# مقایسه شاخص ABC در دو گراف خاص با استفاده از تبدیل یال برشی

**مهدی علائیان [*،۱]، امیر بهرامی [۲]**

**۱- دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه علم و صنعت ایران، نارمک، تهران ، ایران .**

**۲- گروه ریاضی، واحد ماهشهر، دانشگاه آزاد اسلامی، ماهشهر، ایران**

## چکیده

شاخص ABC در گراف ساده $G=(V,E)$ بصورت زیر تعریف می گردد:

$$ABC(G) = \sum_{uv\in E}\sqrt{\frac{d(u)+d(v)-2}{d(u)d(v)}}$$

که در آن $d(u)$ درجه راس $u$ می باشد. در این مقاله قصد داریم این شاخص را بین دو گراف ملکولی خاص مورد مقایسه قرار دهیم.

**کلمات کلیدی:** نظریه گراف، گراف ملکولی، شاخص ABC

## ۱.مقدمه

شاخص ABC در گراف ساده $G=(V,E)$ بصورت زیر تعریف می گردد:

$$ABC(G) = \sum_{uv\in E}\sqrt{\frac{d(u)+d(v)-2}{d(u)d(v)}}$$

که در آن $d(u)$ درجه راس $u$ می باشد.

این توصیفگر ، توسط استرادا و همکارانش معرفی شد [۱].

در مورد شاخص ABC، پیدا کردن درختی که برای این شاخص حداکثر است نسبتاً آسان است. به راحتی می‌توان نشان داد که گراف $n$-رأسی و درخت $n$-رأسی با حداکثر شاخص ABC، به ترتیب گراف کامل و ستاره هستند [1,2] . در نهایت

* **Corresponding author: Email:alaeiyan@iust.ac.ir**

همچنین درخت‌هایی با دومین حداکثر و سومین حداکثر و... شاخص ABC تعیین شده‌اند [3]. از سوی دیگر، مسئله مشخص کردن درخت (یا درخت‌های) $n$-رأسی که ABC آن حداقل است کار دشواری است و تاکنون به‌طور کامل حل نشده است. اخیراً نشان داده شده است که با حذف یک یال از هر گراف شاخص ABC کاهش می‌یابد و همچنین این شاخص برای گرافهای خاص دندریمری محاسبه گردیده است. [3,4].

در این مقاله به دلیل اهمیت و کاربرد این شاخص، قصد داریم این شاخص را برای دو گراف ملکولی شکل ۱ و ۲ مورد مقایسه و بحث قرار دهیم.

همچنین کلیه نمادگذاری ها استاندارد بوده و مطابق مرجع 5 می باشد.

## ۲. نتایج و بحث ها

**قضیه**. فرض کنیم $G_1$ و $G_1'$ دو گراف مربوط به شکل های ۱ و ۲ باشند. آنگاه :

$$ABC(G_1) > ABC(G_1')$$

**اثبات.**

فرض کنید $G_1$ درخت نشان داده شده در شکل ۱باشد که $k \geq 2$، $t \geq 2$، $d_{G_1}(u_i) \geq 3$ برای $i = ۱,\dots,k$ و $d_{G_1}(v_i) \geq 3$ برای $i = ۱,\dots,t$ باشد. نماد $G_1'$ را برای درخت به دست آمده از $G_1$ با حذف رأس $u$ و یال‌های $uu_i$ برای $i = ۱,\dots,k$ و اضافه کردن یال‌های $vu_i$ برای $i = ۱,\dots,k$ (شکل ۲)، قرار می‌دهیم. واضح است که $G_1$ و $G_1'$ تعداد رأس‌های آویز مشابهی دارند، $d_{G_1}(u_i) = d_{G_1'}(u_i)$ برای $i = ۱,\dots,k$ و $d_{G_1}(v_i) = d_{G_1'}(v_i)$ برای $i = ۱,\dots,t$. در نتیجه می‌گوییم که $G_1'$ توسط تبدیل یال برشی از G است و داریم:

اگر:

$$A = \sqrt{\frac{d_{G_1}(u) + d_{G_1}(v) - 2}{d_{G_1}(u) d_{G_1}(v)}} + \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\frac{d_{G_1}(u) + d_{G_1}(u_i) - 2}{d_{G_1}(u) d_{G_1}(u_i)}} + \sum_{i=1}^{t} \sqrt{\frac{d_{G_1}(v) + d_{G_1}(v_i) - 2}{d_{G_1}(v) d_{G_1}(v_i)}},$$

و

$$B = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\frac{d_{G_1'}(v) + d_{G_1'}(u_i) - 2}{d_{G_1'}(v) d_{G_1'}(u_i)}} + \sum_{i=1}^{t} \sqrt{\frac{d_{G_1'}(v) + d_{G_1'}(v_i) - 2}{d_{G_1'}(v) d_{G_1'}(v_i)}}.$$

آنگاه:

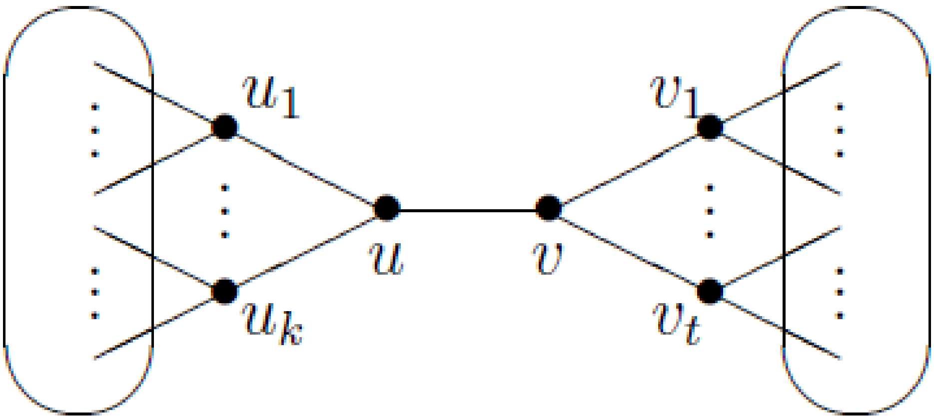
$$ABC(G_1) - ABC(G_1') = A - B\,.$$

$$= \sqrt{\frac{k+t}{(k+1)(t+1)}} + \sum_{i=1}^{k}\sqrt{\frac{d_{G_1}(u_i)+k-1}{(k+1)d_{G_1}(u_i)}} + \sum_{i=1}^{t}\sqrt{\frac{d_{G_1}(v_i)+t-1}{(t+1)d_{G_1}(v_i)}} - \sum_{i=1}^{k}\sqrt{\frac{d_{G_1'}(u_i)+k+t-2}{(k+t)d_{G_1'}(u_i)}} - \sum_{i=1}^{t}\sqrt{\frac{d_{G_1'}(v_i)+k+t-2}{(k+t)d_{G_1'}(v_i)}}\,.$$

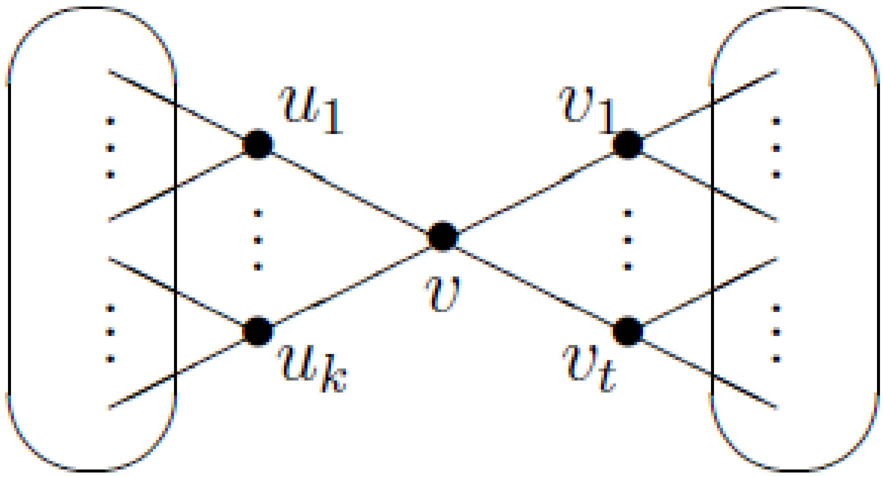
لذا:

$$ABC(G_1) > ABC(G_1')$$

و اثبات کامل است.




شکل(۱):درخت $G_1$




شکل(۲):درخت $G_1'$

**مراجع**

[1] Estrada, E., Torres, L., Rodriguez, L. and Gutman, I., (1998), An atom-bond connectivity index: Modelling the enthalpy of formation of alkanes. Indian J. Chem., 37A, pp. 849-855.
[2] Ghorbani, M. and Hosseinzadeh, M. A., (2010), Computing ABC4 index of nanostar dendrimers, Optoelectron. Adv. Mater.-Rapid Commun., 4(9), pp. 1419-1422.
[3] Graovac, A., Ghorbani, M. and Hosseinzadeh, M. A., Computing fifth geometric-arithmetic index for nanostar dendrimers., J. Math. Nanosci, 1, pp. 33-42
[4] Hande, S. P., Jog, S. R., Ramane, H. S., Hampiholi, P. R., Gutman, I. and Durgi, B. S., (2013), Derived graphs of subdivision graphs, Kragujevac J. Sci., 37(2), pp. 319-323.
[5] Harary, F., (1969), Graph Theory, Addison−Wesley, Reading.