هفتمین کنفرانس بین‌المللی
ترکیبیات، رمزنگاری، علوم کامپیوتر و محاسبات
۲۵ و ۲۶ آبان ۱۴۰۱

مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح جدید برای مسأله رنگ‌آمیزی پویای گراف

طاهر مددی امام‌زاده [۱]
دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران

حسین سلطانی صوفیانی
دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران

چکیده

رنگ‌آمیزی پویای گراف نوعی رنگ‌آمیزی سره است که در آن هر راس که درجه آن حداقل ۲ باشد، همه همسایه‌هایش همرنگ نباشند. این مقاله به مطالعه رنگ‌آمیزی پویای گراف‌ها از دیدگاه برنامه‌ریزی عدد صحیح می‌پردازد و چند نوع صورت برنامه‌ریزی عدد صحیح برای آن ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: رنگ‌آمیزی گراف، رنگ‌آمیزی پویای گراف، برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح

[**2010**]**:** 05C15, 90C10

۱ مقدمه

رنگ‌آمیزی پویای گراف‌ها تعمیمی از رنگ‌آمیزی رأسی می‌باشد. این رنگ‌آمیزی اولین بار در سال ۲۰۰۱ توسط مونتگومری معرفی شد [۸]. ایده‌ای اصلی رنگ‌آمیزی پویا به این صورت است که ضمن مجاز بودن رنگ‌آمیزی در گراف، باید روی همسایه‌های هر رأس با درجه حداقل ۲، حداقل دو رنگ متفاوت ظاهر شود.

تعریف ۱.۱. یک k- رنگ‌آمیزی رأسی از G عبارت است از تخصیص k رنگ ۱، ۲، ... و k به رأس‌های G. اگر هیچ دو رأس مجاور متمایزی دارای رنگ یکسان نباشند، رنگ‌آمیزی را مجاز گویند. بنابراین یک k- رنگ‌آمیزی رأسی مجاز یا سره از گراف بدون طوقه G، عبارت است از افرازی مانند $(V_۱, V_۲, \dots, V_k)$ از V به k مجموعه مستقل که می‌توانند تهی نیز باشند. اگر G دارای یک k- رنگ‌آمیزی رأسی مجاز باشد، آنگاه G، k- رنگ‌پذیر رأسی نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱. یک k- رنگ‌آمیزی رأسی سره گراف G را رنگ‌آمیزی پویا گویند، هرگاه در همسایگی هر رأس $v \in V(G)$ با درجه حداقل ۲، حداقل ۲ رنگ متفاوت ظاهر شوند.

تعریف ۳.۱. کوچکترین عدد صحیح k به طوری‌که G دارای k- رنگ‌آمیزی پویا باشد را عدد رنگی پویای G می‌گویند و آن را با نماد $\chi_d(G)$ نمایش می‌دهند. همچنین گویند برای رأس دلخواه v از G خاصیت پویایی برقرار است اگر

$$|c(N(v))| \geq \min\{۲, d(v)\}.$$

در حقیقت یک رنگ‌آمیزی رأسی گراف G، یک رنگ‌آمیزی پویاست هرگاه خاصیت پویایی برای هر رأس v از G برقرار باشد. شرط سره بودن رنگ‌آمیزی پویا را شرط مجاورت نیز می‌نامند.

در مقالات چندین مدل مختلف برای برنامه‌ریزی عدد صحیح مساله رنگ‌آمیزی گراف‌ها ارائه شده است [۷، ۵، ۶] اما برای مساله رنگ‌آمیزی پویای گراف تا کنون صورت برنامه‌ریزی عدد صحیح ارائه نشده است. در این مقاله مدل‌های ارائه شده در [۵] را به رنگ‌آمیزی پویای گراف‌ها تعمیم می‌دهیم.

---
[۱] سخنران

۲ مدل برنامه‌ریزی صحیح برای مسأله رنگ‌آمیزی رأسی

در این فصل، مسأله رنگ‌آمیزی پویای گراف به شکل مساله برنامه‌ریزی عدد صحیح صورت‌بندی می‌شود که شامل چهار مدل متفاوت مبتنی بر انتساب، نمایندگان، ترتیب جزئی و پوشش مجموعه می‌باشد که به ترتیب در بخش‌های بعدی به شرح آن‌ها می‌پردازیم.

۱.۲ مدل برنامه‌ریزی صحیح مبتنی بر انتساب برای رنگ‌آمیزی پویای گراف

این مدل بر اساس مدل کلاسیک برای رنگ‌آمیزی معمولی گراف‌ها به رنگ‌آمیزی پویای گراف‌ها تعمیم داده شده است. فرض کنید H کران بالایی برای عدد رنگی پویای گراف داده شده G باشد. اگر هیچ کرانی نداشته باشیم می‌توان از کران بالای بدیهی $H = n$ استفاده کرد که n نشان دهنده تعداد رئوس گراف است. رنگ‌های $H, \ldots, i = ۱$ را در نظر می‌گیریم. متغیرهای باینری x_{vi} مشخص کننده تخصیص و یا عدم تخصیص رنگ i به راس $v \in V$ هستند. یعنی اگر رنگ i به رأس v تخصیص داده شود، $x_{vi} = ۱$ در غیر اینصورت $x_{vi} = ۰$. برای مدل‌بندی تابع هدف متغیرهای دودویی w_i نیاز است که اگر رنگ i برای رنگ‌آمیزی حداقل یک راس مورد استفاده قرار گیرد، برابر ۱ و در غیر اینصورت برابر صفر است. مدل به صورت زیر بیان می‌شود:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum\limits_{۱\leq i\leq H} w_i & \\
\text{s.t.} & \sum\limits_{i=۱}^{H} x_{vi} = ۱ & \forall\, v \in V \\
& x_{ui} + x_{vi} \leq w_i & \forall (u,v) \in E, \quad i = ۱, \ldots, H \\
& \sum\limits_{u\in N(v)} x_{ui} \leq \deg(v) - ۱ & \forall v \in \{x \in V : \deg(x) \geq ۲\}, \quad i = ۱, \ldots, H \\
& x_{vi} \in \{۰, ۱\} & \forall v \in V, \quad i = ۱, \ldots, H \\
& w_i \in \{۰, ۱\} & i = ۱, \ldots, H.
\end{array}
\qquad (۱)
$$

قضیه ۱.۲. برای گراف داده شده G مقدار بهینه مساله برنامه‌ریزی عدد صحیح (۱) برابر عدد رنگی پویای گراف است.

اثبات. با توجه به نحوه تعریف متغیرهای w_i تابع هدف $\sum\limits_{۱\leq i\leq H} w_i$ نشان دهنده تعداد رئوس مورد استفاده در رنگ‌آمیزی گراف است که هدف مینیمم کردن آن است. قید $\sum\limits_{۰\leq i\leq H} x_{vi} = ۱$ برای هر $v \in V$ تضمین می‌کند که رأس v دقیقا یک رنگ دریافت می‌کند. همچنین قید $x_{ui} + x_{vi} \leq w_i$ تضمین می‌کند که رئوس مجاور رنگ‌های متفاوتی داشته باشند و همچنین اگر $w_i = ۰$ نتوان از رنگ i در رنگ‌آمیزی هیچ یک از رئوس استفاده کرد. قید $\sum\limits_{u\in N(v)} x_{ui} \leq \deg(v) - ۱$ بیان می‌کند که رئوس موجود در همسایگی رأس $v \in V$ همگی نمی‌توانند همرنگ به رنگ i باشند. چون این قید برای همه رنگ‌ها درست است ایجاب می‌کند که در همسایگی راس v حداقل دو رنگ ظاهر شده است. □

۲.۲ مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مبتنی بر ترتیب جزئی برای رنگ‌آمیزی گراف

تعریف ۲.۲. فرض می‌کنیم S یک مجموعه ناتهی باشد. گوییم رابطه‌ی R روی S یک رابطه ترتیب جزئی[2] است هرگاه:

الف) (بازتابی) به ازای هر $x \in S$، $(x,x) \in R$؛

ب) (پادتقارنی) اگر $(x,y) \in R$ و $(y,x) \in R$، آنگاه $x = y$؛

ج) (تعدی) اگر $(x,y) \in R$ و $(y,z) \in R$، آنگاه $(x,z) \in R$.

در این حالت گوییم S یک مجموعه مرتب جزئی است. اگر R در اصل موضوع زیر نیز صدق کند، آن را یک رابطه ترتیب خطی بر S و S را یک مجموعه کلا مرتب[3] می‌نامیم.

د) به ازای هر دو عضو دلخواه $x, y \in S$ داشته باشیم $(x,y) \in R$ یا $(y,x) \in R$.

معمولا در صورتی که ابهامی در ترتیب جزئی R ایجاد نشود، $(x,y) \in R$ را با نماد $x \preceq y$ نشان می‌دهند. حال مدلی برای مساله رنگ‌آمیزی پویای گراف براساس ترتیب جزئی برای کل مجموعه رئوس و رنگ‌ها ارائه می‌دهیم. فرض بر این است که رنگ‌های $\{۱, \ldots, H\}$ به صورت خطی

[2] partially ordered set
[3] totally ordered set

مرتب هستند. برای مرتب کردن رئوس نسبت به رنگ‌ها متغیرهای باینری $y_{i,v}$ و $z_{v,i}$ را برای هر $v \in V$ و $i = \{۱, \dots, H\}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$y_{i,v} = \begin{cases} ۱, & v \succ i \\ ۰, & \text{در غیراین صورت} \end{cases}$$

$$z_{v,i} = \begin{cases} ۱, & v \prec i \\ ۰, & \text{در غیراین صورت} \end{cases}$$

زمانی رنگ i به رأس v اختصاص داده می‌شود که $y_{i,v} = z_{v,i} = ۰$. در نتیجه رابطه متغیر تخصیص (در مدل انتساب) برای هر $v \in V$ و $i = ۱, \dots, H$ با متغیرهای این مدل به صورت زیر بیان می‌شود:

$$x_{vi} = ۱ - (y_{i,v} + z_{v,i}).$$

یک رأس دلخواه $q \in V$ را ثابت در نظر گرفته و صورت برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\min \quad ۱ + \sum_{۱ \le i \le H} y_{i,q}$$

$$\text{s.t.}$$

$$z_{v,۱} = ۰ \qquad \forall v \in V \tag{۲}$$

$$y_{H,v} = ۰ \qquad \forall\, v \in V \tag{۳}$$

$$y_{i,v} - y_{i+۱,v} \ge ۰ \qquad \forall\, v \in V, \quad i = ۱, \dots, H - ۱ \tag{۴}$$

$$y_{i,v} + z_{v,i+۱} = ۱ \qquad \forall v \in V, \ \ i = ۱, \dots, H \tag{۵}$$

$$y_{i,u} + z_{u,i} + y_{i,v} + z_{v,i} \ge ۱ \qquad \forall (u,v) \in E, \ \ i = ۱, \dots, H \tag{۶}$$

$$۱ \le \sum_{u \in N(v)} (y_{i,u} + z_{u,i}) \qquad \forall v \in \{x \in V : \deg(x) \ge ۲\}, \ \ , i = ۱, \dots, H \tag{۷}$$

$$y_{i,q} - y_{i,v} \ge ۰ \qquad \forall\, v \in V, \quad i = ۱, \dots, H - ۱. \tag{۸}$$

قضیه ۳.۲. صورت برنامه‌ریزی عدد صحیح فوق عدد رنگی پویای گراف را تعیین می‌کند.

اثبات. تابع هدف تعداد رنگ‌های تعیین شده را حداقل می‌کند، چون تعداد رنگ‌های کوچکتر از q را با هم جمع می‌کند و عدد ۱ هم به دلیل رنگ تخصیص داده شده به رأس q به آن اضافه شده است.

قیدهای (۲) و (۳) بیان می‌کنند که همه رئوس گراف در ترتیب باید بین رنگ‌های ۱ تا H قرار گیرند. طبق خاصیت تعدی در ترتیب جزئی اگر راسی بزرگتر از $i + ۱$ باشد، از i نیز بزرگتر است که این مورد توسط قید (۴) برآورده می‌شود. قید (۵) بیان می‌کند که هر رأس v یا بزرگتر از i است و یا کوچکتر از $i + ۱$ و نه هر دو. حال ادعا می‌کنیم که قیدهای (۴) و (۵) ایجاب می‌کنند که به هر راس دقیقا یک رنگ تخصیص داده شود (یعنی هیچ دو رنگ متمایز i و j وجود ندارد که $y_{i,v} = z_{v,i} = ۰$ و $y_{j,v} = z_{v,j} = ۰$). فرض کنیم چنین نباشد، یعنی رنگ‌های i و j که $i \neq j$ به رأس v اختصاص داده شده باشند. فرض کنید $y_{i,v} = z_{v,i} = ۰$. در حالتی که $i < j$ چون $z_{v,i} = ۰$ با توجه به (۵) داریم $y_{i-۱,v} = ۱$. برای $j \le i - ۱$ با استفاده از (۴) داریم $y_{j,v} = ۱$ که با $y_{j,v} = ۰$ به تناقض می‌رسیم. در حالتی که $j > i$، از $y_{i,v} = ۰$ با توجه به قید (۴) برای هر $k \ge i$ داریم $y_{k,v} = ۰$. بنابراین با استفاده از قید (۵) نتیجه می‌شود $z_{v,k+۱} = ۱$. در نتیجه برای هر $j \ge k + ۱$ داریم $z_{v,j} = ۱$ که با $z_{v,j} = ۰$ در تناقض است. پس ادعا ثابت می‌شود. قید (۶) از اینکه دو رأس مجاور u و v رنگ یکسان i را بگیرند، جلوگیری می‌کند. قید (۷) برقراری خاصیت پویایی را برای هر رأس حداقل درجه ۲ تضمین می‌کند. زیرا قید $\sum_{u \in N(v)} x_{ui} \le \deg(v) - ۱$ در مدل انتساب با توجه به تساوی $x_{ui} = ۱ - (y_{i,u} + z_{u,i})$ تبدیل به قید (۷) می‌شود. محدودیت (۸) هم بیان می‌کند که به رأس q بزرگترین رنگ تخصیص داده شده است. □

۳.۲ مدل نمایندگان برای رنگ‌آمیزی پویای گراف

هر کلاس رنگی یک مجموعه مستقل تشکیل می‌دهد که یک راس آن را می‌توان به عنوان نماینده آن کلاس رنگی در نظر گرفت. در این بخش یک مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح برای مساله رنگ‌آمیزی پویای گراف با ایده نمایندگی برای کلاس‌های رنگی ارائه می‌دهیم. برای این منظور متغیرهای

باینری x_{uv} را به ازای هر دو راس غیرمجاور u و v به اینصورت در نظر می‌گیریم که ۱ $= x_{uv}$ هر گاه u نماینده راس v باشد و ۰ $= x_{uv}$ در غیر اینصورت. همچنین متغیرهای باینری x_{uu} را در نظر بگیرید که مشخص کننده این باشند که آیا راس u نماینده خودش هست یا نه. با فرض اینکه $\bar{N}(v)$ نشان دهنده مجموعه رئوسی از گراف باشد که به راس v وصل نیستند، مدل جدید به صورت زیر است:

$$\begin{array}{lll}
\min & \sum_{u\in V} x_{uu} & \\
& \sum_{u\in \bar{N}(v)\cup v} x_{uv} \geq ۱ & \forall\, v\in V\\
& x_{uv}+x_{uw}\leq x_{uu} & \forall\, u\in V,\ \ \forall\, e=(v,w)\in G[\bar{N}(u)]\\
& \sum_{u\in N(v)} x_{wu}\leq \deg(v)-۱ & \forall v\in V: G[N(v)]=\emptyset, \deg(v)\geq ۲, \forall w\in V: N(v)\cap N(w)=\emptyset \text{ or } w\in N(v)\\
& x_{uv}\in\{۰,۱\} & \forall \text{ non-adjacent vertex pairs } u,v \text{ or } u=v.
\end{array}$$

قضیه ۴.۲. مقدار بهینه مساله برنامه‌ریزی عدد صحیح فوق، عدد رنگی پویای گراف داده شده می‌باشد.

اثبات. قید $\sum_{u\in \bar{N}(v)\cup v} x_{uv} \geq ۱$ نشان می‌دهد که هر راس v باید دارای حداقل یک نماینده غیرمتصل به آن راس یا خود راس v باشد و یا به عبارتی همه رئوس رنگ‌آمیزی شده باشند. قید $x_{uv}+x_{uw}\leq x_{uu}$ بیان می‌کند که دو راس مجاور v و w نمی‌توانند دارای نماینده مشترک باشند. همچنین این قید بیان می‌کند که اگر راس u نماینده خودش نباشد (یعنی نشان دهنده یک کلاس رنگی نباشد) نمی‌تواند نماینده راس دیگری مانند v باشد. قید $\sum_{u\in N(v)} x_{wu}\leq \deg(v)-۱$ ایجاب می‌کند که راس w نماینده همه همسایه‌های راس v نباشد که همان خاصیت پویایی برای راس v می‌باشد. □

۴.۲ مدل ILP مبتنی بر پوشش مجموعه

براساس این مدل رئوس دریافت کننده رنگ‌های یکسان یک مجموعه مستقل می‌سازند (یک مجموعه از رئوس مجموعه مستقل نامیده می‌شود اگر دو رأس آن مجاور نباشد) هدف از فرمول‌بندی این است که رئوس گراف را با حداقل تعداد مجموعه‌های مستقل پوشش بدهیم S را خانواده‌ی مجموعه‌های مستقل داده شده از گراف $G=(V,E)$ باشد، مدل ILP از یک متغیر باینری x_s برای هر مجموعه مستقل $s\in S$ استفاده می‌کند. ۱ $= x_s$ اگر و تنها اگر مجموعه مستقل s بخشی از پوشش باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{array}{llll}
(\text{COV}) & \min \sum_{s\in S} x_s & & \\
& \text{s.t.} \sum_{s\in S, v\in s} x_s \geq ۱ & & \forall\, v\in V\\
& \sum_{u\in N(v)\cap s} x_s \leq \deg(v)-۱ & & \forall v\in \{x\in V: \deg(x)\geq ۲\}.
\end{array}$$

تابع هدف تعداد مجموعه‌های مستقل مورد استفاده برای پوشش رئوس را به حداقل برساند و قید اول تضمین می‌کند که هر رأس توسط حداقل یک مجموعه مستقل پوشانده می‌شود. قید $\sum_{u\in N(v)\cap s} x_s \leq \deg(v)-۱$ برای هر $v\in V$ با درجه حداقل ۲ و $s\in S$ خاصیت پویایی برای راس v را تضمین می‌کند.

مراجع

[1] T. Achterberg, T. Berthold, T. Koch, and K. Wolter. *Constraint integer programming: A new approach to integrate CP and MIP*. In Laurent Perron and Michael A. Trick, editors, CPAIOR 2008, volume 5015 of LNCS, pages 6-20. Springer, Berlin, 2008.

[2] D. Brélaz. *New methods to color the vertices of a graph*. Communications of the ACM, 22(4):251-256, 1979.

[3] J. R. Brown. *Chromatic scheduling and the chromatic number problem*. Management Science, 19(4-part-1):456-463, 1972.

[4] S. Gualandi and F. Malucelli. *Exact solution of graph coloring problems via constraint programming and column generation*. INFORMS J. on Computing, 24(1):81-100, 2012.

[5] A., Jabrayilov and P., Mutzel, *New Integer Linear Programming Models for the Vertex Coloring Problem,* Department of Computer Science, TU Dortmund University, Germany, 1-23, 1855.

[6] E. Malaguti and P. Toth. *A survey on vertex coloring problems*. International Transactions in Operational Research, 17:1-34, 2010.

[7] I. Méndez-Díaz, P. Zabala, *A cutting plane algorithm for graph coloring*. Discrete Applied Mathematics, 156(2):159-179, 2008.

[8] Montgomery, B., *Dynamic coloring of graphs*. Ph.D. thesis, West Virginia University, 2001.

پست الکترونیکی: h.soltani@uut.ac.ir