



## رفتار سامانه اتم-کاواک در حالت‌های شبیه سازی شده و تقریبی

بابک پروین

دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

### چکیده

رفتار یک اتم سه ترازوی به دام افتاده در یک کاواک اپتیکی تک مد در حالت پایدار از لحاظ نظری بررسی شده است. معادلات توصیف کننده سامانه اتم-کاواک در دو حالت شبیه سازی شده و تقریبی محاسبه شده است. در حالت شبیه سازی شده، جواب معادلات بازگشتی با روش حل دستگاه‌های معادلات خطی محاسبه می‌شود. در این حالت معادلات زیادی برای رسیدن به جواب قابل قبول در نظر گرفته می‌شود. در روش تقریبی، در حل معادلات از شرط حد میدان تحریکی ضعیف استفاده می‌شود که در نتیجه تعداد معادلات محدودی ایجاد می‌شود که باید حل شوند. این به ما امکان می‌دهد تا فرم صریح کمیت‌های فیزیکی مورد نظر را به دست آوریم. برای حل معادلات سامانه اتم-کاواک در حالت پایدار، حالت شبیه سازی شده فرم عددی دقیق کمیت‌های فیزیکی مطلوب را ارائه می‌دهد، در حالی که حالت تقریبی فرم صریح این کمیت‌ها را در حد میدان تحریکی ضعیف به دست می‌دهد. مقایسه یافته‌های به دست آمده نشان می‌دهد که در حد میدان تحریکی ضعیف، نتایج شبیه سازی شده با نتایج تقریبی سازگار است.

واژه‌های کلیدی: اتم سه ترازوی، حد میدان تحریکی ضعیف، دستگاه معادلات خطی، کاواک اپتیکی، معادله اصلی

[2010]: 81Q35, 81S22, 81P68

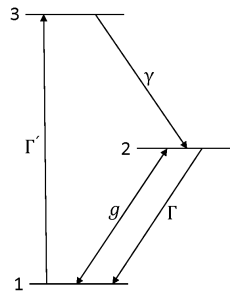
## ۱ مقدمه

یک اتم سه ترازوی محصور شده در یک کاواک اپتیکی تک مد، می‌تواند رفتارهای نیمه کلاسیکی مثل لیزینگ و رفتارهای کوانتومی مثل تابش فوتون پادخوشه‌ای از خود نشان دهد. در کار قبلی [۱]، رفتارهای مختلف همین اتم سه ترازوی که در یک کاواک اپتیکی تک مد محصور شده بود، بررسی شد. تحت چندین شرط معین، ثابت شد که اتم سه ترازوی رفتارهای نزدیک به یک اتم دو ترازوی را از خود نشان می‌دهد و می‌تواند نور پادخوشه‌ای گسیل کند که این محاسبات در نمایش پایه‌های اتم-کاواک انجام شده بود. برای کامل‌تر کردن بحث، می‌توان این محاسبات را در نمایش جدیدی مورد بحث و بررسی قرار داد که هدف این مقاله، ارائه همین الگو است. در نهایت می‌توان نتایج به دست آمده در پایه‌های اتم-کاواک را با یافته‌هایی که در این نوشته در نمایش جدید به دست آمده‌اند، مقایسه کرد. از آنجائی‌که ذکر تمامی نکات مربوط به این سامانه در اینجا نمی‌گنجد، لذا برای بحث مفصل‌تر می‌توان [۱] را مرور کرد.

## ۲ اتم سه ترازوی

یک اتم سه ترازوی که در یک کاواک اپتیکی تک مد قرار گرفته است، مطابق شکل ۱ مفروض است [۱]، رفتار این سامانه را می‌توان با معادله اصلی زیر توصیف کرد [۲]:

$$\dot{\rho} = \left[ g \left( a \hat{A}_{21} - a^\dagger \hat{A}_{12} \right), \rho \right] + \frac{\Gamma'}{\gamma} \left( 2 \hat{A}_{21} \rho \hat{A}_{13} - \hat{A}_{11} \rho - \rho \hat{A}_{11} \right) + \frac{\gamma}{\gamma} \left( 2 \hat{A}_{23} \rho \hat{A}_{32} - \hat{A}_{33} \rho - \rho \hat{A}_{33} \right) + \frac{\Gamma}{\gamma} \left( 2 \hat{A}_{12} \rho \hat{A}_{21} - \hat{A}_{22} \rho - \rho \hat{A}_{22} \right) + \frac{\kappa}{\gamma} \left( 2 a \rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a \right), \quad (1)$$



شکل ۱: چیدمان ترازهای انرژی یک اتم سه تراز که در یک کاواک اپتیکی تک مد محصور شده است را نشان می‌دهد.

که در آن  $g$  ضریب جفت‌شدگی گذار ۱-۲ اتم با مد میدان کاواک،  $\Gamma'$  آهنگ پمپاژ غیرهمدوس از تراز ۱ به ۳،  $\gamma$  نرخ گسیل خودبخودی از تراز ۳ به ۲،  $\Gamma$  آهنگ گسیل خودبخودی از تراز ۲ به ۱ و  $\kappa$  آهنگ واپاشی کاواک است. برای سادگی، فرکانس گذار ۱-۲ اتم در حالت تشدید با فرکانس کاواک در نظر گرفته شده است. برای حل معادله اصلی، می‌توان از کمیت‌های زیرین استفاده کرد [۳]:

$$C_n = \langle a^{\dagger n} a^n \rangle, \tag{۲}$$

$$D_n = \langle \hat{A}_{11} a^{\dagger n-1} a^n + \hat{A}_{12} a^{\dagger n} a^{n-1} \rangle, \tag{۳}$$

$$F_n = \langle \hat{A}_{22} a^{\dagger n} a^n \rangle, \tag{۴}$$

$$J_n = \langle \hat{A}_{33} a^{\dagger n} a^n \rangle, \tag{۵}$$

که در معادله (۳)،  $n \geq 1$  و در بقیه معادلات  $n \geq 0$  است. تحول زمانی این کمیت‌ها با استفاده از معادله اصلی (۱)، از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\dot{C}_n = -ngD_n - \kappa n C_n, \tag{۶}$$

$$\dot{D}_n = 2gC_n - 4gF_n - 2gJ_n - 2ngF_{n-1} - \omega(\Gamma' + \Gamma + \kappa(2n - 1))D_n, \tag{۷}$$

$$\dot{F}_n = gD_{n+1} + \gamma J_n - (\Gamma + \kappa n)F_n, \tag{۸}$$

$$\dot{J}_n = \Gamma' C_n - \Gamma' F_n - (\Gamma' + \gamma + \kappa n)J_n, \tag{۹}$$

یکی از روش‌ها برای حل این معادلات در حالت پایدار، استفاده از روش کسرهای دنباله دار ماتریسی است [۴]. در اینجا از روش ساده‌تر دیگری برای حل این معادلات در حالت پایدار استفاده شده است. بدین منظور، می‌توان این مجموعه معادلات را در یک  $n$  به اندازه کافی بزرگ مثل  $N$  قطع کرد و از بقیه معادلات صرف‌نظر نمود، سپس معادلات باقیمانده را به صورت  $AX = b$  نوشت که در آن  $A$  و  $b$  ماتریس‌های معلومی هستند، با به دست آوردن ماتریس مجهول  $X$ ، مساله حل می‌شود و بعد از آن می‌توان کمیت‌های فیزیکی دلخواه را محاسبه کرد. در محاسبات عددی، مقدار  $N$  باید طوری در نظر گرفته شود که جواب این معادلات، به ازای  $N - 1$  و  $N + 1$  تغییری نکند. بعد از حل عددی معادلات، می‌توان کمیت‌های فیزیکی جمعیت تراز دوم، تعداد فوتون مقیاس شده و تابع همدوسی مرتبه دوم با تاخیر زمانی صفر را به ترتیب از روابط زیر به دست آورد:

$$A_{22} = F_0, \tag{۱۰}$$

$$m = \frac{\langle a^{\dagger} a \rangle}{N_{\Gamma}} = \frac{C_1}{N_{\Gamma}}, \tag{۱۱}$$

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle a^{\dagger 2} a^2 \rangle}{\langle a^{\dagger} a \rangle^2} = \frac{C_2}{C_1^2}, \tag{۱۲}$$

از طرف دیگر می‌توان معادلات بالا را در حد میدان تحریکی ضعیف  $\gamma \ll \Gamma'$  هم حل کرد و فرم تقریبی چندین کمیت فیزیکی مورد نظر را به دست آورد که در این مورد، مرتبه مجهولات بر حسب  $\Gamma'$  به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$C_n \sim \Gamma'^m; \quad D_n \sim \Gamma'^m; \quad F_n \sim \Gamma'^{m+1}; \quad J_n \sim \Gamma'^{m+1}, \quad (13)$$

در حد میدان تحریکی ضعیف که در آن جمعیت تراز پایه، نزدیک به یک در نظر گرفته می‌شود، تا مرتبه دوم  $\Gamma'$  و با ساده کردن هر معادله تا مرتبه غالب داریم [۵]:

$$\dot{F}_0 = gD_1 + \gamma J_0 - \Gamma F_0, \quad (14)$$

$$\dot{J}_0 = \Gamma' C_0 - \gamma J_0, \quad (15)$$

$$\dot{C}_1 = -gD_1 - \kappa C_1, \quad (16)$$

$$\dot{D}_1 = \gamma g C_1 - \gamma g F_0 - \omega(\Gamma + \kappa) D_1, \quad (17)$$

$$\dot{F}_1 = gD_2 + \gamma J_1 - (\Gamma + \kappa) F_1, \quad (18)$$

$$\dot{J}_1 = \Gamma' C_1 - (\gamma + \kappa) J_1, \quad (19)$$

$$\dot{C}_2 = -\gamma g D_2 - \kappa C_2, \quad (20)$$

$$\dot{D}_2 = \gamma g C_2 - \gamma g F_1 - \omega(\Gamma + \kappa) D_2, \quad (21)$$

این معادلات یک دستگاه نه معادله ای نه مجهولی را تشکیل می‌دهند که تعدادی از جواب‌های آن در حالت پایدار، از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$F_0 = \frac{\Gamma'(\gamma g^2 + \kappa^2 + \Gamma \kappa)}{\Gamma^2 \kappa + \gamma \Gamma g^2 + \Gamma \kappa^2 + \gamma g^2 \kappa}, \quad (22)$$

$$C_1 = \frac{\gamma \Gamma' g^2}{\Gamma^2 \kappa + \gamma \Gamma g^2 + \Gamma \kappa^2 + \gamma g^2 \kappa}, \quad (23)$$

$$C_2 = \frac{\omega \Gamma' g^2 \gamma}{(\gamma + \kappa)(\Gamma^2 \kappa + \gamma \Gamma g^2 + \gamma \Gamma \kappa^2 + \gamma g^2 \kappa + \kappa^3)} C_1, \quad (24)$$

می‌توان گفت که مرتبه تمامی جواب‌های به دست آمده نسبت به  $\Gamma'$  در تایید با مراتب نوشته شده در معادله (۱۳) است. حال می‌توان جمعیت تراز دوم، تعداد فوتون مقیاس شده و تابع همدوسی مرتبه دوم را به دست آورد که بعد از استفاده از پارامترهای بدون بعد زیر [۱]:

$$N_A = \frac{\kappa \Gamma}{\gamma g^2}; \quad N_\Gamma = \frac{\Gamma^2}{\gamma g^2}; \quad p = \frac{\Gamma'}{\Gamma}; \quad \xi = \frac{\Gamma}{\gamma}, \quad (25)$$

که در آن  $N_A$  تعداد اتم بحرانی،  $N_\Gamma$  تعداد فوتون بحرانی،  $p$  قدرت پمپاژ غیرهمدوس و  $\xi$  نسبت آهنگ گسیل‌های خودبخودی است؛ خواهیم داشت:

$$A_{22} = \frac{p(N_A^2 + N_\Gamma N_A + N_\Gamma)}{(N_A + 1)(N_A + N_\Gamma)}, \quad (26)$$

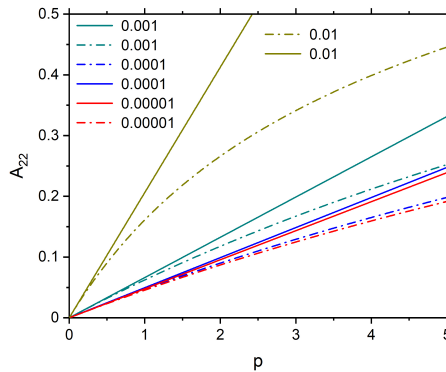
$$m = \frac{p}{(N_A + 1)(N_A + N_\Gamma)}, \quad (27)$$

$$g^{(2)}(0) = \frac{2N_\Gamma^2(N_A + 1)(N_A + N_\Gamma)}{(N_\Gamma + N_A \xi)(N_A^2 + N_\Gamma N_A + N_\Gamma)(3N_A + N_\Gamma)}. \quad (28)$$

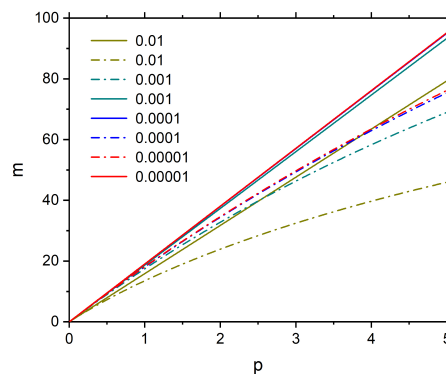
که این معادلات دقیقاً با روابط قید شده در [۱] برابر هستند که در پایه های اتم-کاواک محاسبه شده بودند و این تاییدی بر درستی محاسبات انجام شده است.

### ۳ مقایسه نتایج شبیه سازی شده با مقادیر تقریبی

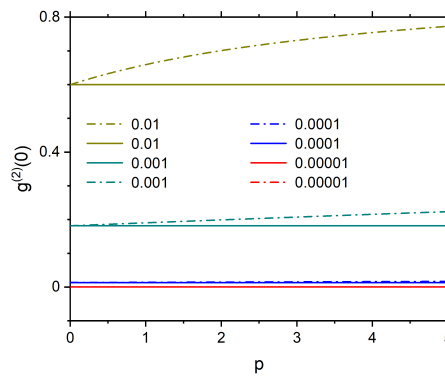
در این قسمت، منحنی های  $A_{22}$ ،  $m$  و  $g^{(2)}(0)$  تحت شرایط  $2g \gg \kappa$  که معادل  $N_A \ll 1$  و  $\Gamma \ll \Gamma_E$  و  $N_\Gamma \ll N_A^2$  است، در حالت شبیه سازی شده با استفاده از معادلات (۱۰) تا (۱۲) و همچنین در حالت صریح یا تقریبی با معادلات (۲۶) تا (۲۸) بر حسب  $p$  رسم شده اند که در آن  $\Gamma_E = 4g^2/\kappa$  است. در هر منحنی، هر رنگ مجزا مربوط به مقدار مشخصی از پارامتر  $N_\Gamma$  است. منحنی های پررنگ بر طبق معادلات (۲۶) تا (۲۸) و نمودارهای خط چین بر حسب روابط (۱۰) تا (۱۲) رسم شده اند. در شکل ۲، منحنی های  $A_{22}$  به ازای  $N_\Gamma$  های مختلف بر حسب  $p$  رسم شده است، در این شکل واضح است که با کاهش  $N_\Gamma$ ، مقادیر شبیه سازی شده به مقادیر به دست آمده در حد میدان تحریکی ضعیف، نزدیکتر و نزدیکتر می شوند. در شکل ۳، نمودارهای  $m$  برای چندین مقدار  $N_\Gamma$  بر حسب  $p$  رسم شده است. با کمتر شدن  $N_\Gamma$ ، مقادیر شبیه سازی شده به نتایج عددی محاسبه شده در حد میدان تحریکی ضعیف نزدیکتر می شوند. در شکل ۴، منحنی های  $g^{(2)}(0)$  به ازای مقادیر متفاوت  $N_\Gamma$  بر حسب  $p$  رسم شده اند. از روی نمودارها پیداست که با کاهش تدریجی  $N_\Gamma$ ، منحنی های خط چین شبیه سازی شده به نمودارهای پررنگ محاسبه شده در حد میدان تحریکی ضعیف، نزدیکتر و نزدیکتر می شوند. در این حالت، چون مقدار تابع همبستگی مرتبه دوم کوچکتر از یک است، نورگسیل شده از سامانه، خاصیت فوتون پادخوشه ای از خود نشان می دهد. نتایج همه این نمودارها حاکی از آن است که نتایج به دست آمده در حد میدان تحریکی ضعیف با تقریب خوبی با مقادیر محاسبه شده از شبیه سازی ها، همخوانی دارد. در رسم شکل ها از مقادیر  $N_A = 0.05$  و  $\xi = 0.02$  استفاده شده است.



شکل ۲: منحنی های جمعیت تراز دوم به ازای  $N_\Gamma$  های مختلف بر حسب  $p$  را نشان می دهد. نمودارهای خط چین بر اساس معادله (۱۰) و خطوط پررنگ بر طبق معادله (۲۶) رسم شده اند.



شکل ۳: نمودارهای تعداد فوتون مقیاس شده به ازای  $N_\Gamma$  های متفاوت بر حسب  $p$  مشخص شده است. نمودارهای خط چین بر طبق معادله (۱۱) و خطوط پررنگ بر اساس معادله (۲۷) رسم شده اند.



شکل ۴: منحنی های تابع همدوسی مرتبه دوم برای چندین مقدار  $N_{\Gamma}$  بر حسب  $p$  نمایش داده شده است. نمودارهای خط چین بر اساس رابطه (۱۲) و خطوط پر رنگ بر طبق معادله (۲۸) رسم شده اند.

## نتیجه گیری

در این کار، رفتارهای یک اتم سه ترازوی محصور شده در یک کاواک اپتیکی تک مد، تحت چندین شرط خاص، در حالت شبیه سازی شده و در حالت تقریبی بررسی شده است. نتایج رسم شده، نشان می دهند که مقادیر شبیه سازی شده با تقریب خوبی نتایج به دست آمده از حد میدان تحریکی ضعیف را تایید می کنند. همچنین نتایج این مقاله با یافته های حاصل از [۶] همخوانی کامل دارند و این صحت محاسبات انجام شده را نشان می دهد.

## مراجع

- [1] B. Parvin, *Emitted light features of a three-level atom enclosed in an optical cavity*, Chin. J. Phys. 80 (2022) 46 and references therein.
- [2] H. J. Carmichael, *Statistical Methods in Quantum Optics 1: Master Equations and Fokker-Planck Equations*, Springer-Verlag, 1999.
- [3] G. S. Agarwal, S. D. Gupta, *Steady states in cavity QED due to incoherent pumping*, Phys. Rev. A 42 (1990) 1737.
- [4] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation, Methods of Solution and Applications*, Springer-Verlag, 1989.
- [5] H. J. Carmichael, *Statistical Methods in Quantum Optics 2: Non-Classical Fields*, Springer-Verlag, 2008.

پست الکترونیکی: parvin@maragheh.ac.ir