

روش‌های محافظ نوسانات طیفی لژاندر برای حل معادلات انتگرال نوع دوم با هسته‌های شدیداً نوسانی

پویا محمودی سالار^۱ و فریده قریشی^۲

دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران.

چکیده

در این مقاله، ما یک روش محافظ نوسان طیفی لژاندر برای حل معادلات انتگرال نوع دوم با هسته‌های شدیداً نوسانی پیشنهاد و تحلیل می‌کنیم. به طور مشخص، ابتدا زیر فضای تقریب استاندارد پایه‌ای چندجمله‌ای لژاندر را با تعداد محدودی از توابع نوسانی که نوسان جواب‌های دقیق را ارائه می‌دهند، ترکیب می‌کنیم. سپس، یک طرح انتگرال‌گیری عددی کارآمد ایجاد می‌کنیم که یک سیستم خطی دارای جواب یکتا را ارائه می‌دهد. بنابراین، معادله تقریبی کاملاً گسسته یک جواب منحصر بفرد داشته و جواب تقریبی به دست آمده بدون وابستگی به عدد موج به یک مرتبه همگرایی بهینه می‌رسد. علاوه بر این ثابت می‌کنیم که برای عدد موج بسیار بزرگ، عدد حالت ماتریس ضرایب سیستم خطی به دست آمده، کران‌دار است.

واژه‌های کلیدی: روش محافظ نوسان طیفی لژاندر؛ معادلات انتگرال نوسانی؛ روش بسط مجانبی؛ روش فیلون؛ روش لوین؛ روش تندترین کاهش؛ دقت طیفی.

۱ مقدمه

معادلات انتگرال در مدل‌سازی ریاضی فرایندهای فیزیکی مختلف و پدیده‌های بیولوژیکی به‌کار می‌روند. مطالعه روش‌های عددی برای معادلات انتگرال بدون نوسان یا کم نوسان توجه زیادی را به خود جلب کرده است. کتاب‌های نوشته‌شده توسط اتکینسون و برانر یک تصویر خوب از این تحولات را نشان می‌دهد و این روش‌ها را بطور مفصل مرور می‌کند. اما هنگامی که تابع هسته یا تابع ورودی به سرعت نوسان می‌کند، جواب معادلات انتگرال می‌تواند نوسانات زیادی داشته باشد، به طوری که جواب تقریبی به دست آمده با استفاده از روش‌های معمولی ممکن است بسیار تحت تاثیر این موضوع قرار بگیرند و از مقادیر واقعی جواب دور شوند. از این رو توسعه یک الگوریتم مؤثر برای حل معادلات انتگرال با نوسان بالا بسیار مهم است. در این مقاله، معادله انتگرالی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u(x) = \int_{-1}^x e^{iw(x-t)} k_1(x, t) u(t) dt + \int_x^1 e^{iw(t-x)} k_2(x, t) u(t) dt + f(x), \quad x \in I := [-1, 1], \quad (1)$$

¹Email: pouya.mahmoudi8092@gmail.com

²Email: ghoreishif@kntu.ac.ir

که در آن i عدد موهومی است و پارامتر w یک عدد موج است. توابع حقیقی مقدار K_1 و K_2 در دامنه I^γ تعریف می‌شوند. f تابع ورودی و u تابع خروجی است که باید تعیین شوند. در تمام این مقاله ما همیشه فرض می‌کنیم $w \gg 1$. واضح است که وقتی تابع هسته $K_2 = 0$ باشد، (۱) معادله انتگرال ولترا نوع دوم است، در حالی که شرط $K_1 = K_2$ سبب می‌شود رابطه (۱) یک معادله انتگرال فردهلم نوع دوم شود. در نتیجه ما (۱) را به‌عنوان هدف مطالعه انتخاب می‌کنیم. در [۱] برانر نظریه معادلات انتگرال ولترا نوع دوم را با هسته‌های شدیداً نوسانی بررسی کرده است، که در آن تکنیکی مبتنی بر انتگرال‌گیری جزء به جزء برای به‌دست آوردن بسط مجانبی جواب بر حسب توان‌های معکوس عدد موج مورد استفاده قرار داده است، به این معنی که می‌توان جواب تقریبی را بر حسب سری نیومن برش یافته به دست آورد، اما این روش همگرایی ضعیف دارد. در بیست سال گذشته، پیشرفت‌هایی در حل معادلات انتگرال ولترا و فردهلم با هسته‌های شدیداً نوسانی به ویژه در حل عددی معادلات انتگرال مرزی که از مسائل مقدار مرزی مربوطه معادله هلمهولتز با عدد موج بسیار بالا به دست آمده‌اند، صورت گرفته است [۲].

این مقاله با هدف ارائه یک روش محافظ نوسان طیفی لژاندر که قادر به حل معادله (۱) به روش کارآمدتر است، می‌پردازد. ابتدا زیر فضای تقریب شامل چند جمله‌ای لژاندر متداول و تعداد محدودی توابع نوسانی است، ایجاد می‌کنیم که نوسان جواب‌های دقیق را کنترل می‌کند و سپس از روش انتگرال‌گیری عددی مناسب برای به‌دست آوردن یک سیستم خطی کاملاً گسسته استفاده می‌کنیم. در نهایت، ما ثابت می‌کنیم که سیستم خطی کاملاً گسسته یک جواب منحصر بفرد دارد و جواب تقریبی به مرتبه همگرایی بهینه دست می‌یابد، که مستقل از عدد موج w است. علاوه بر این ثابت می‌شود عدد شرطی ماتریس ضرایب متناظر برای عدد موج به اندازه کافی بزرگ، کراندار است.

۲ روش محافظ نوسانات طیفی لژاندر

در این بخش، ما ابتدا ساختار نوسانی جواب (۱) را مورد بررسی قرار می‌دهیم و سپس یک روش محافظ نوسان طیفی لژاندر را ارائه می‌دهیم. فرض کنید $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}_n^+ \cup \{0\}$ با $\mathbb{Z}_n^+ := \{1, \dots, n\}$ برای $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$. همچنین برای $r \in \mathbb{N}$ ، فرض کنید $C^r(I)$ فضای توابع با مقادیر مختلط را نشان دهد که مشتق r ام آن‌ها در بازه I پیوسته هستند و تعریف می‌کنیم:

$$\|\phi^{(n)}\|_{C(I)} := \max_{x \in I} |\phi^{(n)}(x)|, \quad \|\phi\|_{C^r(I)} := \sum_{j \in \mathbb{Z}_r} \|\phi^{(j)}\|_{C(I)}.$$

فرض کنید $L^\gamma(I)$ فضای هیلبرت معمول توابع با مقادیر مختلط تعریف شده در I را نشان دهد که حاصل ضرب داخلی و نرم متناظر آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\phi, \psi) := \int_I \phi(x) \overline{\psi(x)} dx, \quad \|\phi\| := (\phi, \phi)^{\frac{1}{2}},$$

که در آن $\overline{\psi(x)}$ تابع مزدوج $\psi(x)$ است. ما از نماد $\|\cdot\|$ برای نشان دادن نرم L^γ توابع دو متغیره استفاده خواهیم نمود:

$$\|k\| := \left(\int_{I^\gamma} |k(x, t)|^\gamma dx dt \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

برای $p, q \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ فرض کنید $C^{p,q}(I^\gamma)$ فضای توابع با مقادیر مختلط را نشان می‌دهد که مشتق آن‌ها تا مرتبه p و q در I^γ نسبت به متغیر اول و دوم پیوسته است. حال دو عملگر ولترا $\varphi_1, \varphi_2 : C(I) \rightarrow C(I)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(\varphi_1 \phi)(x) := \int_{-1}^x e^{iw(x-t)} k_1(x, t) \phi(t) dt,$$

$$(\varphi_2 \phi)(x) := \int_x^1 e^{iw(t-x)} k_2(x, t) \phi(t) dt, \quad x \in I, \quad (2)$$

سپس (۱) فرم اپراتوری زیر را خواهد داشت:

$$u = \varphi_1 u + \varphi_2 u + f. \quad (۳)$$

در ادامه از نماد $C_{w,0}^r(I)$ برای نشان دادن فضای وابسته به عدد موج w استفاده می‌کنیم:

$$C_{w,0}^r(I) := \{\phi(x; w) \in C^r(I) : \|\phi(\cdot; w)\|_r \leq \gamma\},$$

که در آن γ یک ثابت مثبت مستقل از عدد موج w است و تنها به تابع ϕ وابسته است. ما از ساختار ارائه شده جواب از [۸]، در معادله (۱) استفاده خواهیم نمود.

قضیه ۱۰۲. فرض کنید که توابع حقیقی $k_1, k_2 \in C^{m,m}(I^\vee)$ که به عدد موج w بستگی ندارند، اگر تابع f در (۱) به صورت زیر داده شده باشد:

$$f(x) = f_0(x) + e^{iwx} f_1(x) + e^{-iwx} f_2(x), \quad x \in I$$

که در آن $f_0, f_1, f_2 \in C_{w,0}^m(I)$ است، سپس (۱) که $u \in C(I)$ یک جواب منحصر بفرد به شکل زیر می‌باشد:

$$u(x) = v_0(x) + e^{iwx} v_1(x) + e^{-iwx} v_2(x), \quad x \in I$$

که در آن $v_0, v_1, v_2 \in C_{w,0}^m(I)$.

اکنون روش محافظ نوسانات طیفی لژاندر را برای حل (۱) در نظر می‌گیریم. برای این منظور فرض کنید $T_n(x), n \in N_0, x \in I$ چند جمله‌ای متعامد لژاندر درجه n باشد که شرط $(T_p, T_q) = \delta_{p,q}$ را برآورد می‌کند. که در آن $\delta_{p,q}$ نماد دلتای کرونکر است. واضح است که مجموعه $\{T_n\}, n \in N_0$ یک مبنای متعارف $L^\vee(I)$ را تشکیل می‌دهد. برای هر عدد صحیح $k \in I := \{-1, 0, 1\}$ را با بردار زیر نشان می‌دهیم:

$$\mathbf{V}_n := [v_{j,k} : j \in \mathbb{Z}_n, k \in \mathbb{I}]^T := [v_{0,0}, \dots, v_{n,0}, v_{0,1}, \dots, v_{n,1}, v_{0,-1}, \dots, v_{n,-1}]^T,$$

$$\mathbf{V}_n^- := [v_{j,k} : j \in \mathbb{Z}_n, k \in \mathbb{I}]^T := [v_{0,0}, \dots, v_{n,0}, v_{0,-1}, \dots, v_{n,-1}, v_{0,1}, \dots, v_{n,1}]^T.$$

برای $n \in N_0$ ، دنباله‌های زیر فضا با بعد متناهی X_n از $L^\vee(I)$ را معرفی می‌کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$X_n := \text{span}\{T_{p,j} : p \in \mathbb{Z}_n, j \in \mathbb{I}\},$$

که در آن

$$T_{p,j}(x) := e^{ijwx} T_p(x), \quad x \in I.$$

روش محافظ نوسان طیفی لژاندر برای جواب (۱) به دنبال بردار

$$\mathbf{u}_n := [a_{q,k} : q \in \mathbb{Z}_n, k \in \mathbb{I}]^T = [a_{0,0}, \dots, a_{n,0}, a_{0,1}, \dots, a_{n,1}, a_{0,-1}, \dots, a_{n,-1}]^T,$$

به طوری که

$$u_n(x) := \sum_{k \in \mathbb{I}} \sum_{q \in \mathbb{Z}_n} a_{q,k} T_{q,k}(x), \quad x \in I,$$

و $(u_n, \phi) = (\varphi_1 u_n, \phi) + (\varphi_2 u_n, \phi) + (f, \phi)$ برای هر $\phi \in X_n$ برقرار باشد.

اگر عملگر تصویر متعامد را از $L^\vee(I)$ به X_n با ρ_n نشان دهیم، معادله فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$u_n = \rho_n \varphi_1 u_n + \rho_n \varphi_2 u_n + \rho_n f. \quad (۴)$$

برای این که شکل ماتریس (۴) را به دست آوریم، به برخی از نمادها نیاز داریم، برای $p, q \in \mathbb{Z}_n$ و $j, k \in \mathbb{I}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a_{p,q,k,j} := \int_I e^{iw(k+j)x} T_p(x) T_q(x) dx,$$

سپس، ماتریس‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{A}_{k,j,n} := [a_{p,q,k,j} : p, q \in \mathbb{Z}_n],$$

$$\mathbf{A}_n := \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\circ,\circ,n} & \mathbf{A}_{\circ,\uparrow,n} & \mathbf{A}_{\circ,-\uparrow,n} \\ \mathbf{A}_{-\uparrow,\circ,n} & \mathbf{A}_{-\uparrow,\uparrow,n} & \mathbf{A}_{-\uparrow,-\uparrow,n} \\ \mathbf{A}_{\uparrow,\circ,n} & \mathbf{A}_{\uparrow,\uparrow,n} & \mathbf{A}_{\uparrow,-\uparrow,n} \end{bmatrix}.$$

از طرفی تعریف می‌کنیم:

$$b_{p,q,k,j}^{\varphi_1} := \int_I \int_{-\uparrow}^x e^{iw(\uparrow+j)x + iw(k-\uparrow)t} K_{\uparrow}(x,t) T_p(x) T_q(t) dx dt, \quad (5)$$

و

$$b_{p,q,k,j}^{\varphi_2} := \int_I \int_x^{\uparrow} e^{iw(j-\uparrow)x + iw(k+\uparrow)t} K_{\uparrow}(x,t) T_p(x) T_q(t) dx dt. \quad (6)$$

برای $L = 1, 2$ ماتریس‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{B}_{k,j,n}^{\varphi_1} := [b_{p,q,k,j}^{\varphi_1} : p, q \in \mathbb{Z}_n],$$

$$\mathbf{B}_{l,n} := \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\circ,\circ,n}^{\varphi_1} & \mathbf{B}_{\circ,\uparrow,n}^{\varphi_1} & \mathbf{B}_{\circ,-\uparrow,n}^{\varphi_1} \\ \mathbf{B}_{-\uparrow,\circ,n}^{\varphi_1} & \mathbf{B}_{-\uparrow,\uparrow,n}^{\varphi_1} & \mathbf{B}_{-\uparrow,-\uparrow,n}^{\varphi_1} \\ \mathbf{B}_{\uparrow,\circ,n}^{\varphi_1} & \mathbf{B}_{\uparrow,\uparrow,n}^{\varphi_1} & \mathbf{B}_{\uparrow,-\uparrow,n}^{\varphi_1} \end{bmatrix}.$$

اگر فرض کنیم

$$f_{p,j} := \int_I e^{iwjx} f_{\circ}(x) T_p(x) dx + \int_I e^{iw(j+\uparrow)x} f_{\uparrow}(x) T_p(x) dx + \int_I e^{iw(j-\uparrow)x} f_{\downarrow}(x) T_p(x) dx. \quad (7)$$

اکنون فرض کنیم $\mathbf{f}_n^- := [f_{j,k}^- : j \in \mathbb{Z}_n, k \in \mathbb{I}]^T$ بنابراین (۴) یک فرم ماتریس معادل به صورت زیر دارد:

$$\mathbf{A}_n \mathbf{u}_n := \mathbf{B}_{\uparrow,n} \mathbf{u}_n + \mathbf{B}_{\downarrow,n} \mathbf{u}_n + \mathbf{f}_n^-. \quad (8)$$

مشاهده می‌کنیم که اجرای روش طیفی برای جواب (۲) معادل جواب سیستم خطی (۸) است. با این حال همه عناصر در ماتریس‌های $\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_{\uparrow,n}, \mathbf{B}_{\downarrow,n}$ و بردار \mathbf{f}_n^- انتگرال هستند، که برای محاسبه عناصر فوق به یک الگوریتم محاسباتی کارآمد نیاز داریم. در مرحله بعد روش‌های انتگرال گیری عددی کارآمدی ایجاد می‌کنیم، که می‌تواند دقت کافی برای اطمینان از این که جواب تقریب به مرتبه همگرایی بهینه برسد، را به دست آورد. به ویژه ما ساده‌ترین روش ممکن برای به دست آوردن فرم کاملاً گسسته (۸) را می‌سازیم. در عین حال، الگوریتم پیشنهادی مرتبه همگرایی بهینه را حفظ می‌کند. در بیست سال گذشته، انتگرال‌های شدیداً نوسانی به خوبی شناخته و به روش‌های بسیار کارآمد ابداع شده‌اند، به طوری که دقت محاسبات آن‌ها با افزایش عدد موج به بی‌نهایت میل می‌کند. عمده‌تاً چهار دسته از روش‌ها برای محاسبه انتگرال‌های شدیداً نوسانی وجود دارد: روش‌های مجانبی در [۶]، روش‌های نوع فیلون در [۷]، روش‌های نوع لوین در [۸] و روش عددی تحت عنوان تندترین شیب در [۹]، از جمله روش‌های کارآمد در این حوزه هستند. اخیراً روش جدیدی در [۱۱] ارائه

شده است، که روش نوع فیلون آزاد لحظه‌ای را با مش‌های درجه‌بندی شده ترکیب می‌کند. در این بخش، از روش عددی تندترین شیب برای محاسبه انتگرال‌های شدیداً نوسانی و از روش لژاندر-گائوس برای انتگرال‌های غیر نوسانی استفاده خواهیم کرد. به همین دلیل، در روی بازه I و (\circ, ∞) معرفی می‌کنیم. به‌وضوح،

$$\int_I \phi(x) dx = \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} w_{j,n}^L \phi(x_{j,n}^L), \quad \int_{\circ}^{\infty} e^{-x} \phi(x) dx = \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} w_{j,n}^{La} \phi(x_{j,n}^{La}), \quad (9)$$

که در آن $\phi \in \mathbb{P}_{2n+1}$ ، در این جا از نماد \mathbb{P}_n برای نشان دادن مجموعه‌ای از چند جمله‌ای‌های با مقدار مختلط با درجه‌ای که بیشتر از n نباشد استفاده می‌شود.

۳ تحلیل الگوریتم

هدف از این بخش تجزیه و تحلیل روش پیشنهادی ما از جمله حل پذیری معادله متناظر با روش عددی، همگرایی روش تقریبی و پایداری سیستم خطی مربوطه است. برای $\alpha, \beta > -1$ فرض کنیم $w^{\alpha, \beta}(x) := (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ ، $x \in (-1, 1)$ یک تابع وزن ژاکوبی باشد و همچنین $H_{w^{\alpha, \beta}}^r(I)$ فضای غیر یکنواخت وزن‌دار تعریف شده توسط

$$H_{w^{\alpha, \beta}}^r(I) := \{\phi : \phi^{(k)} \in L_{w^{\alpha+k, \beta+k}}^r(I), k \in \mathbb{Z}_r\},$$

با نرم

$$\|\nu\|_{w^{\alpha, \beta}, r} := \sum_{j \in \mathbb{Z}_r} \|\nu^{(j)}\|_{w^{\alpha+j, \beta+j}}.$$

باشد. اکنون فضای متناهی‌البعد را در نظر می‌گیریم که توسط Y_n تعریف شده است:

$$Y_n := \text{span}\{T_j : j \in \mathbb{Z}_n\},$$

سپس، فرض کنیم R_n عملگر تصویر متعامد از $L^r(I)$ به Y_n باشد. سپس از [۱۲] نتیجه می‌گیریم که یک ثابت مثبت c وجود دارد به‌طوری که برای $\nu \in H_{w^{\alpha, \beta}}^r(I)$ داریم:

$$\|\nu - R_n \nu\| \leq c \|\nu^{(r)}\|_{w^{\alpha, \beta}, r} n^{-r}. \quad (10)$$

به عبارت دیگر، با استفاده مستقیم از این واقعیت که $Y_n \subseteq X_n$ نتیجه می‌گیریم:

$$P_n R_n = R_n, \quad (11)$$

علاوه بر این از قضیه ۶.۸ در [۱۲] چنین استنباط می‌شود که یک ثابت مثبت c وجود دارد که برای $\phi \in C^{(m, m)}(I^r)$ داریم:

$$\|\phi - l_n \phi\| \leq c n^{-r}. \quad (12)$$

در طول این مقاله، ما فرض می‌کنیم که معادله اصلی یک جواب منحصر بفرد $u \in L^r(I)$ برای هر $f \in L^r(I)$ دارد، به این معنی که یک ثابت ρ وجود دارد که برای $\nu \in L^r(I)$ داریم:

$$\|(g - \varphi_1 - \varphi_2)\nu\| \geq \rho \|\nu\|. \quad (13)$$

سپس وارون عملگر گسسته $L^r(I)$ را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$g - \rho_n \varphi_{1,n} \rho_n \varphi_{2,n} : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n.$$

قضیه ۱.۰۳. فرض کنید شرایط قضیه ۱.۰۲ برقرار است. سپس یک عدد صحیح مثبت n_0 وجود دارد به طوری که برای $n \geq n_0$ و $\nu \in \mathbb{P}_n$ داریم:

$$\|(g - \rho_n \varphi_{1,n} - \rho_n \varphi_{2,n})\nu\| \geq \frac{\rho}{4} \|\nu\|.$$

که ρ در (۱۳) ظاهر می‌شود.

نتیجه ۲.۰۳. قضیه ۱.۰۳ نشان می‌دهد برای n به اندازه کافی بزرگ، سیستم کاملاً گسسته (۸) یک جواب منحصر بفرد \bar{u}_n دارد. نتیجه بعدی مربوط به مرتبه همگرایی جواب تقریبی \bar{u}_n است.

قضیه ۳.۰۳. فرض کنید شرایط قضیه ۱.۰۲ برقرار است. سپس یک عدد ثابت مثبت c و یک عدد صحیح مثبت n_0 وجود دارد به طوری که برای $n \geq n_0$ داریم:

$$\|u - \bar{u}_n\| \leq cn^{-m}.$$

نتیجه ۴.۰۳. قضیه ۳.۰۳ نشان می‌دهد جواب تقریبی به همگرایی بهینه می‌رسد. در پایان ما ثابت می‌کنیم که ماتریس ضرایب سیستم خطی (۸) دارای یک عدد شرطی محدود یکنواخت برای عدد موج w است. برای این منظور عدد شرطی آن را برای هر ماتریس مربع غیر منفرد G با $\|G\| \|G^{-1}\|$ (G) نشان می‌دهیم.

قضیه ۵.۰۳. فرض کنید شرایط قضیه ۱.۰۲ برقرار است. سپس یک عدد ثابت مثبت c و یک عدد صحیح مثبت n_0 و w_0 وجود دارد به طوری که

$$\text{cond}(A_n - \bar{B}_{1,n} - \bar{B}_{2,n}) \leq c.$$

نتیجه ۶.۰۳. قضیه ۵.۰۳ نشان می‌دهد عدد شرطی ماتریس ضرایب به دست آمده از روش محافظ طیفی لژاندر به طور یکنواخت برای $n \geq n_0$ و $w \geq w_0$ کران دار می‌شود.

۴ نتایج عددی

در این بخش نمونه‌هایی را برای نشان دادن اثر بخشی و دقت روش پیشنهادی خود ارائه می‌دهیم. در اینجا گره‌ها و وزن‌های قاعده گاوس-ژاکوبی را با قضیه‌هایی که در [۱۲] مورد بحث قرار گرفت محاسبه می‌کنیم. در مثال زیر خطای $\|u - \bar{u}_n\|$ در نقاط $\tau_j = -1 + 0.02j$ برای $j \in \mathbb{Z}_{100}$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\|u - \bar{u}_n\| \approx \frac{1}{5^0} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}_{100}} |u(\tau_j) - \bar{u}_n(\tau_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

در مثال زیر فرض می‌کنیم $w_k := 5 \times 10^k$ ، $k = 1, 2, 3, 4, 6, 10$ است.

مثال ۱.۰۴. انتگرال ولترا از نوع دوم (۱) را در نظر بگیرید، که تابع هسته K_1 و K_2 با $K_1(x, t) := -1$ و $K_2(x, t) := 0$ داده می‌شوند. تابع خروجی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) := f_0(x) + f_1(x)e^{iwx} + f_2(x)e^{-iwx}, \quad x \in I,$$

که در آن

$$f_0(x) := \cos(x) + \frac{\sin x - iwx \cos x}{1 - w^2}, \quad x \in I,$$

و

$$f_1(x) := (x+1)^{4.5} + \frac{2}{11}(x+1)^{5.5} + e^{iw} \frac{\sin 1 + iw \cos 1}{1 - w^2}, \quad x \in I,$$

$$f_j(x) := \circ, \quad x \in I,$$

به طوری که جواب دقیق

$$u(x) := v_\circ(x) + e^{iwx}v_1(x) + e^{-iwx}v_2(x), \quad x \in I,$$

که در آن

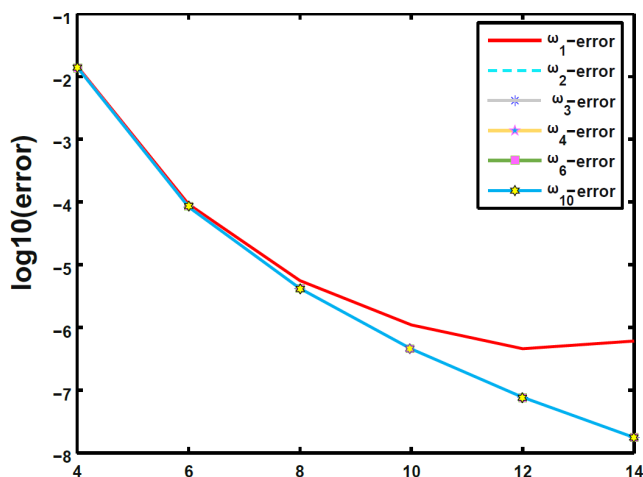
$$v_\circ(x) := \cos x, \quad v_1(x) := (x+1)^{4.5}, \quad v_2(x) := \circ, \quad x \in I,$$

داده شده است.

واضح است که برای f_j ، $j = \circ, 1, 2$ ، $v_j \in C_{w,\circ}^m(I)$ که m عدد صحیح و مثبت است و $v_1 \in C_{w,\circ}^4(I)$. از نتایج نظری به دست آمده در این مقاله نتیجه می‌گیریم که خطاهای عددی با یک نرخ جبری کاهش می‌یابند، زیرا جواب دقیق برای این مثال به اندازه کافی هموار نیست.

جدول ۱: روش محافظ نوسان برای مثال ۱.۴

n	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴
$cond(w_1)$	۲,۸۱	۴,۲۸	۸,۸۱	۲۴,۶۲	۹۱,۳۰	۱۳۲۳
$\ u - \bar{u}_n\ (w_1)$	$۱,۴۶e - ۲$	$۹,۲۱e - ۵$	$۵,۵۸e - ۶$	$۱,۱۰e - ۶$	$۴,۵۸e - ۷$	$۶,۰۹e - ۸$
$cond(w_2)$	۲,۱۵	۲,۲۲	۲,۳۰	۲,۴۱	۲,۵۶	۲,۷۲
$\ u - \bar{u}_n\ (w_2)$	$۱,۴۱e - ۲$	$۸,۳۴e - ۵$	$۴,۲۰e - ۶$	$۴,۵۴e - ۷$	$۷,۶۶e - ۸$	$۱,۷۵e - ۸$
$cond(w_3)$	۲,۱۱	۲,۱۱	۲,۱۲	۲,۱۳	۲,۱۴	۲,۱۶
$\ u - \bar{u}_n\ (w_3)$	$۱,۴۱e - ۲$	$۸,۸۳e - ۵$	$۴,۱۹e - ۶$	$۴,۵۳e - ۷$	$۷,۶۹e - ۸$	$۱,۷۶e - ۸$
$cond(w_4)$	۲,۱۱	۲,۱۱	۲,۱۱	۲,۱۱	۲,۱۱	۲,۱۱
$\ u - \bar{u}_n\ (w_4)$	$۱,۴۱e - ۲$	$۸,۸۳e - ۵$	$۴,۱۹e - ۶$	$۴,۵۳e - ۷$	$۷,۶۹e - ۸$	$۱,۷۶e - ۸$
$cond(w_5)$	۲,۱۱	۲,۱۱	۲,۱۱	۲,۱۱	۲,۱۱	۲,۱۱
$\ u - \bar{u}_n\ (w_5)$	$۱,۴۱e - ۲$	$۸,۸۳e - ۵$	$۴,۱۹e - ۶$	$۴,۵۳e - ۷$	$۷,۶۹e - ۸$	$۱,۷۶e - ۸$
$cond(w_{1,\circ})$	۲,۱۱	۲,۱۱	۲,۱۱	۲,۱۱	۲,۱۱	۲,۱۱
$\ u - \bar{u}_n\ (w_{1,\circ})$	$۱,۴۱e - ۲$	$۸,۸۳e - ۵$	$۴,۱۹e - ۶$	$۴,۵۳e - ۷$	$۷,۶۹e - ۸$	$۱,۷۶e - ۸$



شکل ۱: خطاهای مثال ۱.۴.

۵ نتیجه‌گیری

هدف اصلی این مقاله یک روش محافظ نوسان طیفی لژاندر برای حل معادلات انتگرال نوع دوم ولترا و فردهلم با هسته‌های شدیداً نوسانی است. در این مقاله، روش محافظ نوسان طیفی لژاندر را تجزیه و تحلیل کردیم. سپس نتایج پایداری و همگرایی مطلوب را در فضای $L^2(I)$ به دست آوردیم.

مراجع

- [1] Brunner, H.: On Volterra integral operators with highly oscillatory kernels. *Discr. Cont. Dynam. Syst.* 34, 915–929 (2014).
- [2] Chandler-Wilde, S.N., Graham, I.G., Langdon, S., Spence, E.A.: Numerical asymptotic boundary integral methods in high-frequency acoustic scattering. *Acta Numerica* 21, 89–305 (2012).
- [3] Wang, H., Xiang, S.: Asymptotic expansion and Filon-type methods for Volterra integral equation with a highly oscillatory kernel. *IMA J. Numer. Anal.* 31, 469–490 (2011).
- [4] Xiang, S., Brunner, H.: Efficient methods for Volterra integral equations with highly oscillatory Bessel kernels. *BIT Numer. Math.* 53, 241–263 (2013).
- [5] Wang, Y., Xu, Y.: Oscillation preserving Galerkin Methods for Fredholm integral equations of the second kind with oscillatory kernels. *arXiv:1507.01156* (2015).
- [6] Iserles, A., Norsett, S.P.: Efficient quadrature of highly oscillatory integrals using derivatives. *Proc. Amer. Math. Soc.* 461, 1383–1399 (2005).
- [7] Domspnguez, V., Graham, I.G., Kim, T.: Filon-Clenshaw-Curtis rules for highly oscillatory integrals with algebraic singularities and stationary points. *SIAM J. Numer. Anal.* 51, 1542–566 (2013).
- [8] Levin, D.: Analysis of a collocation method for integrating rapidly oscillatory functions. *J. Comp. Appl. Math.* 78, 131–138 (1997).
- [9] Huybrechs, D., Vandewalle, S.: On the evaluation of highly oscillatory integrals by analytic continuation. *SIAM J. Numer. Anal.* 44, 1026–1048 (2006).
- [10] Huybrechs, D., Vandewalle, S.: The construction of cubature rules for multivariate highly oscillatory integrals. *Math. Comp.* 76, 1955–1980 (2007).

- [11] Ma, Y., Xu, Y.: Computing integrals involved the Gaussian function with a small standard deviation. *J. Sci. Comput.* 78, 1744–1767 (2019).
- [12] Shen, J., Tang, T., Wang, L.: *Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, New York (2011).