le k \le j, \\ \frac{1}{2}\left(F_2(k) + F_0(k+1)\right)\,, & l = 2k,\ 2 \le k \le j-1, \\ \frac{1}{2}F_2(j)\,, & l = 2j. \end{cases}$$

در اینجا:

$$\begin{aligned} F_0(k) &= (2k-1)(2k)\Big((2k)^{-\alpha} - (2(k-1))^{-\alpha}\Big)(-\alpha+1)(-\alpha+2) \\ &\quad - \Big((2k-1) + 2k\Big)\Big((2k)^{-\alpha+1} - (2(k-1))^{-\alpha+1}\Big)(-\alpha)(-\alpha+2) \\ &\quad + \Big((2k)^{-\alpha+2} - (2(k-1))^{-\alpha+2}\Big)(-\alpha)(-\alpha+1), \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} F_1(k) &= (2k-2)(2k)\Big((2k)^{-\alpha} - (2k-2)^{-\alpha}\Big)(-\alpha+1)(-\alpha+2) \\ &\quad - \Big((2k-2) + 2k\Big)\Big((2k)^{-\alpha+1} - (2k-2)^{-\alpha+1}\Big)(-\alpha)(-\alpha+2) \\ &\quad + \Big((2k)^{-\alpha+2} - (2k-2)^{-\alpha+2}\Big)(-\alpha)(-\alpha+1), \end{aligned} \tag{12}$$

و

$$\begin{aligned} F_2(k) &= (2k-2)(2k-1)\Big((2k)^{-\alpha} - (2k-2)^{-\alpha}\Big)(-\alpha+1)(-\alpha+2) \\ &\quad - \Big((2k-2) + (2k-1)\Big)\Big((2k)^{-\alpha+1} - (2k-2)^{-\alpha+1}\Big)(-\alpha)(-\alpha+2) \\ &\quad + \Big((2k)^{-\alpha+2} - (2k-2)^{-\alpha+2}\Big)(-\alpha)(-\alpha+1). \end{aligned} \tag{13}$$

حال گسسته سازی (۷) را بررسی می‌کنیم. در نقطه $t_{2j+1} = \dfrac{2j+1}{2M},\ j = 1, 2, \ldots, M-1$ داریم:

$$\begin{aligned} {}^R_0D_t^{\alpha} u(x,\ t_{2j+1}) &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \oint_0^{t_{2j+1}} (t_{2j+1} - \tau)^{-1-\alpha} u(x,\ \tau)d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{t_1} (t_{2j+1} - \tau)^{-1-\alpha} u(x,\ \tau)d\tau \\ &\quad + \frac{t_{2j+1}^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \oint_0^{\frac{2j}{2j+1}} w^{-1-\alpha} u(x,\ t_{2j+1} - t_{2j+1}w)dw. \end{aligned}$$

در عبارت فوق، جمله دوم را به وسیله یک چندجمله‌ای درونیاب درجه دوم تکه‌ای با گره‌های متساوی الفاصله

$$0, \frac{1}{2j+1}, \frac{2}{2j+1}, \dots, \frac{2j}{2j+1}, \ j = 1, 2, \dots, M-1,$$

تقریب می‌زنیم. به عبارت دقیق‌تر، برای تابع به حد کافی هموار $g(w)$، می‌توان نوشت:

$$\oint_0^{\frac{2j}{2j+1}} w^{-1-\alpha} g(w) dw = \oint_0^{\frac{2j}{2j+1}} w^{-1-\alpha} g_2(w) dw + E_{2j+1}(g) \tag{14}$$

که در آن $g_2(w)$ چندجمله‌ای درونیاب درجه دوم تکه‌ای $g(w)$ تعریف شده روی گره‌های

$$0, \frac{1}{2j+1}, \frac{2}{2j+1}, \dots, \frac{2j}{2j+1}, \ j = 1, 2, \dots, M-1,$$

بوده و $E_{2j+1}(g)$ عبارت باقی‌مانده است.

لم ۲.۲. فرض کنیم $0 < \alpha < 1$ و $g \in C^3[0, 1]$. در این صورت:

$$\oint_0^{\frac{2j}{2j+1}} w^{-1-\alpha} g(w) dw = \sum_{k=0}^{2j} \alpha_{k,2j+1} g\left(\frac{k}{2j}\right) + R_{2j+1}(g), \tag{15}$$

که در آن $\alpha_{k,2j+1} = \alpha_{k,2j}$ ، $k = 0, 1, 2, \dots, 2j$، $j = 1, 2, \dots, M-1$ و $\alpha_{k,2j}$ در لم قبل داده شده است.
اکنون با استفاده از (۸)-(۱۱) تقریب زیر را برای مشتق کسری ریمان-لیوویل ${}_0^R D_t^\alpha u(x,t)$ در نقطه $t = t_{2j}$، $j = 1, 2, \dots, M$ بدست می‌آوریم:

$${}_0^R D_t^\alpha u(x,\ t_{2j}) = \tau^{-\alpha} \sum_{k=0}^{2j} w_{k,2j} u(x,\ t_{2j-k}) + R_2^{2j}, \tag{16}$$

که در آن $R_2^{2j} = O(\tau^{3-\alpha})$ و آن را به صورت $R_2^{2j} \le C\tau^{3-\alpha}(\max_{0\le s\le 1} |u'''(x,s)|)$ نشان می‌دهیم و وزن‌های $w_{k,2j}$، $k = 0, 1, 2, \dots, 2j$، $j = 1, 2, \dots, M$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$\Gamma(3-\alpha) w_{k,2j} = (-\alpha)(-\alpha+1)(-\alpha+2)(2j)^{-\alpha} \alpha_{k,2j}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2j. \tag{17}$$

به طور مشابه در نقاط $t = t_{2j+1}$، $j = 1, 2, \dots, M-1$ داریم:

$$\begin{aligned} {}_0^R D_t^\alpha u(x,\ t_{2j+1}) &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{t_1} (t_{2j+1} - s)^{-\alpha-1} u(x,s) ds \\ &+ \tau^{-\alpha} \sum_{k=0}^{2j} w_{k,2j+1} u(x, t_{2j+1-k}) + R_2^{2j+1}, \end{aligned}$$

که در آن

$$w_{k,2j+1} = w_{k,2j},\ k = 0, 1, 2, \dots, 2j, \qquad R_2^{2j+1} = O(\tau^{3-\alpha}). \tag{18}$$

برای مشتق کسری کاپوتو ${}_0^C D_t^\alpha u(x,t)$ با توجه به این رابطه

$${}_0^R D_t^\alpha u(x,0) = u(x,0) {}_0^R D_t^\alpha (1) = \frac{u(x,0)}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}$$

در $t = t_{2j}$، $j = 1, 2, \dots, M$ داریم:

$${}_0^C D_t^\alpha u(x, t_{2j}) = {}_0^R D_t^\alpha (u(x, t_{2j}) - u(x,0)) = \tau^{-\alpha} \sum_{k=0}^{2j} \bar{w}_{k,2j} u(x, t_{2j-k}) + R_2^{2j},$$

که در آن وزن‌ها به ازای $k = ۰, ۱, ۲, \dots, ۲j - ۱,\ j = ۱, ۲, \dots, M$ برابرند با:

$$\bar{w}_{k,۲j} = w_{k,۲j}, \quad \bar{w}_{۲j,۲j} = w_{۲j,۲j} - \frac{(۲j)^{-\alpha}}{\Gamma(۱-\alpha)}. \tag{۱۹}$$

به طور مشابه در $t = t_{۲j+۱}$، $j = ۱, ۲, \dots, M - ۱$ داریم

$$\begin{aligned} {}_{۰}^{C}D_t^{\alpha} u(x, t_{۲j+۱}) = &\frac{۱}{\Gamma(-\alpha)} \int_{۰}^{t_۱} (t_{۲j+۱} - s)^{-\alpha-۱} u(x,s) ds \\ &+ \tau^{-\alpha} \sum_{k=۰}^{۲j+۱} \bar{w}_{k,۲j+۱} u(x,\ t_{۲j+۱-k}) + R_۲^{۲j+۱}, \end{aligned}$$

که در آن به ازای $k = ۰, ۱, ۲, \dots, ۲j,\ j = ۱, ۲, \dots, M - ۱$ وزن‌ها برابرند با:

$$\bar{w}_{k,۲j+۱} = w_{k,۲j}, \quad \bar{w}_{۲j+۱,۲j+۱} = w_{۲j+۱,۲j+۱} - \frac{(۲j+۱)^{-\alpha}}{\Gamma(۱-\alpha)}. \tag{۲۰}$$

از طرفی جواب دقیق u در (۷)-(۸) به ازای $l = ۲, ۳, \dots, ۲M$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\bar{w}_{۰,l} u(x,\ t_l) - \tau^{\alpha} \Delta u(x,\ t_l) = I_l - \sum_{k=۱}^{l} \bar{w}_{k,l} u(x,\ t_{l-k}) + \tau^{\alpha} f(x, t_l) - \tau^{\alpha} R_۲^{l},$$

یا

$$\begin{aligned} &u(x, t_l) - (\bar{w}_{۰,l})^{-۱} \tau^{\alpha} \Delta u(x, t_l) \\ &= (\bar{w}_{۰,l})^{-۱} I_l + \sum_{k=۱}^{l} d_{k,l} u(x, t_{l-k}) + (\bar{w}_{۰,l})^{-۱} \tau^{\alpha} f(x, t_l) - (\bar{w}_{۰,l})^{-۱} \tau^{\alpha} R_۲^{l}, \end{aligned} \tag{۲۱}$$

که در آن $d_{k,l} = -\frac{\bar{w}_{k,l}}{\bar{w}_{۰,l}}$، $k = ۱, ۲, \dots,\ l$، $l = ۲, ۳, \dots, ۲M$ و I_l به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_l = \begin{cases} ۰, & l = ۲j,\ j = ۱, ۲,\ \dots,\ M, \\ -\frac{\tau^{\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \int_{۰}^{t_۱} (t_{۲j+۱} - s)^{-\alpha-۱} u(x,s) ds, & l = ۲j+۱,\ j = ۱, ۲,\ \dots,\ M-۱, \end{cases}$$

برای راحتی در نمادگذاری، وابستگی جواب دقیق $u(x,t)$ به x را حذف می‌کنیم. فرض کنیم

$$u^l \approx u(x,\ t_l), l = ۰, ۱, ۲, \dots, ۲M$$

نشان دهنده جواب تقریبی $u(x, t_l)$ باشد. با حذف جمله خطا در رابطه (۲۱) روش عددی زیر برای $l = ۲, ۳, \dots, ۲M$ تعریف می‌شود:

$$u^l - (\bar{w}_{۰,l})^{-۱} \tau^{\alpha} \Delta u^l = (\bar{w}_{۰,l})^{-۱} \tilde{I}_l + \sum_{k=۱}^{l} d_{k,l} u^{l-k} + (\bar{w}_{۰,l})^{-۱} \tau^{\alpha} f(x, t_l), \tag{۲۲}$$

به طوری‌که $\tilde{I}_l$ تقریبی از I_l بوده که در ادامه در مورد آن بحث خواهیم کرد. در اینجا فرض می‌کنیم $u^۰ = u_۰$ و $u^۱$ در ادامه با دقت ارائه شده در (۲۳) تقریب زده خواهد شد. برای این منظور تقریب $u(x, t_۱)$ با دقت مطلوب $O(\tau^{۳-\alpha})$ که در آینده مرتبه همگرایی روش عددی (۲۲) خواهد بود، بازه $[۰, t_۱]$ را با گره‌های متساوی الفاصله $۰ = t_۱^{(۰)} < t_۱^{(۱)} < \cdots < t_۱^{(n_۱)} = t_۱$ با طول گام $\tilde{\tau}$ تقسیم‌بندی می‌کنیم به طوری که $\tilde{\tau}^{۲-\alpha} \approx \tau^{۳-\alpha}$ که در آن $n_۱$ یک عدد صحیح مثبت است. سپس روش عددی موجود در [۱] را با مرتبه همگرایی $O(\tilde{\tau}^{۲-\alpha})$ برای به دست آوردن مقدار تقریبی $u^۱ \approx u(x, t_۱)$ به کار می‌بریم به طوری که با فرض $e^۱ = u^۱ - u(x, t_۱)$ داریم:

$$\|e^۱\| = \|u^۱ - u(x, t_۱)\| = O(\tilde{\tau}^{۲-\alpha}) = O(\tau^{۳-\alpha}). \tag{۲۳}$$

که در آن $\|\cdot\|$ نشان دهنده نرم $L^{۲}$ است.
در ادامه لازم است انتگرال I_l در (۲۱) را که می‌خواهیم در (۲۵) مورد استفاده قرار دهیم، با دقت مطلوب $O(\tau^{۳})$ تقریب بزنیم. فرض کنیم $n_{۲}$ یک عدد صحیح مثبت باشد. بازه $[\circ,\ t_{۱}]$ را به وسیله گره‌های متساوی الفاصله

$$\circ = t_{۱}^{(\circ)} < t_{۱}^{(۱)} < \cdots < t_{۱}^{(n_{۲})} = t_{۱}$$

با طول گام $\bar{\tau}$ مش‌بندی می‌کنیم به طوری که $\bar{\tau}^{۲} \approx \tau^{۳-\alpha}$. سپس قاعده انتگرال‌گیری ذوزنقه‌ای مرکب را روی $[\circ, t_{۱}]$ به کار می‌بریم که مرتبه همگرایی $O(\bar{\tau}^{۲})$ را نتیجه می‌دهد. به طور دقیق‌تر داریم:

$$\begin{aligned}\|I_l - \tilde{I}_l\| &= \left\| \frac{\tau^{\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \int_{\circ}^{t_{۱}} (t_{۲j+۱} - s)^{-\alpha-۱} u(x,s)ds \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tau^{\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \int_{\circ}^{t_{۱}} (t_{۲j+۱} - s)^{-\alpha-۱} \tilde{u}(x,s)ds \right\| \\ &= \tau^{\alpha}\, O(\bar{\tau}^{۲}) = \ O(\tau^{۳}),\end{aligned} \tag{۲۴}$$

که در آن $\tilde{u}(x,s)$ چندجمله‌ای درونیابی خطی تکه‌ای $u(x,s)$ روی $[\circ, t_{۱}]$ بوده که نتیجه می‌دهد $I_l - \tilde{I}_l = O(\tau^{۳})$. این تقریب را در (۲۵) لازم داریم. فرض کنیم $e^l = u^l - u(x,\ t_l),\ l = \circ, ۱, \ldots, ۲M$. با کم کردن (۲۱) از (۲۲) و استفاده از (۲۴) ، داریم:

$$e^l - (\bar{w}_{\circ,l})^{-۱}\tau^{\alpha}\Delta e^l = \sum_{k=۱}^{l} d_{k,l}e^{l-k} + (\bar{w}_{\circ,l})^{-۱}\tau^{\alpha}R_{۲}^{l},\ l = ۲, ۳,\ \ldots,\ ۲M, \tag{۲۵}$$

که در آن $e^{\circ} = \circ$ و $e^{۱}$ در (۲۳) تقریب زده شده است و

$$d_{k,l} = -\frac{\bar{w}_{k,l}}{\bar{w}_{\circ,l}},\ k = ۱, ۲, \ldots,\ l, l = ۲, ۳, \ldots, ۲M,$$

به طور مشابه در (۱۹) و (۲۰) تعریف شده‌اند. قابل ذکر است که با استفاده از (۱۹) و (۲۰) داریم

$$d_{۱,l} = -\frac{\bar{w}_{۱,l}}{\bar{w}_{\circ,l}},\ l = ۲, ۳, \ldots, ۲M$$

به طوری‌که روی $l = ۲, ۳, \ldots, ۲M$ یک ثابت مستقل است. علاوه بر این تعریف می‌کنیم:

$$d_{۱,۱} := d_{۱,l},\ l = ۲, ۳,\ \ldots,\ ۲M.$$

همچنین خطای $\bar{e}^l$ را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\bar{e}^l = e^l - \eta e^{l-۱},\ \eta = \frac{d_{۱,l}}{۲},\ l = ۱, ۲, ۳,\ \ldots,\ ۲M, \tag{۲۶}$$

که در آن η یک ثابت مستقل روی $l = ۱, ۲, \dots, ۲M$ است. به ازای $l = ۱, ۲, \dots, ۲M$ داریم:

$$\begin{aligned}
&\bar{e}^l - (\bar{w}_{\circ,l})^{-۱}\tau^\alpha \Delta e^l = e^l - \eta e^{l-۱} - (\bar{w}_{\circ,l})^{-۱}\tau^\alpha \Delta e^l \\
&= \sum_{k=۱}^{l-۱} d_{k,l} e^{l-k} + (\bar{w}_{\circ,l})^{-۱}\tau^\alpha R_۲^l - \eta e^{l-۱} \\
&= \eta(e^{l-۱} - \eta e^{l-۲}) + (\eta^۲ + d_{۲,l})e^{l-۲} + d_{۳,l}e^{l-۳} + \dots + d_{l-۱,l}e^۱ + d_{l,l}e_\circ \\
&+ (\bar{w}_{\circ,l})^{-۱}\tau^\alpha R_۲^l = \eta(e^{l-۱} - \eta e^{l-۲}) + (\eta^۲ + d_{۲,l})(e^{l-۲} - \eta e^{l-۳}) \\
&+ (\eta^۳ + d_{۲,l}\eta + d_{۳,l})e^{l-۳} + d_{۴,l}e^{l-۴} + \dots + d_{l,l-۱}e^۱ + d_{l,l}e^\circ + (\bar{w}_{\circ,l})^{-۱}\tau^\alpha R_۲^l \\
&= \dots \\
&= \eta(e^{l-۱} - \eta e^{l-۲}) + (\eta^۲ + d_{۲,l})(e^{l-۲} - \eta e^{l-۳}) \\
&+ (\eta^۳ + d_{۲,l}\eta + d_{۳,l})(e^{l-۳} - \eta e^{l-۴}) \\
&+ \dots \\
&+ (\eta^{l-۲} + d_{۲,l}\eta^{l-۴} + \dots + d_{l-۳,l}\eta + d_{l-۲,l})(e^۲ - \eta e^۱) \\
&+ (\eta^{l-۱} + d_{۲,l}\eta^{l-۳} + \dots + d_{l-۲,l}\eta + d_{l-۱,l})(e^۱ - \eta e^\circ) \\
&+ (\eta^l + d_{۲,l}\eta^{l-۲} + \dots + d_{l-۱,l}\eta + d_{l,l})e^\circ + (\bar{w}_{\circ,l})^{-۱}\tau^\alpha R_۲^l.
\end{aligned}$$

با قرار دادن:

$$\bar{d}_{i,l} := \eta^i + \sum_{j=۲}^{i} \eta^{i-j} d_{j,l},\ i = ۲, ۳,\ \dots,\ l,\ l = ۲, ۳,\ \dots,\ ۲M, \tag{۲۷}$$

به ازای $\bar{d}_{۱,l} = \eta$ داریم:

$$\bar{e}^l - (\bar{w}_{\circ,l})^{-۱}\tau^\alpha \triangle e^l = \sum_{k=۱}^{l-۱} \bar{d}_{k,l}\bar{e}^{l-k} + (\bar{w}_{\circ,l})^{-۱}\tau^\alpha R_۲^l,\ l = ۲, ۳,\ \dots,\ ۲M. \tag{۲۸}$$

لم ۳.۲. برای $\circ < \alpha < ۱$، ضرایب موجود در (۲۸) به ازای $l = ۲, ۳, \dots, ۲M$ در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\circ < \eta = \frac{d_{۱,l}}{۲} < \frac{۲}{۳}, \tag{۲۹}$$

$$\bar{d}_{k,l} > \circ,\ k = ۱, ۲,\ \dots,\ l, \tag{۳۰}$$

$$\eta + \sum_{k=۲}^{l} \bar{d}_{k,l} \le ۱, \tag{۳۱}$$

$$(\bar{d}_{l,l})^{-۱} \le c_\circ \tau^{-\alpha}, \tag{۳۲}$$

که در آن $c_\circ$ ثابت است.

حال در ادامه، توسط قضیه ۴.۲ خطای روش پیشنهادی را برآورد می‌کنیم. برای اثبات تخمین‌های خطا در قضیه ۴.۲، به فرض‌های بیشتری برای تقریب اولیه $u^۱$ احتیاج داریم. فرض کنیم $\bar{e}^۱ = e^۱ - \eta e^\circ = e^۱$ همانند (۲۶) تعریف شده باشد که در آن $e^۱ = u^۱ - u(x, t_۱)$. با استفاده از (۳۰)-(۳۲) می‌بینیم که $۱ \le (\bar{d}_{l,l})^{-۱} \le c_\circ \tau^{-\alpha}$. لذا، با انتخاب $l = ۲, ۳, \dots, ۲M$ به صورت ثابت و با انتخاب $\tilde{\tau}$ به اندازه کافی کوچک همانند (۲۳)، داریم:

$$R_۲^۱ = O(\tau^{۳-\alpha}), \tag{۳۳}$$

و همچنین:

$$\|\bar{e}^۱\|_۱^۲ \le c_۱ \bar{d}_{l,l} \|(\bar{d}_{l,l})^{-۱}(\bar{w}_{\circ,l})^{-۱}\tau^\alpha R_۲^۱\|^۲, \tag{۳۴}$$

که در آن $c_1 > 0$ یک ثابت است. با استفاده از (۳۲) و با یادآوری اینکه $\bar{d}_{l,l} < 1$ به وسیله (۳۰) و (۳۱) داریم:

$$\|\bar{e}^1\|_1^2 \leq c_1 \bar{d}_{l,l} \|(\bar{d}_{l,l})^{-1} (\bar{w}_{0,l})^{-1} \tau^{\alpha} R_2^1\|^2 = (O(\tau^{3-\alpha}))^2. \tag{۳۵}$$

حال قضیه تخمین خطای زیر را می‌توانیم بیان کنیم.

قضیه ۴.۲. فرض کنیم $u(x, t_l)$ و u^l، به ترتیب جواب‌های دقیق و تقریبی (۲۲)-(۲۱) باشند و $u(x,t) \in C^3[0,T]$. علاوه بر این فرض کنیم که $u^0 = u_0$ و u^1 در (۳۴) صدق کند. در این صورت ثابت $C = C(\alpha,\ f,\ T)$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\|u^l - u(t_l)\|^2 + (\bar{w}_{0,l})^{-1} \tau^{\alpha} \|\nabla(u^l - u(t_l))\|^2 \leq C(\tau^{3-\alpha})^2, \quad l = 2, 3, \ldots, 2M.$$

برای اثبات [۳] را ملاحظه نمایید.

۳ گسسته‌سازی کامل

در این بخش، به گسسته‌سازی کامل مسئله (۱)-(۳) می‌پردازیم. در اینجا فقط شرط مرزی دیریکله همگن $q = 0$ در (۳) را برای برآورد خطا در نظر می‌گیریم، در حالی که برآوردهای خطای ارائه شده در قضیه برای شرط مرزی دیریکله غیرهمگن نیز برقرار است. فرض کنیم $S_h \subseteq H_0^1(\Omega)$ نشان دهنده فضای عناصر متناهی استاندارد بوده و h نشان دهنده طول گام فضا باشد. همچنین $R_h : H_0^1(\Omega) \to S_h$ نشان دهنده تصویر ریتز باشد که برای هر $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\nabla R_h \varphi,\ \nabla \chi) = (\nabla \varphi,\ \nabla \chi)\ ,\ \forall \chi \in S_h.$$

می‌دانیم که [۵]:

$$\|R_h \varphi - \varphi\| + h \|\nabla(R_h \varphi - \varphi)\| \leq C h^2 \|\varphi\|_{H^2(\Omega)},\ \forall \varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \tag{۳۶}$$

حال به گسسته سازی کامل (۲۱) می‌پردازیم. فرض کنیم $U_h^l \in S_h,\ l = 0, 1, \ldots, 2M$، نشان دهنده تقریب $u(x, t_l)$ باشد. $U_h^0 = R_h u_0$ را انتخاب کرده و فرض می‌کنیم که $U_h^1 \in S_h$ یک تقریب مناسب از $u(t_1)$ باشد که می‌تواند با استفاده از برخی روش‌های عددی خاص به دست آید و در شرط (۳۷) زیر صدق کند. برای $l = 2, 3, \ldots, 2M$ روش عناصر متناهی زیر را معرفی می‌کنیم:
$U_h^l \in S_h$ طوری پیدا کنید که:

$$\begin{aligned}(U_h^l, \chi) + (\bar{w}_{0,l})^{-1} \tau^{\alpha} (\nabla U_h^l, \nabla \chi) &= ((\bar{w}_{0,l})^{-1} \tilde{I}_l, \chi) \\ &+ \sum_{k=1}^{l} d_{k,l} (U_h^{l-k},\ \chi) + (\bar{w}_{0,l})^{-1} \tau^{\alpha} (f(t_l),\ \chi)\ ,\ \forall \chi \in S_h.\end{aligned} \tag{۳۷}$$

اکنون به کمک قضیه زیر به تعیین کران خطای ارائه شده فوق می‌پردازیم:

قضیه ۱.۳. فرض کنیم $u(x,\ t_l)$ و U_h^l، $l = 0, 1, \ldots, 2M$ به ترتیب جواب‌های دقیق و تقریبی (۲۱) و (۳۷) باشند. فرض کنیم $u \in C^3([0,T]; H^2(\Omega))$ و شرط اولیه برابر $U_h^0 = R_h u_0$ باشد. فرض کنیم که ثابت c_2 وجود دارد به طوری که

$$\begin{aligned}\|U_h^1 - R_h u(t_1)\|^2 &+ (\bar{w}_{0,l})^{-1} \tau^{\alpha} \|\nabla(U_h^1 - R_h u(t_1))\|^2 \\ &\leq c_2 (\bar{d}_{l,l} \|(\bar{d}_{l,l})^{-1} (\bar{w}_{0,l})^{-1} \tau^{\alpha} \delta_2^1\|^2),\end{aligned} \tag{۳۸}$$

که در آن $\delta_2^1 = (R_h - I)({}_0^C D_t^{\alpha} u(t_1) - R_2^1) + R_2^1$ و R_2^1 در (۳۴) تعریف شده‌اند. در این صورت یک ثابت $C = C(\alpha, f, T)$ وجود دارد به طوری که به ازای $l = 2, 3, \ldots, 2M$ داریم:

$$\|U_h^l - R_h u(t_l)\|^2 + (\bar{w}_{0,l})^{-1} \tau^{\alpha} \|\nabla(U_h^l - R_h u(t_l))\|^2 \leq C(h^2 + \tau^{3-\alpha})^2.$$

علاوه بر این داریم:

$$\|U_h^l - u(t_l)\| \leq C(h^2 + \tau^{3-\alpha}),\ l = 2, 3,\ \ldots,\ 2M.$$

۴ نتایج عددی

مثال ۱.۴. معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$ {}_{\circ}^{R}D_t^{\alpha}u(x,t) - \frac{\partial^{۲}u(x,t)}{\partial x^{۲}} = f(x,t), \quad t \in [\circ, T], \circ < x < ۱, \tag{۳۹} $$

$$ u(x,\circ) = \circ, \tag{۴۰} $$

$$ u(\circ,t) = u(۱,t) = \circ, \tag{۴۱} $$

که در آن برابر $f(x,t) = \frac{\Gamma(m+۱)}{\Gamma(m+۱-\alpha)}t^{m-\alpha}\sin(۲\pi x) + ۴\pi^{۲}t^{m}\sin(۲\pi x)$ است. جواب دقیق برابر $u(x,t) = t^{m}\sin(۲\pi x)$ می‌باشد. برای $m = ۳/۵$ نتایج عددی را بر اساس روش ارائه شده به دست آورده و در جدول زیر نمایش داده‌ایم. در این صورت جواب دقیق به صورت $u(x,.) \in C^{۳}[\circ, T]$ خواهد بود.

هدف اصلی ما بررسی مرتبه همگرایی روش عددی، با توجه به طول گام زمانی τ برای مرتبه‌های مختلف α است. برای انتخاب‌های مختلف $\alpha \in (\circ, ۱)$، خطاها را در نرم $L^{۲}$ در $T = ۱$ محاسبه می‌کنیم. از فضای عناصر متناهی خطی S_h با اندازه طول گام $h = ۱/۲^{۶}$ که به اندازه کافی کوچک است، به طوری‌که خطا را تحت کنترل زمان گسسته قرار می‌دهد، استفاده می‌کنیم.

حال طول گام زمان را به صورت $\tau = ۱/۲^{l},\ l = ۳, ۴, ۵, ۶, ۷$ انتخاب می‌کنیم، و بازه $[\circ, T]$ را با $N = ۱/\tau$ و با گره‌های $\circ = t_{\circ} < t_{۱} < \cdots < t_N = ۱$ تقسیم‌بندی می‌کنیم. سپس خطای $e(t_N) = \|u(x,t_N) - U_h^N\|$ را محاسبه خواهیم کرد. با استفاده از قضیه ۲.۴ داریم

$$ \|e(t_N)\| = \|u(x,t_N) - U_h^N\| \leq C\tau^{۳-\alpha}. \tag{۴۲} $$

برای مشاهده مرتبه همگرایی، باید خطای $\|e(t_N)\|$ را در $t_N = ۱$ با توجه به مقادیر مختلف τ محاسبه کنیم و خطای $\|e_{\tau_l}(t_N)\|$ را در $t_N = ۱$ با توجه به مقادیر مختلف τ_l محاسبه کنیم.

فرض کنید برای یک ثابت $l = ۳, ۴, ۵, ۶, ۷$ داشته باشیم، $\tau_l = \tau = ۱/۲^{l}$ آنگاه:

$$ \frac{\|e_{\tau_l}(t_N)\|}{\|e_{\tau_{l+۱}}(t_N)\|} \approx \frac{C\tau_l^{۳-\alpha}}{C\tau_{l+۱}^{۳-\alpha}} = ۲^{۳-\alpha}, $$

که با دلالت بر آن مرتبه همگرایی به صورت $۳-\alpha \approx \log_{۲}\left(\frac{\|e_{\tau_l}(t_N)\|}{\|e_{\tau_{l+۱}}(t_N)\|}\right)$ محاسبه می‌شود. در جدول ۱ مرتبه همگرایی را برای مقادیر مختلف α محاسبه نمودیم و دریافتیم که این نتایج عددی با نتایج تئوری قضیه ۳.۱ مطابقت دارد. با مقایسه نتایج عددی جدول ۱ و نتایج ارائه شده در [۲] درمی‌یابیم که جواب‌های به دست آمده توسط روش ارائه شده برای $\alpha \in (\circ, ۱)$ در این مقاله دقیق‌تر هستند.

جدول ۱: نرم $L^{۲}$خطا و نرخ همگرایی زمانی با $h = ۱/۲^{۶}$ در $T = ۱$.

α	τ	خطای روش پیشنهادی	نرخ همگرایی روش پیشنهادی	خطا در [۲]	نرخ همگرایی در [۲]
۰٫۳	$۱/۲^{۳}$	۳٫۴۰۹۲e − ۵		۵٫۳۶۹۶e − ۵	
	$۱/۲^{۴}$	۵٫۱۱۵۲e − ۶	۲٫۷۴	۸٫۹۵۵۴e − ۶	۲٫۵۸
	$۱/۲^{۵}$	۷٫۴۷۶۱e − ۷	۲٫۷۷	۱٫۴۵۶۴e − ۶	۲٫۶۲
	$۱/۲^{۶}$	۱٫۰۸۷۱e − ۷	۲٫۷۸	۲٫۳۳۱۹e − ۷	۲٫۶۴
	$۱/۲^{۷}$	۱٫۵۸۰۸e − ۸	۲٫۷۸	۳٫۶۸۶۵e − ۸	۲٫۶۶
۰٫۵	$۱/۲^{۳}$	۱٫۱۹۴۶e − ۴		۱٫۵۰۰۹e − ۴	
	$۱/۲^{۴}$	۲٫۱۳۱۹e − ۵	۲٫۴۹	۲٫۷۹۵۹e − ۵	۲٫۴۲
	$۱/۲^{۵}$	۳٫۷۴۵۰e − ۶	۲٫۵۱	۵٫۰۹۸۸e − ۶	۲٫۴۶
	$۱/۲^{۶}$	۶٫۵۵۲۴e − ۷	۲٫۵۱	۹٫۱۸۳۹e − ۷	۲٫۴۷
	$۱/۲^{۷}$	۱٫۱۴۲۵e − ۷	۲٫۵۲	۱٫۶۳۶۵e − ۷	۲٫۴۹
۰٫۹	$۱/۲^{۳}$	۷٫۷۱۱۸e − ۴		۷٫۸۸۳۷e − ۴	
	$۱/۲^{۴}$	۱٫۸۴۴۶e − ۴	۲٫۰۶	۱٫۸۹۱۸e − ۴	۲٫۰۶
	$۱/۲^{۵}$	۴٫۳۵۱۴e − ۵	۲٫۰۸	۴٫۴۷۲۲e − ۵	۲٫۰۸
	$۱/۲^{۶}$	۱٫۰۱۸۴e − ۵	۲٫۱۰	۱٫۰۴۸۰e − ۵	۲٫۱۰
	$۱/۲^{۷}$	۲٫۳۵۸۷e − ۶	۲٫۱۱	۲٫۴۲۹۲e − ۶	۲٫۱۱

مراجع

[1] Diethehm, K., *An algorithm for the numerical solution of differentioal equations of fractional order*, Transactions on Numerical Analysis, 5, (1997), 1-6.

[2] Gao, G.-H., Sun, Z.-Z., Zhang, H.-W.,*A new fractional numerical differentiation formula to approximate the Caputo fractional derivative and its applications.* J. Comput. Phys. 295, (2014), 33-50.

[3] Li, Z., Liang, Z., Yan, Y., *High-order numerical methods for solving time fractional partial differential equations.* Journal of Scientific Computing, 71, (2017), 785-803.

[4] Li, C., Wu, R., Ding, H.:*High-order approximation to Caputo derivatives and Caputo-type advection diffusion equations.* Commun. Appl. and Ind. Math. 6, (2014), e-536 .

[5] Li, Z., Yan, Y., Ford, N. J.: *Error estimates of a high order numerical method for solving linear fractional differential equation.* Applied Numerical Mathematics,114, (2016), 201-220.

[6] Yan, Y., Pal, K., Ford, N. J.: *Higher order numerical methods for solving fractional differential equations.* BIT Numer. Math. 54, (2014), 555-584.

پست الکترونیکی: zahra.Meshkatfar@email.kntu.ac.ir
پست الکترونیکی: ghoreishif@kntu.ac.ir