محاسبه اندیس پادماکار ایوان در گراف متصل سطری ستونی مربع هشت ضلعی

علیرضا گیلانی [1,*] ، امیر بهرامی [2]

[1] گروه ریاضی، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.
[2] گروه ریاضی، واحد ماهشهر، دانشگاه آزاد اسلامی، ماهشهر، ایران.

چکیده

یک گراف متصل سطری ستونی مربع هشت ضلعی یک شکل هندسی است که با اتصال چند مربع و هشت ضلعی با ترتیب سطری ستونی مساوی به صورت یال به یال تشکیل می‌شود. در در این مقاله قصد داریم شاخص پادماکار ایوان در گراف متصل سطری ستونی مربع هشت ضلعی را تعیین نماییم.

کلمات کلیدی: *شاخص* پادماکار ایوان، گراف، گراف متصل سطری ستونی مربع هشت ضلعی

مقدمه

زوج $G = (V,E)$ از مجموعه ها که $E \subseteq V \times V$ و $V \cap E = \Phi$ باشد را یک گراف می نامیم. اعضای V را راس، نقطه یا گره و اعضای E را یال یا خط می نامیم. برای رسم یک گراف کافی ست متناظر با هر راس یک نقطه و متناظر با هر یال یک خط رسم کنیم. گراف با مجموعه رئوس V را اصطلاحا یک گراف روی V می نامیم. مجموعه رئوس گراف G با $V(G)$ و مجموعه یال های آن را با $E(G)$ نشان می دهیم. تعداد رئوس گراف G را نماد $|G|$ نشان داده و آن را مرتبه G می نامیم. تعداد یال های G را با نماد $\|G\|$ نشان می دهیم. اگر $|G|$ متناهی باشد گراف G را متناهی می نامیم در این طرح تمام گراف ها متناهی هستند مگر خلاف آن ذکر شود.

نظریه گراف اخیرا توجه بسیاری از دانشمندان را به خود جلب نمود و شاخص های بسیاری در گراف ها تعریف گردید. در زیر به برخی از آنها اشاره می نماییم. در واقع ، یک شاخص در یک گراف ، یک مقدار حقیقی است که به آن گراف نسبت داده می شود و معرف برخی خواص آن است.

یکی ازاولین شاخص ها از گراف بر اساس فاصله و طول آن توسط وینر در [۱] در سال ۱۹۴۷ تعریف شد که با بعضی از مطالعات روی خواص گراف‌های فاقد دور معرفی گردید . اخیراً به یکی از موضوعات اصلی تبدیل شده است که توجه شیمیدانان نظری را به آن متمرکز می‌کند.

اولین شاخص توپولوژیکی در سال ۱۹۴۷ توسط شیمی دان امریکایی به نام هارولد وینر[۱] برای بررسی خواص برخی از گراف ها تعریف شد.این شاخص توپولوژیکی به صورت حاصل جمع تمامی فواصل بین رئوس G تعریف می شود.در اینجا برای هر دو رائس x وy ازG فاصله بین x وy را با $d_G(x,y)$ نشان میدهیم و به صورت یک کوتاه ترین راه بین y,x تعریف می کنیم. واضح است که تابع $d:G\times G\rightarrow R^+\cup\{0\}$ واجد تمامی شرایط یک متر است و لذا (G,d) یک فضای متریک می باشد.

پس از آن ، صدها شاخص توپولوژیکی در جهان شناخته شده اند که از معروف ترین آنها شاخص توپولوژیکی وینر(W) ، شاخص توپولوژیکی سگد می باشد که ارتباط بین این اندیس ها توسط دانشمندانی چون خادیکار [2,3,5,6] و دهگردی[7] در مجلات علمی مختلف به چاپ رسیده اند.

به دنبال آنها دانشمندانی چون دلنگ و ژو[8] و کلانر [9]به تعریف حللت سگد یالی و چندجمله ای های متناظر باآنهاپرداختند و نتایج جالبی در مورد آنها بدست آورده اند.

* **Corresponding author: Email: a_gilani@azad.ac.ir**

پس از آنها دانشـــمند بزرگ پادماکار خادیکار[4] ، شـــاخص توپولوژیکی پادماکار- ایوان(PI) را تعریف نمود و آن را با نمادPI نشان داد و به صورت زیر تعریف نمود:

$$PI(G)=\sum_{e=uv}[m_u(e\,|\,G)+m_v(e\,|\,G)]$$

که در آن تعداد یال‌هایی که فاصله آنها تا رأس u کمتر از فاصله آنها تا رأس v باشد را با $m_u(e\,|\,G)$ نشان می‌دهیم و تعداد یال‌هایی که فاصله آنها تا رأس v کمتر از فاصله آنها تا رأس u باشد را با $m_v(e\,|\,G)$ نشان می‌دهیم. همچنین در این تعریف یال‌هایی که فاصله آنها تا رأس‌های u و v برابرند، محاسبه نمی‌شوند.

پس از آنها دانشـمندانی چون اخیرا دانشـمندانی چون کلانرو دانشـمندان دیگر در مراجع[11-10]به بحث مربع آرایی روی آوردند و مقالات مهمی را در این زمینه و فاصله ها در این گراف ها درمجلات علمی به چاپ رسانده اند.
با ادامه روند، این اندیس را در گراف متصل سطری ستونی مربع هشت ضلعی در این مقاله تعیین می نماییم.
در تمامی قســـمت های این مقاله، گراف های مورد بحث، ســـاده و متناهی و غیر جهتدار می باشـــند و نمادگذاری ها مطابق مراجع [14-12] می باشند.

۲. نتایج و بحث ها

در این بخش به محاسبه داریم شاخص پادماکار ایوان در گراف متصل سطری ستونی مربع هشت ضلعی می پردازیم.

قضیه. فرض کنیم $G=(V,E)$ گراف متناظر با داریم شاخص پادماکار ایوان در گراف متصل سطری ستونی مربع هشت ضلعی باشد، در این صورت داریم:

$$PI(G)=mn\times\begin{cases}9mn-5n-2n+2 & n\le m\\ 9mn-5m-2m+2 & n<m\end{cases}$$

اثبات. فرض کنیم $G=(V,E)$ گراف متناظر با گراف متصل سطری ستونی مربع هشت ضلعی باشد. با توجه به داشتن یالهای مورب و عمودی و افقی می توان با تقسیم بندی های این یال ها به صورت زیر، می توان پادماکار ایوان شاخص را محاسبه نمود.

فرض کنید $e=uv\in E(G)$ یک یال مورب باشـد. همچنین $u=u_{21}$ و $v=u_{12}$ به عنوان رأس‌های یال e در نظر

$$.\ |N_u(e\,|\,G)|=m(n-2)+4(\tfrac{m}{2})=mn$$

تعداد رأس‌های مجموعه $N_u(e\,|\,T)$ که درجه‌های آنها مساوی ۲ است، برابر با ۲-۳m می‌باشد و درجه بقیه رأس‌ها مساوی ۳ است. بنابراین $m_u(e\,|\,G)=\frac{1}{2}(3mn-3n+2)$. از طرفی با توجه به متقارن بودن گراف خواهیم داشت:

$$m_v(e\,|\,T)=\frac{1}{2}(3mn-3n+2)\ .$$

حال اگر $n<m$، آنگاه داریم:

$$m_u(e\,|\,T)=m_v(e\,|\,T)=\frac{1}{2}(3mn-3m+2)\ .$$

فرض کنید $e=uv\in E(G)$ یک یال عمودی باشد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$m_u(e|G)=m_v(e|G)=\frac{1}{2}(3mn-2m).$$

اگر $e=uv\in E(G)$ یک یال افقی باشد. چون هر ستون n رأس دارد، لذا اندازه $N_u(e|G)$ برابر با mn است. به آسانی دیده می‌شود که در ستون‌های دیگر از درجه ۳ هستند. بنابراین $m_u(e|T)=\frac{1}{2}(3mn-2n)$. به طور مشابه خواهیم داشت $m_v(e|T)=\frac{1}{2}(3mn-2n)$.

با توجه به موارد فوق

داریم:

$$PI(G)=mn\times\begin{cases}9mn-5n-2n+2 & n\le m\\ 9mn-5m-2m+2 & n<m\end{cases}$$

و اثبات کامل است.

منابع و مراجع :

[1].Wiener, H. , Structural Determination of Paraffin Boiling Points, J. Am. Chem. Soc. 69-73 (1947)

[2]. Karmarkar, S., Karmarkar, S., Joshi, S., Das, A., Khadikar, P. V., (1997) Novel Application of Wiener vis-a-vis Szeged Indices in Predicting Polychlorinated Biphenyls in the Environment. *J. Serb. Chem. Soc*. 62, 227-234.

[3]. Khadikar, P. V., Deshpande, N. V., Kale, P. P., Dobrynin, A., Gutman, I., Domotor, G., (1995) The Szeged Index and an Analogy with the Wiener Index. *J. Chem. Inf. Comput. Sci*., 35, 547-550.

[4]. Khadikar, P. V., (2000) on a novel structural descriptor PI. *Nat. Acad. Sci. Lett*. 23**,** 113-118.

[5]. Khadikar, P. V., Karmarkar, S., Agrawal, V.K., (2001) A novel PI index and its applications to QSPR/QSAR studies. *J. Chem. Inf. Comput. Sci*., 41, 934–949.

[6]. Khadikar, P. P., Deshpande, N. V., Kale, P. P., Dobrynin, A. A., Gutman, I., Domotor, G., (1995) The Szeged Index and an Analogy with the Wiener Index. *J. Chem. Inf. Comput. Sci*., 35, 545-550.

[7]. N. Dehgardi, A note on revised Szeged index of graph operations, Iranian J. Math. Chem. 9 (2018) 57–63

[8]. H. Dong, B. Zhou and C. Trinajstić, A novel version of the edge-Szeged index, Croat.

[9]. D.A. Klarner, *Polyominoes*. In: Goodman, J.E., Chem. Acta 84 (2011) 543–545. O'Rourke, and J.

[10].J. Bondy and U. Murty, Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 244, Springer, 20089

[11].N. Trinajsti}, Chemical Graph Theory, CRC Press, Boca Raton (Fl), 1983.