کاربرد روش های ساده ترین معادله اصلاح شده جفتی و کودریاشف جفتی در حل دستگاه معادلات برگرز

زینب آیاتی [*,۱]

۱- استادیار دانشگاه گیلان، گیلان، رودسر، دانشکده فنی شرق گیلان، گروه علوم مهندسی

چکیده:

به دست آوردن جواب دقیق دستگاه معادلات با مشتقات جزیی یکی از موضوعات مورد توجه در سالهای اخیر بوده است. در این مقاله دو مورد از روش‌های بسیار پرکاربرد به نام روش ساده ترین معادله و روش کودریاشف برای حل چنین دستگاههایی تعمیم داده شده و به عنوان مثال برای به دست آوردن جواب های دقیق دستگاه معادلات برگرز مورد استفاده قرار گرفته است. نمودار انواع جواب های به دست آمده رسم شده است.

کلمات کلیدی: جواب دقیق، دستگاه معادلات، روش ساده ترین معادله، معادله برگرز، روش کودریاشف.

۱. مقدمه

در سالهای اخیر به دست آوردن جواب های تقریبی و دقیق دستگاه معادلات با مشتقات جریی در علوم مختلف مانند ریاضی، مهندسی، فیزیک و ... مورد توجه بسیاری از محققین و دانشمندان قرار گرفته است. روش های متعددی در طی سالهای گذشته مطرح شده و مورد استفاده قرار گرفته است از جمله روش آشفتگی هوموتوپی، روش تغییرات وردشی، روش توابع نمایی، روش بسط G'/G، و ....

یکی از روش های موفق برای یافتن پاسخ دقیق معادلات دیفرانسیل غیرخطی، روش ساده ترین معادله (SEM) است. در این روش جواب معادله به صورت یک سری از یک تابع مجهول و مشتق آن بدون هیچ شرط یا قیدی برای تابع مجهول در نظر گرفته می شود. روش ساده ترین معادله توسط کودریاشوف در [1-3] ارائه شد و روش های اصلاح شده آن برای حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل جزیی استفاده شده است.

دومین روش محبوب و تاثیرگذار برای بدست آوردن انواع مختلف جواب های معادلات دیفرانسیل جزیی که در مقاله حاضر مورد بررسی قرار گرفته است، روش کودریاشف است که در [4-7] معرفی شده است. روش کودریاشف به ما اجازه می‌دهد تا جواب دقیق را برای طیف وسیعی از معادلات دیفرانسیل جزیی و معمولی غیرخطی پیدا کنیم. مفهوم اساسی روش فوق، استفاده از شکل خاصی از تابع است که مشتقات آن بر اساس همان تابع محاسبه می شود.

در این مقاله، یک تعمیم از این روش ها برای حل دستگاه معادلات برگرز به شکل زیر مورد استفاده قرار گرفته است.

$$\begin{cases} u_t - 2uu_x - u_{xx} - u_{yy} - 2vu_y = 0, \\ v_t - 2vv_x - v_{xx} - v_{yy} - 2vv_y = 0. \end{cases} \tag{1}$$

* Corresponding author: توضیحات مربوط به نویسنده اوّل

Email:

۲. روش ساده ترین معادله اصلاح شده جفتی و کودریاشف جفتی

برای توضیح روش ساده ترین معادله تعمیم یافته، دستگاه معادلات دیفرانسیل جزیی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} F\left(u, \mathrm{v}, u_x, u_t, v_x, v_t, \ldots\right) = 0, \\ G\left(u, \mathrm{v}, u_x, u_t, v_x, v_t, \ldots\right) = 0. \end{cases}$$

با در نظر گرفتن $\xi = \delta x - \rho t$ ، دستگاه معادلات بالا، به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی به شکل زیر تبدیل می شود.

$$\begin{cases} f\left(u, \mathrm{v}, u', v', \ldots\right) = 0, \\ g\left(u, \mathrm{v}, u', v', \ldots\right) = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

در این روش، شکل کلی جواب دستگاه به صورت زیر در نظر گرفته می شود

$$\begin{cases} u(\xi) = \sum_{i=0}^{N} a_i \left(\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)}\right)^i, \\ v(\xi) = \sum_{i=0}^{M} b_i \left(\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)}\right)^i, \end{cases} \qquad (3)$$

که در آن a_i ها و b_iها پارامترهای مجهول هستند. M و N را می توان با ایجاد توازن بین جمله با بالاترین مرتبه مشتق مرتبه و بالاترین مرتبه غیر خطی در (۲) به دست آورد. با قرار دادن معادله (۳) در معادله (۲) ، یک چند جمله ای بر حسب $\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)}$ به دست می آید. با صفر در نظر گرفتن ضرایب $\varphi^{-i}(\xi)$ ، یک دستگاه معادلات جبری شامل پارامترهای مجهول، $\varphi(\xi)$ و $\varphi'(\xi)$ نتیجه می شود. . در نهایت با جایگزینی مقادیر تعیین شده از حل دستگاه مذکور در معادله (۳) ، جواب های معادله (۱) به دست خواهند آمد.

برای استفاده از روش کودریاشف جفتی، جواب معادله (۲) به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$\begin{cases} u(\xi) = \sum_{i=0}^{N} a_i \varphi^i(\xi), \\ v(\xi) = \sum_{i=0}^{M} b_i \varphi^i(\xi). \end{cases} \qquad (4)$$

که در آن a_i ها و b_iها پارامترهای مجهول هستند. M و N را می توان با ایجاد توازن بین جمله با بالاترین مرتبه مشتق مرتبه و بالاترین مرتبه غیر خطی در (۲) به دست آورد و $\varphi(\xi)$ به شکل زیر است

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{1 + de^{\xi}}$$

و در معادله زیر صدق می کند

$$\varphi'(\xi) = \varphi^2(\xi) - \varphi(\xi),$$

جایگذاری جواب (۴) در معادله (۲) به دستگاه زیر منجر می شود

$$\begin{cases} F(\varphi(\xi)) = 0, \\ G(\varphi(\xi)) = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

که $F(\varphi(\xi))$ و $G(\varphi(\xi))$ چند جمله ای هایی بر حسب $\varphi(\xi)$ هستند. با صفر درنظر گرفتن ضرایب هر یک از توانهای $\varphi(\xi)$ در (۵) یک دستگاه معادلات جبری برای پیداکردن مجهولات به دست می آید و با جایگذاری نتایج به دست آمده در (۴)، جواب معادله حاصل می شود.

۳. حل دستگاه معادلات برگرز به روش ساده ترین معادله اصلاح شده جفتی

برای به کار بردن روش بیان شده در این مقاله روی دستگاه (۱)، با در نظرگرفتن تبدیل $\xi=\delta x-\rho t+\lambda y$، دستگاه (۱) به صورت زیر نوشته می شود.

$$\begin{cases}\rho U'+2\delta UU'+(\delta^2+\lambda^2)U''+2\lambda VU'=0,\\ \rho V'+2\delta UV'+(\delta^2+\lambda^2)V''+2\lambda VV'=0.\end{cases} \qquad (6)$$

فرض می کنیم دستگاه فوق جوابی به صورت (۳) داشته باشد. با موازنه کردن جملات خطی و غیر خطی از بالاترین درجه خواهیم داشت

$$M=1,\ N=1.$$

بنابراین جواب معادله به صورت زیر درنظر گرفته می شود

$$\begin{cases}u(\xi)=a_0+a_1\left(\dfrac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)}\right),\\ v(\xi)=b_0+b_1\left(\dfrac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)}\right),\end{cases} \qquad (7)$$

با جایگذاری رابطه (۷) در دستگاه معادلات(۶) و برابر صفر قرار دادن ضرایب $\varphi^{-i}(\xi)$ خواهیم داشت

$$(\delta^2+\lambda^2)\varphi'''+(2\lambda b_0+2\delta a_0+\rho)\varphi''=0, \qquad (8)$$

$$(2\delta a_0+2\lambda b_0+\rho)\varphi'^2+(3(\lambda^2+\delta^2)-2b_1\lambda-2\delta a_1))\varphi'\varphi''=0, \qquad (9)$$

$$(b_1\lambda+\delta a_1-(\lambda^2+\delta^2))\varphi'^3=0 \qquad (10)$$

از معادله (۱۰) داریم

$$a_1=\frac{\lambda^2+\delta^2-b_1\lambda}{\delta} \qquad (11)$$

با جایگذاری (۱۱) در (۹) به معادله زیر می رسیم

$$(2\delta a_0+2\lambda b_0+\rho)\varphi'+(\lambda^2+\delta^2)\varphi''=0, \qquad (12)$$

با حل معادلات (۸) و (۱۲) خواهیم داشت

$$\varphi'=Ae^{-\frac{2\delta a_0+2\lambda b_0+\rho}{\lambda^2+\delta^2}\xi}$$

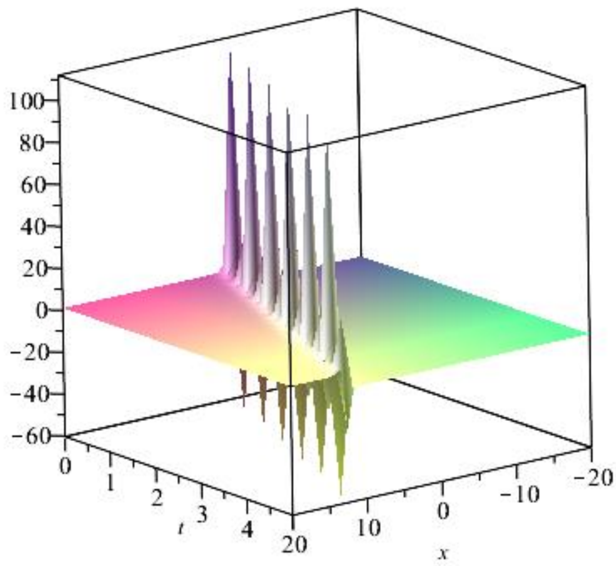
لذا تابع $\varphi(\xi)$ به صورت زیر به دست می آید

$$\varphi=-\frac{A(\lambda^2+\delta^2)}{2\delta a_0+2\lambda b_0+\rho}e^{-\frac{2\delta a_0+2\lambda b_0+\rho}{\lambda^2+\delta^2}\xi}+B,$$

با جایگذاری $\varphi(\xi)$ و $\varphi'(\xi)$ در (۷)، جواب دستگاه معادلات (۱) به صورت زیر به دست خواهد آمد

$$\begin{cases} u(\xi)=a_0+\dfrac{A(\lambda^2+\delta^2-b_1\lambda)(2\delta a_0+2\lambda b_0+\rho)e^{-\frac{2\delta a_0+2\lambda b_0+\rho}{\lambda^2+\delta^2}\xi}}{-A\delta(\lambda^2+\delta^2)e^{-\frac{2\delta a_0+2\lambda b_0+\rho}{\lambda^2+\delta^2}\xi}+B\delta(2\delta a_0+2\lambda b_0+\rho)}, \\ v(\xi)=b_0+\dfrac{Ab_1(2\delta a_0+2\lambda b_0+\rho)e^{-\frac{2\delta a_0+2\lambda b_0+\rho}{\lambda^2+\delta^2}\xi}}{-A(\lambda^2+\delta^2)e^{-\frac{2\delta a_0+2\lambda b_0+\rho}{\lambda^2+\delta^2}\xi}+B(2\delta a_0+2\lambda b_0+\rho)}, \end{cases}$$

که $\xi=\delta x-\rho t+\lambda y$. نمودار جواب به ازای مقادیر خاص پارامترها در شکل (۱) آمده است



شکل ۱ – جواب دستگاه (۱) برای $u(x,1,t)$ به ازای $\delta=1,\lambda=2,\rho=3,A=B=a_0=b_0=1,\ b_1=1$

۴. حل دستگاه معادلات برگرز به روش کودریاشف جفتی

برای به دست آوردن جواب دقیق دستگاه برگرز به روش کودریاشف، جواب دستگاه (۶) را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\begin{cases} q(\varepsilon)=a_0+a_1\varphi(\xi), \\ p(\varepsilon)=b_0+b_1\varphi(\xi). \end{cases} \tag{13}$$

با جایگذاری رابطه (۱۳) در معادلات (۶) و صفر قرار دادن ضرایب $\varphi(\xi)$ داریم

$$\delta^2-2\delta a_0+\lambda^2-2\lambda b_0-\rho=0,$$
$$-\delta^2+2\delta a_0-3\lambda^2+2\lambda b_0+\rho-2b_1\lambda-2\delta(\delta+a_1)=0,$$
$$2\lambda^2+2b_1\lambda+2\delta(\delta+a_1)=0$$

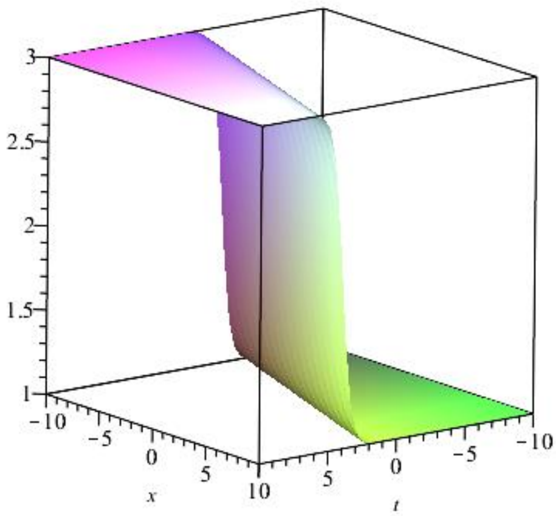
حل دستگاه بالا به کمک نرم افزار میپل نتایج زیر را دربردارد

$$b_0=\frac{1}{2}\frac{\delta^2-2\delta a_0+\lambda^2-\rho}{\lambda},\ b_1=-\frac{\delta^2+\delta a_1+\lambda^2}{\lambda}$$

بنابراین جواب دستگاه معادلات برگرز به صورت زیر به دست می آید

$$\begin{cases} u(x,y,t)=a_0+\dfrac{a_1}{1+de^{\delta x-\rho t+\lambda y}}, \\ v(x,y,t)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\delta^2-2\delta a_0+\lambda^2-\rho}{\lambda}-\dfrac{\delta^2+\delta a_1+\lambda^2}{\lambda(1+de^{\delta x-\rho t+\lambda y})}. \end{cases}$$

نمودار جواب به ازای پارامترهای مختلف در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲ – جواب دستگاه (۱) به روش کودریاشف برای $u(x,1,t)$ به ازای
$\delta=1, \lambda=2, \rho=3, d=1, a_0=1,\ a_1=2$

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، اصلاحات جدید دو روش شناخته‌شده برای رسیدن به جواب های دستگاه های معادلات با مشتقات جزیی به نام روش کودریاشوف جفتی و معادله ساده اصلاح‌شده جفتی ارایه شده اند. پیاده سازی این روش ها برای حل دستگاه

های معادلات با مشتقات جریی به طور مستقیم یک تلاش نوآورانه است. بنابراین، تمام سیستم هایی که نمی توانند به یک معادله تقلیل پیدا کنند، با این روش ها به راحتی قابل حل هستند. دستگاهمعادلات دوبعدی برگرز (STDBE) با روش‌های ذکر شده در بالا حل شده است. نتایج نشان می دهد که تکنیک ها ابزار مفیدی برای به دست آوردن جواب های دقیق این گونه دستگاه ها هستند. نتایج نشان می‌دهد که جواب های به‌دست‌آمده از روش معادله ساده اصلاح‌شده جفت شده و روش کودریاشوف جفت شده یکسان هستند .

۶. مراجع

[1] N.A. Kudryashov, Exact soliton solutions of the generalized evolution equation of wave dynamics, *J. Appl. Math. Mech.* 52 (1988) 361–365.

[2] N.A. Kudryashov, On types of nonlinear non integrable differential equations with exact solutions, *Phys. Lett. A* 155 (1991) 269–275.

[3] N.A. Kudryashov, One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul*. 17 (2012) 2248–2253.

[4] Kudryashov N.A. Exact soliton solutions of the generalized evolution equation of wave dynemics. *J. Appl. Math. Mech*. 52 (1988) 361–365.

[5] Kudryashov N.A. Exact solutions of the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation. *Phys. Lett. A*. 147 (1990) 287–291.

[6] Kudryashov N.A. On types of nonlinear nonintegrable equations with exact solutions *Phys. Lett. A.* 155 (1991) 269–275.

[7] Kudryashov N.A. Singular manifold equations and exact solutions for some nonlinear partial differential equations. *Phys. Lett. A*. 182 (1993) 356–362.