



## حل سریع یک نوع معادله انتگرال نوسانی یک بعدی فرد هولم

شیمیا احمدلی<sup>۱</sup> و پویا محمودی سالار<sup>۲</sup>

دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران.

### چکیده

چگونگی حل سریع و دقیق معادلات انتگرال نوسانی موضوعی است که توجه ویژه‌ای را در بسیاری از زمینه‌های مهندسی و مطالعات نظری به خود جلب کرده‌است. در این مقاله، یک روش حل سریع برای حل نوعی از معادله انتگرال نوسانی خاص ارائه شده‌است که تابع مجهول آن بسیار کمتر از تابع هسته نوسان دارد. که در آن یک روش بهبود یافته لوین برای حل انتگرال‌های نوسانی به کار گرفته می‌شود. از سوی دیگر، تنها تعداد کمی از سیستم‌های معادلات خطی با مقیاس کوچک نیاز به حل دارند، بنابراین پیچیدگی محاسباتی نیز بسیار کم است. مثال‌های عددی مزایای این روش را تایید می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: معادله انتگرال نوسانی؛ روش لوین؛ روش طیفی؛ ماتریس تمایز چبیشف؛ نقطه فاز ثابت.

### ۱ مقدمه

چگونگی حل سریع و دقیق معادلات انتگرالی مساله مهمی است که در بسیاری از زمینه‌ها به وجود می‌آید. در میان معادلات انتگرالی، معادلات انتگرال فرد هولم از نوع دوم توجه زیادی را به خود جلب کرده‌اند و می‌توانند به صورت یکنواخت [۱، ۲] بیان شوند. معادله انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\psi(x) = h(x) + \int_a^b \psi(y)k(x, y)dy, \quad (1)$$

که در آن  $k(x, y)$  تابع هسته و  $\psi(x)$  تابع مجهول است. بسیاری از روشها (مانند روش نیستروم [۱]) برای حل این معادله انتگرالی توسعه یافته‌اند و عمدتاً به معادله انتگرالی با یک تابع هسته غیر نوسانی مربوط می‌شوند. با این حال، در بسیاری از زمینه‌ها مانند الکترومغناطیس و مکانیزم کوانتومی، پدیده نوسان در واقع به‌طور گسترده وجود دارد. اکنون معادله انتگرالی فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\psi(x) = h(x) + \int_a^b f(x, y)\psi(y)e^{i\omega g(x, y)}dy, \quad (2)$$

که در آن  $k(x, y) = f(x, y)e^{i\omega g(x, y)}$  تابع هسته نوسانی است، و معادله انتگرالی با توابع  $f, g, h$  و  $\psi$  هموار می‌شود. با افزایش بسامد، تابع هسته بیشتر و بیشتر نوسانی می‌شود. بنابراین، اگر قرار باشد این معادله انتگرال با یک روش مرسوم حل شود، نمونه‌های

<sup>1</sup>Email: Shimaahmadli1998@gmail.com

<sup>2</sup>Email: pouya.mahmoudi8092@gmail.com

بسیار ریز برای همگرایی روش مورد نیاز است و این ممکن است باعث شود که این روش از نظر محاسباتی گران باشد. در این حالت، توسعه یک روش حل سریع و دقیق برای این نوع از معادله انتگرالی حائز اهمیت است [۴،۳].

کلید حل این نوع معادله انتگرال چگونگی محاسبه صحیح و سریع انتگرال نوسانی است. در دهه‌های گذشته، برخی از روش‌های ارزیابی کارآمد برای انتگرال‌های نوسانی توسعه داده شده‌اند [۶،۵]، اما آنها عمدتاً موارد با توابع دامنه غیر نوسانی و توابع فاز در ارتباط هستند. با این حال، مرجع [۱۱] نشان می‌دهد که حل یک معادله انتگرال نوسانی نیز باید از نوع نوسانی باشد. این بدان معنی است که تابع مجهول  $\psi(x)$  در معادله (۲) نیز به شدت نوسانی است و روش‌های حل سریع موجود را نمی‌توان به‌طور مستقیم برای حل انتگرال درگیر به‌کار برد. خوشبختانه، در بسیاری از شرایط بهره‌عملی، نوسان تابع ناشناخته  $\psi(x)$  می‌تواند به خوبی استخراج شود، و نوسان استخراج شده را می‌توان بعداً به هسته موجود  $e^{i\omega g(x,y)}$  منتقل کرد تا یک هسته بسیار نوسانی دیگر تشکیل دهد. در این حالت معادله انتگرال نوسانی تبدیل شده یک تابع مجهول غیر نوسانی است و انتگرال نوسانی درگیر به یک تابع دامنه غیر نوسانی تبدیل می‌شود. در این مقاله، ما عمدتاً با معادلات انتگرال نوسانی تبدیل شده سروکار داریم، یعنی توابع  $f, g, h$  و  $\psi$  در مقایسه با تابع هسته نوسانی، بسیار کمتر نوسانی فرض می‌شوند.

در واقع، این تکنیک تبدیل کاربرد بسیار امیدبخشی در الکترومغناطیس محاسباتی و برخی زمینه‌های دیگر دارد. به‌عنوان مثال، در مطالعه مشخصات پراکندگی یک اسکاتر محدب، معادله انتگرال نوسانی زیر در مورد تابع مجهول  $\mu(\mathbf{r})$  برای توصیف رفتار پراکندگی پذیرفته شده است [۱۲].

$$\frac{1}{\gamma} \mu(\mathbf{r}) - \int_S \left[ \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{r})} + i\gamma G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] \mu(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') = \frac{\partial u^{inc}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{r})} + i\gamma u^{inc}(\mathbf{r}), \quad (3)$$

که در آن  $u^{inc}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$  موج صفحه‌ای فرودی،  $\mu(\mathbf{r}) = \partial u(\mathbf{r}) / \partial \mathbf{n}(\mathbf{r})$  جریان سطحی،  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  بردار نرمال واحد بیرونی در نقطه  $\mathbf{r}$  روی  $S$ ،  $\gamma$  یک ثابت کوپلینگ و  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = e^{i|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} / |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$  تابع گرین فضای آزاد است. در اینجا وجود تابع گرین باعث می‌شود که تابع هسته  $H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r})} + i\gamma G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  بسیار نوسانی باشد.

## ۲ یک روش حل سریع جدید برای معادلات انتگرال فردهولم از نوع نوسانی

### ۱.۲ شکل گسسته معادله انتگرال فردهولم

برای حل معادله انتگرال فردهولم باید به بیان تابع مجهول بپردازیم. با این حال، در بسیاری از شرایط مقادیر تابع حتی مفیدتر هستند. بنابراین، این مطالعه بر به دست آوردن مقادیر تابع  $\psi(x)$  بر روی گره‌های داده شده تمرکز می‌کند. اول، گسسته سازی معادله انتگرال روی گره‌های  $\{x_j\}_{j=0,1,\dots,M}$  داده شده:

$$\psi(x_j) = h(x_j) + \int_a^b f(x_j, y) \psi(y) e^{i\omega g(x_j, y)} dy. \quad (4)$$

بدیهی است که کلید حل این معادلات گسسته این است که چگونه انتگرال‌های نوسانی را به سرعت و با دقت محاسبه کنیم:

$$I_j[f, g] = \int_a^b f(x_j, y) \psi(y) e^{i\omega g(x_j, y)} dy, \quad j = 0, 1, \dots, M. \quad (5)$$

محاسبه این انتگرال‌ها با یک روش مرسوم، به ویژه در حالی که تکنیکی درگیر است، دشوار است. در اینجا، ابتدا بحثی کوتاه در مورد منحصر بفرد بودن انتگرال مطرح می‌کنیم.

### ۲.۲ یکتایی انتگرال

یک انتگرال منفرد یک انتگرال با انتگرال نامحدود در طول بازه است. حضور تکنیکی می‌تواند حتی چالش‌های بیشتری را برای محاسبه انتگرال‌های نوسانی ایجاد کند. در [۱۸]، ما یک تکنیکی خاص از انتگرال مقدار اصلی کوشی نوع نوسانی را مورد مطالعه قرار داده‌ایم:

$$I[f, \tau] = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{x - \tau} e^{i\omega g(x)} dx, \quad \tau \in (-1, 1).$$

این انتگرال را می‌توان به دو زیر انتگرال تقسیم کرد:

$$I[f, \tau] = \int_{-1}^1 \frac{f(x) - f(\tau)}{x - \tau} e^{i\omega g(x)} dx + f(\tau) \int_{-1}^1 \frac{e^{i\omega g(x)}}{x - \tau} dx, \quad (6)$$

مورد اول غیر منفرد است، بنابراین می‌تواند به‌عنوان یک انتگرال نوسانی منظم کنترل شود. مورد دوم منحصر بفرد است، اما یک نتیجه تحلیلی به شکل بسته دارد. در نتیجه انتگرال نوسانی منفرد به خوبی تعیین می‌شود.

### ۳.۲ محاسبه انتگرال‌های نوسانی

تلاش‌هایی در دهه‌های گذشته برای توسعه روش‌های راه‌حل خاص برای انتگرال‌های نوسانی صورت گرفته است، از جمله روش بسط مجانبی [۵]، روش لوین [۷،۶]، روش فیلون [۹،۸] و روش تندترین کاهش [۱۰] می‌باشند.

#### ۱.۳.۲ محاسبه انتگرال‌های نوسانی آزاد با نقطه فاز ثابت

روش پیشنهاد شده در [۱۷،۱۶] می‌تواند به‌طور مستقیم برای محاسبه انتگرال‌های نوسانی بدون نقطه فاز ثابت استفاده شود. با توجه به نظریه لوین، محاسبه یک انتگرال نوسانی مانند معادله (۵) می‌تواند به حل یک معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) بدون شرط مرزی کاهش یابد:

$$p'(y) + i\omega g'(x_j, y)p(y) = f(x_j, y)\psi(y), \quad (7)$$

اگر تابع مجهول  $p(y)$  از معادله (۷) حل شود، آنگاه نتیجه انتگرال به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$I_j = p(b)e^{i\omega g(x_j, b)} - p(a)e^{i\omega g(x_j, a)}, \quad (8)$$

در معادله [۱۶]، روش شبه طیفی چپیشف برای حل معادله دیفرانسیل (۷) به کار گرفته شده است و گره‌های مورد استفاده از نوع چپیشف لوباتو یعنی  $y_k = \frac{b-a}{\pi} \cos(\frac{\pi k}{N}) + \frac{b+a}{\pi}$ ،  $k = 0, 1, \dots, N$  هستند. اگر مقادیر تابع  $y = f(x)$  روی گره‌های داده شده یک بردار  $\mathbf{f}$  را تشکیل دهند، مقادیر تابع  $f'(x)$  روی این گره‌ها می‌توانند به خوبی توسط  $\mathbf{f}' = \mathbf{D}\mathbf{f}$  تقریب زده شوند. در نتیجه، استفاده از ماتریس تفکیک  $\mathbf{D}$  در معادله دیفرانسیل معمولی (۷) سیستم زیر را از معادلات خطی نتیجه می‌دهد:

$$\left( \frac{2}{b-a} \mathbf{D} + i\omega \sum_j \right) \mathbf{P}_j = \text{diag}(\mathbf{F}_j) \Phi, \quad (9)$$

که در آن

$\mathbf{P}_j = [p(y_0), \dots, p(y_N)]^T$ ،  $\Phi = [\psi(y_0), \dots, \psi(y_N)]^T$ ،  $\mathbf{F}_j = [f(x_j, y_0), \dots, f(x_j, y_N)]^T$  •  
از مقادیر مختلف تابع تشکیل شده‌اند.

$\sum_j = \text{diag}(g'(x_j, y_0), g'(x_j, y_1), \dots, g'(x_j, y_N))$  • یک ماتریس قطری است.

$\text{diag}(\mathbf{F}_j) \Phi = \mathbf{F}_j \otimes \Phi$  • برداری با ورودی‌های  $f(x_j, y_k)\psi(y_k)$ ،  $k = 0, 1, \dots, N$  می‌باشد.

همانطور که در [۱۶] گفته شد، معادله (۹) را می‌توان به خوبی با روش فاکتورگیری  $LU$  حل کرد در غیر این‌صورت روش تجزیه مقادیر تکین کوتاه شده می‌تواند به‌عنوان یک روش حل مناسب برای آن به کار برد. برای سادگی، ما به‌طور یکنواخت جواب معادله‌ی (۹) را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\mathbf{P}_j = \left( \frac{2}{b-a} \mathbf{D} + i \sum_j \right)^{-1} \text{diag}(\mathbf{F}_j) \Phi, \quad (10)$$

سپس با استفاده از (۸) و (۱۰) داریم:

$$I_j = \mathbf{Q}_j \mathbf{P}_j = \mathbf{Q}_j \left( \frac{2}{b-a} \mathbf{D} + i \sum_j \right)^{-1} \text{diag}(\mathbf{F}_j) \Phi, \quad (11)$$

که در آن  $\mathbf{Q}_j = [e^{i\omega g(x_j, b)}, \dots, -e^{i\omega g(x_j, a)}]$  برداری با ورودی‌های صفر به جز ورودی‌های اول و آخر است. از آنجا که ما فرض کرده‌ایم که  $f(x, y)$ ,  $g(x)$  و  $\psi$  همگی توابع هموار و غیر نوسانی هستند، تعداد کمی از گره‌ها برای درونیابی مناسب این توابع کافی هستند، این بدان معنی است که پیچیدگی محاسباتی (۱۱) بسیار کوچک است. همانطور که در بخش ۲/۵ نشان داده خواهد شد، این ویژگی کل پیچیدگی محاسباتی روش پیشنهادی روش را بسیار کوچک می‌کند.

### ۲.۳.۲ محاسبه انتگرال‌های نوسانی با نقطه فاز ثابت

ما تاثیر فاز ثابت را بر روی الگوریتم در [۱۷] مورد مطالعه قرار داده‌ایم. همان طور که گفته شد، اگر نقاط فاز ثابت در این بازه درگیر باشند و فرکانس به اندازه کافی بزرگ باشد، نتیجه انتگرال عمدتاً با ویژگی انتگرال و در اطراف نقاط فاز ایستا تعیین خواهد شد. برای مثال، اگر انتگرال  $I_j[f, g] = \int_a^b f(x_j, y) \psi(y) e^{i\omega g(x_j, y)} dy$  یک نقطه ثابت در نقطه  $y = \tau(x_j)$  داشته باشد، می‌تواند به دو انتگرال زیر تقسیم شود:

$$I_j[f, g] = \int_{\tau(x_j)}^b f(x_j, y) \psi(y) e^{i\omega g(x_j, y)} dy + \int_a^{\tau(x_j)} f(x_j, y) \psi(y) e^{i\omega g(x_j, y)} dy \triangleq I_j^+ + I_j^-,$$

سپس هر یک از آن‌ها را می‌توان با تعداد نسبتاً کمی گره به خوبی محاسبه کرد، زیرا نقطه فاز ثابت در نقاط پایانی قرار دارد. برای هر انتگرال جدید، باید گره‌های جدید را در زیر-فاصله مشخص کنیم و آن‌ها عموماً متفاوت از گره‌های جهانی هستند. در میان روش‌های درونیابی، درونیابی با محور بسیار پایدار و دقیق می‌باشد [۲۳، ۲۴]. برای یک تابع  $u = u(x)$  زمانی که گره‌ها و مقادیر تابع روی آن‌ها به صورت  $\{(\zeta, u(\zeta))\}_{j=0,1,\dots,n}$  داده می‌شوند، مقدار تابع در یک نقطه داخلی ثابت را می‌توان به صورت زیر درونیابی کرد:

$$u(\zeta) = \frac{\sum_{j=0}^n \frac{\varpi_j}{\zeta - \zeta_j} u(\zeta_j)}{\sum_{j=0}^n \frac{\varpi_j}{\zeta - \zeta_j}}, \quad (12)$$

که در آن  $\varpi_j$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varpi_j = \frac{1}{\prod_{k \neq j} (\zeta - \zeta_k)}, \quad j, k = 0, 1, \dots, n,$$

که گره‌های مورد استفاده از نوع چیشیف لوباتو هستند، بنابراین می‌توان وزن‌های بالا را به صورت زیر ساده‌سازی کرد:

$$\varpi_j = (-1)^j \delta_j, \quad \delta_j = \begin{cases} \frac{1}{j}, & j = 0 \text{ or } j = n, \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

از معادله (۱۲) مشاهده می‌شود که مقدار تابع درونیابی شده را می‌توان به شکل ماتریسی زیر بیان کرد:

$$u(\xi) = [l_0(\xi), l_1(\xi), \dots, l_n(\xi)] [u_0(\xi), u_1(\xi), \dots, u_n(\xi)]^T,$$

که در آن ضرایب

$$l_j = \frac{\frac{\varpi_j}{\zeta - \zeta_j}}{\sum_{j=0}^n \frac{\varpi_j}{\zeta - \zeta_j}}$$

هستند. در نتیجه، مقادیر تابع در گره‌های  $v + 1$  جدید  $(\xi'_k, k = 0, 1, \dots, v)$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} u(\xi'_0) \\ u(\xi'_1) \\ \vdots \\ u(\xi'_v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_0(\xi'_0) & l_1(\xi'_0) & \dots & l_n(\xi'_0) \\ l_0(\xi'_1) & l_1(\xi'_1) & \dots & l_n(\xi'_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_0(\xi'_v) & l_1(\xi'_v) & \dots & l_n(\xi'_v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(\zeta_0) \\ u(\zeta_1) \\ \vdots \\ u(\zeta_n) \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{L}\mathbf{Y}.$$

فرض می‌کنیم که گره‌های جدید در دو زیر فاصله به ترتیب

$$y_t^1 = \frac{b - \tau(x_j)}{\gamma} \cos\left(\frac{\pi t}{N_1}\right) + \frac{b + \tau(x_j)}{\gamma}, \quad t = 0, 1, \dots, N_1,$$

و

$$y_t^2 = \frac{\tau(x_j) - a}{\gamma} \cos\left(\frac{\pi t}{N_2}\right) + \frac{\tau(x_j) - a}{\gamma}, \quad t = 0, 1, \dots, N_2,$$

هستند، اگر آن‌ها متفاوت از گره‌های جهانی  $y_k = \frac{b-a}{\gamma} \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right) + \frac{b+a}{\gamma}, k = 0, 1, \dots, N$  باشند آنگاه مقادیر تابع درون‌یابی شده به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \psi(y_0^1) \\ \psi(y_1^1) \\ \vdots \\ \psi(y_{N_1}^1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_0(y_0^1) & l_1(y_0^1) & \dots & l_n(y_0^1) \\ l_0(y_1^1) & l_1(y_1^1) & \dots & l_n(y_1^1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_0(y_{N_1}^1) & l_1(y_{N_1}^1) & \dots & l_n(y_{N_1}^1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi(y_0) \\ \psi(y_1) \\ \vdots \\ \psi(y_N) \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{L}_1 \Phi$$

و

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} \psi(y_0^2) \\ \psi(y_1^2) \\ \vdots \\ \psi(y_{N_2}^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_0(y_0^2) & l_1(y_0^2) & \dots & l_n(y_0^2) \\ l_0(y_1^2) & l_1(y_1^2) & \dots & l_n(y_1^2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_0(y_{N_2}^2) & l_1(y_{N_2}^2) & \dots & l_n(y_{N_2}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi(y_0) \\ \psi(y_1) \\ \vdots \\ \psi(y_N) \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{L}_2 \Phi.$$

پس از آن‌که مقادیر تابع درون‌یابی در زیر بازه‌ها به دست آمدند، نتایج انتگرال  $I_j^1$  و  $I_j^2$  را می‌توان به همان روش (۱۱) به دست آورد. برای مثال انتگرال  $I_j^1$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

(۱۳)

$$I_j^1 = \mathbf{Q}_j^1 \left( \frac{\gamma}{b - \tau(x_j)} \mathbf{D}_{N_1} + i\omega \sum_j^1 \right)^{-1} \text{diag}(\mathbf{F}_j^1) \Phi_1 = \mathbf{Q}_j^1 \left( \frac{\gamma}{b - \tau(x_j)} \mathbf{D}_{N_1} + i\omega \sum_j^1 \right)^{-1} \text{diag}(\mathbf{F}_j^1) \mathbf{L}_1 \Phi,$$

که در آن:

$$\mathbf{Q}_j^1 = [e^{i\omega g(x_j, b)}, 0, \dots, 0, -e^{i\omega g(x_j, \tau(x_j))}] \bullet$$

$$\sum_j^1 = \text{diag} \left( g'(x_j, y_0^1), g'(x_j, y_1^1), \dots, g'(x_j, y_{N_1}^1) \right) \bullet$$

$\mathbf{D}_{N_1}$  ماتریس تفکیک چیشف از مرتبه  $N_1 + 1$  است.

$$\mathbf{F}_j^1 = [f(x_j, y_0^1), f(x_j, y_1^1), \dots, f(x_j, y_{N_1}^1)] \bullet$$

می‌شود:

(۱۴)

$$I_j = I_j^1 + I_j^2 = \left[ \mathbf{Q}_j^1 \left( \frac{\gamma}{b - \tau(x_j)} \mathbf{D}_{N_1} + i\omega \sum_j^1 \right)^{-1} \text{diag}(\mathbf{F}_j^1) \mathbf{L}_1 + \mathbf{Q}_j^2 \left( \frac{\gamma}{\tau(x_j) - a} \mathbf{D}_{N_2} + i\omega \sum_j^2 \right)^{-1} \text{diag}(\mathbf{F}_j^2) \mathbf{L}_2 \right] \Phi.$$

لازم به ذکر است که اگر یک نقطه فاز ثابت درگیر باشد، وضعیت می‌تواند بسیار ساده‌تر باشد. در این وضعیت نقطه فاز ثابت  $y = \tau$  و سپس ماتریس‌های درون‌یابی  $\mathbf{L}_1$  و  $\mathbf{L}_2$  بدون تغییر باقی می‌مانند. بخش بعدی معادلات انتگرال گسسته (۴) را با استفاده از نتایج به دست آمده در (۱۱) و (۱۴) حل کند.

## ۴.۲ حل تابع مجهول از معادلات گسسته

در معادلات (۱۱) و (۱۴) نتیجه یک انتگرال نوسانی به شکل ماتریسی بیان شده است. برای راحتی توصیف، ما به طور یکنواخت آن‌ها را با موارد زیر نشان می‌دهیم:

$$I_j = U_j \Phi, \quad (15)$$

که در آن  $U_j \in \mathbb{C}^{1 \times (N+1)}$  و  $\Phi \in \mathbb{C}^{(N+1) \times 1}$  می‌باشد. به عبارت دیگر، اگر هیچ نقطه فاز ثابت درگیر نباشد، آنگاه داریم:

$$U_j = Q_j \left( \frac{\gamma}{b-a} D + iw \sum_j \right)^{-1} \text{diag}(F_j), \quad (16)$$

و اگر یک نقطه فاز ثابت درگیر باشد، آنگاه داریم:

$$U_j = Q_j^1 \left( \frac{\gamma}{b-\tau(x_j)} D_{N_1} + iw \sum_j^1 \right)^{-1} \text{diag}(F_j^1) L_1 + Q_j^2 \left( \frac{\gamma}{\tau(x_j)-a} D_{N_2} + iw \sum_j^2 \right)^{-1} \text{diag}(F_j^2) L_2. \quad (17)$$

حالت نقاط فاز ثابت چندگانه، عبارت مشابهی دارد. در نتیجه، با جایگزین کردن نتیجه انتگرال (۱۵) در معادله (۴) شکل ماتریسی معادله گسسته به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\psi(x_j) = h(x_j) + U_j \Phi. \quad (18)$$

در معادله (۱۸) مقادیر تابع ناشناخته  $\Phi$  براساس گره‌های چپیشف لوباتو در جهت  $y$  است:  $y_k = \frac{b-a}{\gamma} \cos(\frac{\pi k}{N}) + \frac{b+a}{\gamma}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ . بنابراین برای یک  $j$  متفاوت در (۱۸) به یک معادله خطی متفاوت منتهی می‌شود، سپس ترکیب آن‌ها به صورت سیستم خطی معادلات زیر تبدیل می‌شود:

$$\Phi = H + U \Phi, \quad (19)$$

که در آن

$$U = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(N+1) \times (N+1)}, \quad H = \begin{bmatrix} h(x_0) \\ h(x_1) \\ \vdots \\ h(x_N) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(N+1) \times 1},$$

در نهایت، سیستم معادله خطی (۱۹) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$(I - U) \Phi = H. \quad (20)$$

## ۳ نتایج عددی

در این بخش، یک مثال برای نشان دادن عملکرد روش حاضر ارائه شده است. اولی بدون نقطه فاز ثابت، دومی دارای یک نقطه فاز ثابت می‌باشند. برای یک معادله انتگرال نوسانی معمولاً به دست آوردن جواب آن به شکل بسته ممکن نیست، به منظور امکان پذیر کردن تجزیه و تحلیل، مثال‌های عددی به روش زیر پیش می‌روند:

• ابتدا، توابع  $\psi(x)$ ,  $g(x, y)$  و انتگرال به صورت  $\int_a^b f(x, y) \psi(x) e^{iwg(x, y)} dy = p(x, y) e^{iwg(x, y)}$  داده می‌شود، سپس توابع  $f(x, y)$  و  $h(x)$  را می‌توان به صورت زیر ساخت:

$$f(x, y) = \frac{p'_y(x, y) + iw p(x, y) g'_y(x, y)}{\psi(y)},$$

و

$$\psi(x) - p(x, b)e^{iwg(x, b)} + p(x, a)e^{iwg(x, a)}.$$

- دوم، یک معادله انتگرال نوسانی با استفاده از توابع حاصل  $f(x, y), h(x)$  و توابع داده شده  $g(x, y)$  ایجاد می‌کنیم، این معادله انتگرالی شکل (۵) را دارد و جواب دقیق آن باید  $\psi(x)$  باشد.
  - سوم، به صورت عددی تابع مجهول  $\psi(x)$  از معادله انتگرال حاصل با روش پیشنهادی را نشان می‌دهیم، سپس مقایسه بین جواب عددی و  $\psi(x)$  دقیق منجر به خطای نسبی می‌شود.
- در ابتدا یک معادله انتگرال نوسانی که بدون نقطه فاز ثابت است را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱.۰۳. معادله انتگرال نوسانی

$$\psi(x) = h(x) + \int_a^b f(x, y)\psi(x)e^{iwg(x, y)} dy,$$

که در آن

$$g(x, y) = x^2/20 + (y + 6/5)^2,$$

$$h(x) = 1 + (x - 1/2)^2 \cos(10x) - e^{-x^2 - y^2} [e^{iw(x^2/20 + 121/25)} - e^{iw(x^2/20 + 1/25)}],$$

و

$$f(x, y) = \frac{-28^3 + iw(2y + 12/5)}{1 + (y - 1/2)^2 \cos(10y)} e^{-x^2 - y^2}.$$

جواب دقیق این معادله انتگرال  $\psi(x) = 1 + (x - 1/2)^2 \cos(10x)$  است. بدیهی است که انتگرال نوسانی  $\int_{-1}^1 f(x_j, y)\psi(y)e^{iwg(x_j, y)}$  از نقطه فاز ثابت در جهت  $y$  آزاد است.

برای روش‌های مرسوم، نوسان بالای  $e^{iwg(x, y)}$  حل معادله انتگرال را با بازده بالا دشوار می‌سازد. اما برای روش حاضر، هم سرعت محاسباتی سریع و هم نتایج دقیق را می‌توان به دست آورد. ما عملکرد آن را به دو روش زیر نشان می‌دهیم:

- برای  $w$  ثابت و  $N$  متفاوت، خطاهای نسبی ( $E_r$ ) بر روی گره‌ها در شکل ۱(a).
  - برای  $N$  ثابت و  $w$  متفاوت، خطاهای نسبی ( $E_r$ ) بر روی گره‌ها در شکل ۱(b).
- در اینجا خطای نسبی به صورت  $E_r = |\psi_{num}/\psi - 1|$  که  $\psi_{num}$  نشان‌دهنده نتیجه عددی است. از شکل ۱، دو پدیده مشاهده می‌شود:

۱. شکل ۱(a)، نشان می‌دهد که برای یک فرکانس ثابت ( $w = 100$ ) با افزایش تعداد گره‌ها، خطای نسبی کوچکتر و کوچکتر می‌شود. ۲. در شکل ۱(b)، مشاهده می‌شود که برای تعداد ثابتی از گره‌ها ( $N = 30$ ) خطای نسبی با افزایش فرکانس از بین می‌رود. برای یک روش مرسوم، دقت با گره‌های ثابت باید با افزایش فرکانس بدتر و بدتر شود، اما در روش حاضر، یک روند معکوس مشاهده می‌شود. علت ریشه‌ای این پدیده این است که خطای روش مربع سازی بهبود یافته لوین ( $O(w^{-2})[5]$ ) دارای مرتبه مجانبی بالاتری نسبت به خود نتیجه انتگرال است ( $O(w^{-1})[5, 7]$ ). به عبارت دیگر، خطا سریع‌تر از نتیجه انتگرال کاهش می‌یابد. مثال فوق عملکرد خوب روش پیشنهادی را زمانی نشان می‌دهد که معادله انتگرالی بدون نقاط فاز ثابت باشد. مثال زیر را با با نقاط فاز ثابت را بررسی می‌کنیم.

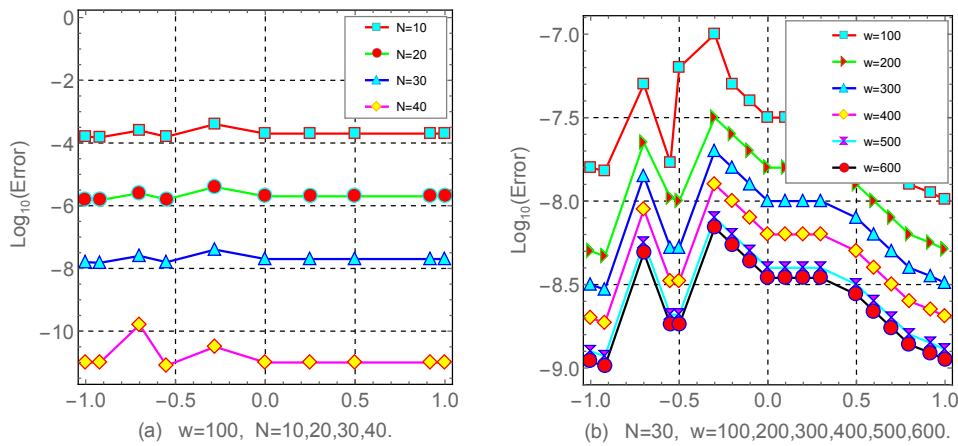
مثال ۲.۰۳. معادله انتگرال نوسانی

$$\psi(x) = h(x) + \int_a^b f(x, y)\psi(x)e^{iwg(x, y)} dy,$$

که در آن

$$g(x, y) = x^2/20 + (y - 3)^2,$$

$$h(x) = 1 + \frac{\sin(5x)}{x^2 + 1/5} - e^{-2x^2 - 6} [e^{iw(x^2/20 + 49/100)} - e^{iw(x^2/20 + 169/100)}],$$



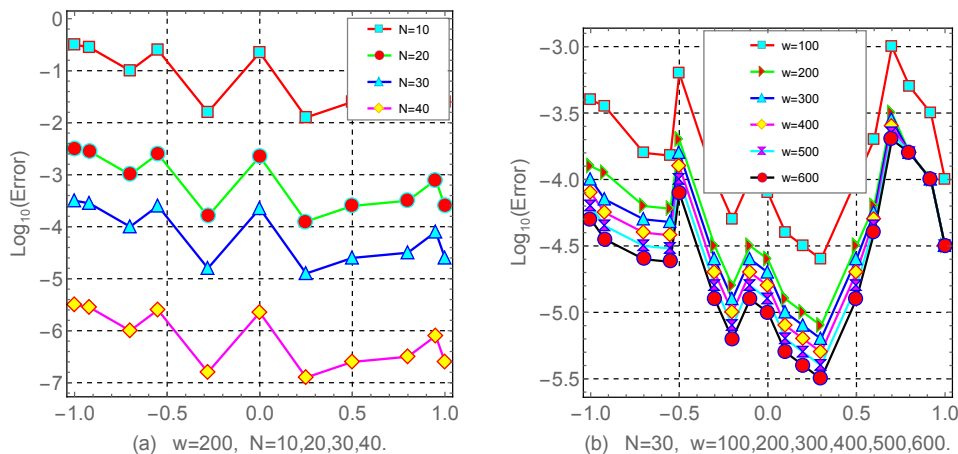
شکل ۱: روش پیشنهادی برای معادلات انتگرال نوسانی بدون نقطه ثابت.

و

$$f(x, y) = \frac{-12y + iw(2y - 3/5)}{1 + \sin(5y)/(y^2 + 1/5)} e^{-2x^2 - 6y^2}$$

جواب دقیق این معادله انتگرال  $\psi(x) = 1 + \frac{\sin(5x)}{x^2 + 1/5}$  است. بدیهی است که انتگرال نوسانی یک نقطه فاز ثابت  $\tau = 3$  در بازه  $[-1, 1]$  دارد. با توجه به موقعیت نقطه فاز ثابت، بازه هدف را به دو بازه فرعی تقسیم می‌کنیم:  $[3, 1]$  و  $[-1, 3]$  و گره‌های چیشف لوباتورا به هر کدام از آن‌ها اختصاص می‌دهیم. بدیهی است که ماتریس‌های  $L_1$  و  $L_2$  در این مثال تنها یک‌بار باید محاسبه شوند، زیرا نقطه فاز ثابت است. عملکرد روش پیشنهادی در شکل ۲ نشان داده شده است.

در شکل ۲ مشاهده می‌شود که خطای نسبی با افزایش تعداد گره‌های  $N$  از بین می‌رود. در عین حال، خطای نسبی روش حاضر نیز با افزایش فرکانس از بین می‌رود.



شکل ۲: روش پیشنهادی برای معادلات انتگرال نوسانی با نقطه ثابت.

## ۴ نتیجه‌گیری

یک روش حل برای انتگرال‌های نوسانی براساس توسعه یک روش توسعه یافته لوبین برای انتگرال‌های نوسانی ارائه شده است. این روش مزایای دقیق بودن و داشتن سرعت محاسباتی سریع را دارد. این امر می‌تواند سهم مثبتی در حل سریع معادلات انتگرال نوسانی ناشی از مطالعه پراکندگی و دیگر زمینه‌های مرتبط داشته باشد. در این مقاله، معادلات انتگرال نوسانی یک بعدی در نظر گرفته شده‌اند. با این حال، در مسائل فیزیکی عملی (مانند پراکندگی الکترومغناطیسی)، معادلات انتگرالی عموماً به شکل‌های چند بعدی هستند، بنابراین گسترش این روش از یک بعد به چند بعد حائز اهمیت است.



- [1] L. Furong, W. Jing, An interpolation-based adaptive solution method for Fredholm integral equations of the second kind, *Journal of Natural Science of HeiLongJiang University* 21 (4) (2004) 17–21.
- [2] Chandler-Wilde, S.N., Graham, I.G., Langdon, S., Spence, E.A.: Numerical asymptotic boundary integral methods in high-frequency acoustic scattering. *Acta Numerica* 21, 89–305 (2012).
- [3] W.C. Chew, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1990.
- [4] R.F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, IEEE Press, New York, 2001.
- [5] A. Iserles, S.P. Nørsett, Efficient quadrature of highly oscillatory integrals using derivatives, *Proceedings of the Royal Society* 461 (2005) 1383–1399.
- [6] D. Levin, Procedures for computing one and two dimensional integrals of functions with rapid irregular oscillations, *Mathematics of Computation* 38 (158) (1982) 531–538.
- [7] S. Olver, Moment-free numerical integration of highly oscillatory functions, *IMA Journal of Numerical Analysis* 26 (2) (2006) 213–227.
- [8] L.N.G. Filon, On a Quadrature Formula for Trigonometric Integrals, in: *Proc. Roy. Soc.*, vol. 49, Edinburgh, 1928, pp. 38–47.
- [9] S. Olver, Numerical approximation of highly oscillatory integrals, Ph.D. Thesis, University of Cambridge, 2008.
- [10] D. Huybrechs, On the evaluation of highly oscillatory integrals by analytic continuation, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 44 (3) (2006) 1026–1048.
- [11] F. Ursell, Integral equations with a rapidly oscillating kernel, *Journal of the London Mathematical Society* 44 (1969) 449–459.
- [12] O. Bruno, C. Geuzaine, J. Jr Monro, R.F, Prescribed error tolerances within fixed computational times for scattering problems of arbitrarily high frequency: the convex case, *Royal Society of London Transactions Series A* 362 (1816) (2004) 629–645.
- [13] C. Geuzaine, O. Bruno, F. Reitich, On the  $O(1)$  solution of multiple-scattering problems, *IEEE Transactions on Magnetics* 41 (5) (2005) 1488–1491.
- [14] D. Huybrechs, S. Vandewalle, A sparse discretisation for integral equation formulations of high frequency scattering problems, *Tech. Rep.*, M.U. Leuven, 2006.
- [15] D. Colton, R. Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Springer, New York, 1998.
- [16] J. Li, X. Wang, T. Wang, A universal solution to one-dimensional highly oscillatory integrals, *Science in China* 51 (10) (2008) 1614–1622.
- [17] J. Li, X. Wang, T. Wang, C. Shen, Delaminating quadrature method for multi-dimensional highly oscillatory integrals, *Applied Mathematics and Computation* 209 (2) (2009) 327–338.
- [18] J. Li, X. Wang, T. Wang, Evaluation of Cauchy principal value integrals of oscillatory kind, *Applied Mathematics and Computation*, Revised.
- [19] G.A. Evans, J.R. Webster, A comparison of some methods for the evaluation of highly oscillatory integrals, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 112 (1999) 55–69.

- [20] Elsayed M.E. Elbarbarya, Salah M. El-Sayed, Higher order pseudospectral differentiation matrices, *Applied Numerical Mathematics* 55 (2005) 425–438.
- [21] L.N. Trefethen, *Spectral Methods in Matlab*, SIAM, Philadelphia, 2000.
- [22] S. Xiang, Efficient quadrature for highly oscillatory integrals involving critical points, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 26 (2007) 688–698.
- [23] D. Kincaid, W. Cheney, *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*, Brooks/Cole, Pacific Grove, 2002.
- [24] J. Berrut, L.N. Trefethen, Barycentric lagrange interpolation, *SIAM Review* 46 (3) (2004) 501–517.
- [25] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1978.