معرفی و مدل‌سازی نوع جدیدی از گراف‌ها و خواص آن‌ها به نام گراف توان 2^X

سعید محمدیان [۱،۱]، مهدیه کرکه آبادی[۲]
۱. استادیار، دانشکده ریاضی وآمار و علوم کامپیوتر دانشگاه سمنان، ایران
۲. دانشجوی دکتری ریاضی کاربردی دانشکده ریاضی وآمار و علوم کامپیوتر دانشگاه سمنان، ایران

چکیده

این مقاله به معرفی مدل جدیدی از گراف‌های ساده به نام گراف 2^X می‌پردازد. فرض می کنیم که X مجموعه متناهی و غیرتهی دلخواه باشد و 2^X مجموعه توان X باشد، در این صورت 2^X را مجموعه رئوس درنظر می‌گیریم و سپس به بیان خواص آن‌ها پرداخته و در نهایت چند قضیه و لم از آن‌ها نتیجه می گیریم.

واژه‌های کلیدی: گراف ساده، مجموعه توان، گراف 2^X ، گذر اویلری ، درجه کل گراف

۱. مقدمه

در ریاضیات بعضا گراف‌ها به گونه‌ای تفسیر می‌شوند که رئوس آن‌ها بیانگر اشیاء و یال‌ها بیانگر ارتباطی است که بین این اشیاء می‌تواند وجود داشته باشد و تاکنون بسیاری از این گراف‌ها معرفی شده‌اند و کاربرد های بسیاری از آن‌ها در علوم و شاخه های مهندسی دیده شده است. در این مقاله به معرفی گونه جدیدی از گراف‌ها می‌پردازیم و آن‌ها را گراف‌های توان 2^X می‌نامیم. بدین معنی که فرض می‌کنیم X مجموعه متناهی و غیرتهی از اشیاء باشد و 2^X مجموعه توان X باشد. 2^X را مجموعه رئوس گراف در نظر گرفته و یال‌ها بیانگر زیر مجموعه بودن هستند و سپس قضایای جدیدی در مورد این گراف و خصوصیات اش مطرح و اثبات می شود.

۲. گراف توان 2^X

[1] **Corresponding author:**
Email: S_ Mohammadian@semnan.ac.ir

تعریف۱.۲: فرض می‌کنیم X مجموعه‌ای متناهی و غیرتهی باشد و 2^X مجموعه توان X باشد. گراف $G=(2^X,E)$ گرافی است که مجموعه رئوس آن عبارتند از $V=\ 2^X$ و دو راس $A_1\,,A_2\in V$ مجاورند هرگاه $A_2\nsubseteq A_1\nsubseteq A_2$ یا $A_2\nsubseteq A_1$.

از تعریف فوق نتیجه می‌شود که G گرافی بدون جهت است و چون $\nsubseteq$ بیانگر زیرمجموعه سره است پس طوقه و یال چندگانه تولید نمی‌شود، لذا $G=(2^X,E)$ گرافی ساده، متناهی و غیرجهت دار است.

لم۱.۲: گراف $G=(2^X,E)$ گرافی همبند است.

اثبات:
فرض کنیم $A,B\in E$ و $A,B\neq\emptyset,X$ چون $\emptyset$ با هر دو $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ مجاور است و هم چنین A و B با X مجاورند سپس به ازاء هر دو A و B دلخواه $(A,B\neq\emptyset,X)$ دوری حداقل به طول ۳ موجود است که شامل رئوس A و B می‌شود. هم چنین همواره از $\emptyset$ به سایر رئوس و از سایر رئوس به X یال موجود است لذا G گرافی همبند است.

لم۲.۲:

I. $|V(G)|=|2^X|=2^{|X|}$

II. $\deg(\emptyset)=\deg(X)=2^{|X|}-1$

III. اگر $A\in 2^X$ و $A\neq\emptyset$ و $A\neq X$ آنگاه $\deg(A)=2^{|X|-|A|}+2^{|A|}-2$

اثبات:

I و II بدیهی است. برای اثبات III با توجه به آنکه A دارای $2^{|A|}-1$ زیر مجموعه سره است کافی است نشان دهیم که خود A زیر مجموعه ی $2^{|X|-|A|}-1$ مجموعه ی دیگر است. از آن جاییکه A زیر مجموعه برخی از مجموعه های $|A|+1$عضوی است و برای این کار لازم است که مجموعه های $|A|+1$ عضوی شامل $|A|$ عضو از $\mathbf{A}$ باشند و به علاوه یک عضو دیگر از $|X|-|A|$ عضو X ، لذا تعداد زیر مجموعه های $|A|+1$ عضوی که A زیر مجموعه آنهاست برابر است با $\binom{|X|-|A|}{1}$ و به همین ترتیب برای مجموعه های $|A|+2$ عضوی داریم $\binom{|X|-|A|}{2}$ و . . . . لذا $\mathbf{A}$ زیر مجموعه ی

$$\binom{|X|-|A|}{1}+\binom{|X|-|A|}{2}+\cdots+\binom{|X|-|A|}{|X|-|A|}=\sum_{i=1}^{|X|-|A|}\binom{|X|-|A|}{i}=2^{|X|-|A|}-1$$

مجموعه ی دیگر است و به این ترتیب برای $0\le|A|\le|\mathrm{X}|$ داریم:

$$\deg(A) = 2^{|A|} - 1 + 2^{|X|-|A|} - 1 = 2^{|X|-|A|} + 2^{|A|} - 2.$$

لم۳.۲: گراف $G = (2^X, E)$ شامل گذار اویلری است.

اثبات:

با توجه به لم ۲ در گراف G فقط دو راس $\emptyset$ و X از درجه فرد هستند و سایر رئوس از درجه زوج می باشند. لذا گراف G شامل گذری است که شامل همه یال‌های G می‌شود. بدیهی است که این گذر از راس $\emptyset$ شروع و به X (یا بالعکس) ختم می‌شود.

قضیه ۱.۲: اگر $G = (2^X, E)$ گرافی دلخواه باشد آنگاه

$$T(G) = \sum_{k=1}^{|X|-1} \binom{|X|}{k} \left(2^{|X|-k} + 2^k - 2\right) = 2(2^{|x|} - 2)$$

که در آن $T(G)$ مجموع همه رئوس گراف است.

اثبات:

با توجه به آنکه

$$\deg(\emptyset) = \deg(X) = 2^{|X|} - 1$$

واگر $1 \leq |A| \leq |X| - 1$ آنگاه

$$\deg(A) = 2^{|X|-|A|} + 2^{|A|} - 2$$

و از طرفی تعداد زیر مجموعه های K عضوی یک مجموعه n عضوی عبارت است از $\binom{n}{k}$ لذا

$$T(G) = \sum_{k=1}^{|X|-1} \binom{|X|}{k} \left(2^{|X|-k} + 2^k - 2\right) = 2\left(2^{|x|} - 2\right).$$

نتیجه۱.۲: اگر $G = (2^X, E)$ گراف 2^X باشد آنگاه

$$
\begin{aligned}
|E| &= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{|X|-1}\binom{|X|-1}{k}\left(2^{|X|-k}+2^{k}-2\right)+2\left(2^{|x|}-1\right)\right]\\
&= \sum_{k=1}^{|X|-1}\left[\binom{|X|}{k}\left(2^{|X|-k-1}+2^{k-1}\right)\right]+\left(2^{|x|}-1\right)
\end{aligned}
$$

قضیه ۲.۲: اگر $|X| = n \neq 0$ آنگاه تعداد مثلث در گراف 2^X برابر است با

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\left(2^{n-k}-1\right)\\
&\quad+\binom{n}{1}\Bigg[\binom{n-1}{1}\sum_{i=1}^{n-2}\binom{n-2}{i}\\
&\quad+\binom{n-1}{2}\sum_{i=1}^{n-3}\binom{n-3}{i}+\cdots+\binom{n-1}{n-3}\sum_{i=1}^{2}\binom{2}{i}+\binom{n-1}{n-2}\binom{1}{1}\Bigg]\\
&\quad+\binom{n}{2}\Bigg[\binom{n-2}{1}\sum_{i=1}^{n-3}\binom{n-3}{i}\\
&\quad+\binom{n-2}{2}\sum_{i=1}^{n-3}\binom{n-4}{i}+\cdots+\binom{n-2}{n-4}\sum_{i=1}^{2}\binom{2}{i}+\binom{n-2}{n-3}\binom{1}{1}\Bigg]+\cdots\\
&\quad+\binom{n}{n-2}\left[\binom{n-(n-2)}{1}\binom{1}{1}\right]
\end{aligned}
$$

اثبات:

ابتدا تعداد دورهایی بطول ۳ را که با راس $\emptyset$ شروع می‌شوند محاسبه می کنیم و سپس تعداد دورهای به طول ۳ را که از رئوس تک عضوی و ... است و در آخر تعداد دور های به طول ۳ که از رئوس $n-2$ شروع می‌شوند را محاسبه می‌کنیم و آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

تعداد دور های به طول ۳ که یک راس آن‌ها $\emptyset$ است بصورت زیر بدست می‌آید. ابتدا می‌توانیم از مجموعه های تک عضوی که تعداد آن‌ها $\binom{n}{1}$ است یکی را برگزینیم که هر کدام از این مجموعه های تک عضوی دارای $2^{n-1}-1$ زیر مجموعه ی سره دیگر است که برطبق اصل ضرب برابر است با $\binom{n}{1}(2^{n-1}-1)$.

حال از مجموعه $\emptyset$ به یکی از زیر مجموعه های دو عضوی می‌رویم که تعداد آن‌ها $\binom{n}{2}$ است که هر کدام از آن‌ها دارای $(2^{n-2}-1)$ زیر مجموعه ی دیگر است. ($\binom{n}{2}(2^{n-2}-1)$)

به همین ترتیب $(2^1-1)\binom{n}{n-1}$که طبق اصل جمع تعداد آن‌ها برابر است با

$$
\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\left(2^{n-k}-1\right)
$$

و این همان اولین جمله درصورت قضیه می‌باشد.

اکنون به محاسبه تعداد دورهای به طول ۳ با شروع از زیر مجموعه های یک عضوی می پردازیم. واضح است که تعداد زیرمجموعه های تک عضوی عبارت است از $\binom{n}{1}$.
گیریم A یکی از این زیر مجموعه های تک عضوی باشد، A می تواند زیر مجموعه ی مجموعه های دو عضوی، سه عضوی، ... و $n\text{-}1$ عضوی باشد که تعداد آنها به ترتیب عبارت است از

$$\binom{n-1}{1},\binom{n-1}{2}\cdots\binom{n-1}{n-2}$$

به عنوان مثال از $\binom{n-1}{1}$می توان $\binom{n-1}{1}$ یا $\binom{n-1}{2}$ ... یا $\binom{n-2}{n-2}$ را انتخاب کرد.
لذا تعداد طورهای به طول ۳ با شروع از یک، مجموعه ی تک عضوی طبق اصول ضرب و جمع شمارشی برابر است با:

$$\binom{n}{1}\left[\binom{n-1}{1}\sum_{i=1}^{n-2}\binom{n-2}{i}+\binom{n-1}{2}\sum_{k=1}^{n-3}\binom{n-3}{k}+\cdots+\binom{n-1}{n-3}\sum_{l=1}^{2}\binom{2}{l}+\cdots+\binom{n-1}{n-2}\binom{1}{1}\right]$$

که همان جمله ی دوم در صورت قضیه بالا است و به همین ترتیب می توانیم سایر جملات را بیابیم. این بیان إثبات قضیه را به پایان می برد.

۳. پیشنهاد برای کارهای بعدی:

همان گونه که مشاهده شد این گونه گراف ها برای اولین بار مدل سازی شده اند لذا می توان سایر خواصی که برای گراف های ساده موجود است در مورد این گراف ها بررسی نمود، خواصی نظیر جورسازی، همیلتونی بودن آنها، مجموعه های مستقل و ... . همچنین می توان برای آنها گراف های جهت دار تعریف نمود و خواص مربوط به این گراف ها را بررسی نمود.

۴. مراجع

1. Devlin, K.J. (1979), Fundamentals of contemporary set theory. Universitext. Springer-Verlag.
2. Halmos, P.R. (1960), Naive set theory. The University Series in Undergraduate Mathematics. Van Nostrand Company.

3. Puntambekar, A. A. (2007), Theory of Automata and Formal Languages. echnical Publications.
4. Reimann, M. and Royer, L. and Daminelli, S. and Schroeder, M. Dehmer, M. eds (2015), *Computational Network Theory: Theoretical Foundations and Applications*. Quantitative and Network Biology Series. 5. Wiley-Blackwell.
5. Royer, L. and Reimann, M. and Andreopoulos, B. and Schroeder, M. (11 Jul 2008), Berg, Johannes, ed. *"Unraveling Protein Networks with Power Graph Analysis"*. PLoS Computational Biology. 4 (7): e1000108.
6. Martina, M. and Hans-Jörg, H. and Royer, L. anad Herr, A. and Milosevic, J. and et al. (15 Oct 2010), "Genome-wide expression profiling and functional network analysis upon neuroectodermal conversion of human mesenchymal stem cells suggest HIF-1 and miR-124a as important regulators.". Experimental Cell Research. 316 (17): 2760–78.
7. Ruau, L. L. and David. J. and et al (30 April 2014), "Disease Risk Factors Identified Through Shared Genetic Architecture and Electronic Medical Records". Sci. Transl. Med.
8. Royer, L. and Matthias, R. and Stewart, F. A. and Schroeder, M. (18 Jun 2012), "Network compression as a quality measure for protein interaction networks.". PLOS ONE. 7 (6): e35729.
9. Daminelli, S. et al (26 Apr 2012), "Drug repositioning through incomplete bi-cliques in an integrated drug–target–disease network.". Integrative Biology (Camb.). 4 (7): 778– 88.
10. Tsatsaronis, G. and Reimann, R. and Varlamis, I. and Gkorgkas, O. and Nørvåg, K. (2011), "Efficient community detection using power graph analysis". Proceedings of the 9th workshop on Large-scale and distributed informational retrieval.
11. Tsatsaronis, G. et al (2011). How to Become a Group Leader? or Modeling Author Types Based on Graph Mining. Lecture Notes in Computer Science. 6966. SpringerLink.